IX skyrius. TIESINIO ATVAIZDŽIO MATRICOS KANONINIS PAVIDALAS

1. Tiesinių atvaizdžių tikrinės reikšmės ir tikrimiai vektoriai

1. 1. Sakykime, (V, k) – tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis.

Apibrėžimas. Tiesinės erdvės V tiesinis poerdvis L yra vadinamas f-invariantiniu, jei $f(L) \subset L$.

Ypač svarbūs tiesinės erdvės V vienmačiai f-invariantiniai tiesiniai poerdviai.

Teiginys. Sakykime, L – tiesinės erdvės V vienmatis f-invariantinis tiesinis poerdvis. Tuomet egzistuoja toks $\lambda \in k$, kad kiekvienam $u \in L$, $u \neq O_V$, $f(u) = \lambda u$ (jei $u = O_V$, tai kiekvienam $\mu \in k$, $f(O_V) = \mu O_V$).

Įrodymas. Jei L-vienmatis tiesinis poerdvis, tai kiekvienas nenulinis vektorius $u \in L$ sudaro šio poerdvio bazę. Kadangi L yra f-invariantinis tiesinis poerdvis, tai kiekvieno vektoriaus $u \in L$ vaizdas $f(u)$ priklauso L. Vadinasi, jei $u \in L$ ir $u \neq O_V$, tai egzistuoja toks $\lambda \in k$, kad $f(u) = \lambda u$. Lieka įrodyti, kad λ nepriklauso nuo vektoriaus $u \in L$, $u \neq O_V$.

Sakykime, kad $l \in L$, $l \neq O_V$. Vadinasi, egzistuoja toks $\alpha \in k$, kad $l = \alpha u$. Tuomet

$$f(l) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u) = \lambda l. \ \triangle$$

1. 2. Apibrėžimas. Sakykime, (V, k) – tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis. Tiesinės erdvės V vektorius u, $u \neq O_V$, yra vadinamas tiesinio atvaizdžio f tikriniu vektoriumi, atitinkančiu tiesinio atvaizdžio f tikrinę reikšmę $\lambda \in k$, jei $f(u) = \lambda u$.

Teiginys. Sakykime, (V, k) – tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis, $u \in V$ – tiesinio atvaizdžio f tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę $\lambda \in k$. Tuomet tiesinės erdvės V tiesinis poerdvis $ku =: \{\alpha u \mid \alpha \in k\}$ yra vienmatis ir f-invariantinis.

Įrodymas. Šio teiginio įrodymas akivaizdus.

Pavyzdžiai.

1. Sakykime, $V = \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – tiesinis atvaizdis, apibrėžtas taip:

$$f((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = (\alpha_1, \alpha_2, 0), \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Tiesinio atvaizdžio f tikriniai vaktoriai yra šie:
i) $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$, čia α_1 ir α_2 kartu nelygūs nuliui, atitinkantys tikrinę reikšmę 1;
ii) $(0, 0, \alpha)$, $\alpha \neq 0$, atitinkantys tikrinę reikšmę 0.

2. Sakykime, $V = \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – tiesinis atvaizdis, apibrėžtas taip:

$$f((\alpha_1, \alpha_2)) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha_1 \cos\psi - \alpha_2 \sin\psi, \alpha_1 \sin\psi + \alpha_2 \cos\psi).$$

Įsitikinsime, kad šis atvaizdis neturi tikrinių vektorių, jei $\psi \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Jei (α_1, α_2) šio atvaizdžio tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę $\lambda \in \mathbb{R}$, tai lygčių sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 \cos\psi - \alpha_2 \sin\psi & = \lambda\alpha_1 \\ \alpha_1 \sin\psi + \alpha_2 \cos\psi & = \lambda\alpha_2 \end{cases}$$

turi nenulinį sprendinį: (α_1, α_2). Šią lygčių sistemą perrašykime taip:

$$\begin{cases} \alpha_1 & (\cos\psi - \lambda) & -\alpha_2 & \sin\psi & = 0 \\ \alpha_1 & \sin\psi & +\alpha_2 & (\cos\psi - \lambda) & = 0 \end{cases}$$

Pirmąją lygtį padauginę iš $\cos\psi - \lambda$, antrąją – iš $\sin\psi$ ir gautus rezultatus sudėję, gauname: $\alpha_1((\cos\psi - \lambda)^2 + \sin^2\psi) = 0$. Panašiai, eliminavę iš šių lygčių α_1, gauname: $\alpha_2((\cos\psi - \lambda)^2 + \sin^2\psi) = 0$. Taigi ši lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai $(\cos\psi - \lambda)^2 + \sin^2\psi = 0$. Pastarasis reiškinys lygus nuliui tada ir tik tada, kai $\cos\psi - \lambda = 0$ ir $\sin\psi = 0$, t. y. , kai $\psi = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

1. 3. Įrodysime svarbią teoremą.

Teorema. Sakykime, (V, k) – tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis. Tiesinis atvaizdis f turi tikrinį vektorių, atitinkantį tikrinę reikšmę λ tada ir tik tada, kai λ yra tiesinio atvaizdžio f charakteringojo polinomo $\varphi_f(t)$ šaknis, priklausanti kūnui k.

Įrodymas. Tarkime, kad v_1, v_2, …, v_n yra tiesinės erdvės V bazė, matrica $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ atitinka tiesinį atvaizdį f šioje bazėje. Sakykime, vektorius $u \in V$ yra tiesinio atvaizdžio f tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę $\lambda \in k$, $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ – vektoriaus u užrašas bazės vektoriais. Remdamiesi tiesinio atvaizdžio f tikrinio vektoriaus u, atitinkančio tikrinę reikšmę λ, apibrėžimu, galime parašyti: $f(u) = \lambda u$. Į šią lygybę įrašę vektoriaus u išraišką bazės vektoriais, gauname:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n),$$

arba

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n).$$

Į šią lygybę įrašykime bazės vektorių vaizdus bazės vektoriais $f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j$, $1 \leq i \leq n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda \alpha_j v_j.$$

Pertvarkę pastarąją lygybę, gauname:

$$\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\alpha_{ij} - \lambda\delta_{ij}) v_j = O_V.$$

Ši lygybė ekvivalenti lygybių sistemai:

$$\begin{cases} \alpha_1 & (\alpha_{11}-\lambda) & +\alpha_2 & \alpha_{21} & + & \dots & +\alpha_n & \alpha_{n1} & =0 \\ \alpha_1 & \alpha_{12} & +\alpha_2 & (\alpha_{22}-\lambda) & + & \dots & +\alpha_n & \alpha_{n2} & =0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_{1n} & +\alpha_2 & \alpha_{2n} & + & \dots & +\alpha_n & (\alpha_{nn}-\lambda) & =0 \end{cases}$$

Kaip matome, tiesinio atvaizdžio f tikrinio vektoriaus u koordinatės α_i, $1 \le i \le n$, bazėje v_1, v_2, …, v_n tenkina tiesinių homogeninių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 & (\alpha_{11}-\lambda) & +x_2 & \alpha_{21} & + & \dots & +x_n & \alpha_{n1} & =0 \\ x_1 & \alpha_{12} & +x_2 & (\alpha_{22}-\lambda) & + & \dots & +x_n & \alpha_{n2} & =0 \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & \alpha_{1n} & +x_2 & \alpha_{2n} & + & \dots & +x_n & (\alpha_{nn}-\lambda) & =0 \end{cases}$$

Tiesinių homogeninių lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai lygčių sistemos matricos rangas yra mažesnis už nežinomųjų skaičių. Kadangi $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, tai

$$\operatorname{rg}(\alpha_{ij} - \lambda\delta_{ij})_{i,j=1}^{n} < n.$$

Ši sąlyga ekvivalenti sąlygai

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = \varphi_f(\lambda) = 0.$$

Taigi tiesinio atvaizdžio f tikrinė reikšmė λ, atitinaknti tiesinio atvaizdžio f tikrinį vektorių u, yra tiesinio atvaizdžio f charakteringojo polinomo $\varphi_f(t)$ šaknis, priklausanti kūnui k. Ir atvirkščiai: jei $\lambda \in k$ yra tiesinio atvaizdžio f charakteringojo polinomo $\varphi_f(t)$ šaknis, tai tiesinių homogeninių lygčių sistemos

$$\begin{cases} x_1 & (\alpha_{11}-\lambda) & +x_2 & \alpha_{21} & + & \dots & +x_n & \alpha_{n1} & =0 \\ x_1 & \alpha_{12} & +x_2 & (\alpha_{22}-\lambda) & + & \dots & +x_n & \alpha_{n2} & =0 \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & \alpha_{1n} & +x_2 & \alpha_{2n} & + & \dots & +x_n & (\alpha_{nn}-\lambda) & =0 \end{cases}$$

nenuliniai sprendiniai yra tiesinio atvaizdžio f tikrinių vektorių, atitinkančių tikrinę reikšmę λ, koordinatės tiesinės erdvės V bazėje v_1, v_2, …, v_n. Atkreipkite dėmesį, kad minėtosios tiesinių homogeninių lygčių sistemos matrica yra lygi

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = A^t - \lambda\mathbf{1}_n,$$

čia A – matrica, atitinkanti tiesinį atvaizdį f tiesinės erdvės V bazėje $v_1, v_2, \ldots, v_n$, A^t – matricos A transponuota matrica. $\triangle$

1. 4. Įsitikinsime, kad, jei tiesinis atvaizdis $f : V \to V$ turi $n = \dim_k V$ tarpusavy skirtingų tikrinių reikšmių, priklausančių pagrindiniam kūnui k, tai galima parinkti tokią tiesinės erdvės V bazę, kurioje tiesinio atvaizdžio matrica yra diagonalinė.

Teiginys. Sakykime, (V, k) – tiesinė erdvė virš kūno k. Jei $u_1, u_2, \ldots, u_s \in V$ – tiesinio atvaizdžio $f : V \to V$ tikriniai vektoriai, atitinkantys tarpusavyje skirtingas tikrines reikšmes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in k$, tai vektoriai $u_1, u_2, \ldots, u_s$ yra tiesiškai nepriklausomi.

Įrodymas. Tarkime, kad vektoriai $u_1, u_2, \ldots, u_s$ yra tiesiškai priklausomi. Vadinasi, egzistuoja tokie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \in k$, kurių bent vienas nelygus kūno k nuliniam elementui 0, kad $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_s u_s = O_V$. Šios lygybės kairiojoje pusėje praleidę nulinius vektorius, gaunme:

$$\alpha_{j_1} u_{j_1} + \alpha_{j_2} u_{j_2} + \ldots + \alpha_{j_r} u_{j_r} = O_V, \tag{1}$$

čia nei vienas α_{j_i}, $1 \leq i \leq r$, nėra lygus kūno k nuliniam elementui. Panašaus pobūdžio lygybių, siejančių vektorius $u_1, u_2, \ldots, u_s$ gali būti ir daugiau. Tarkime, pastaroji lygybė trumpiausia tarp visų tokio pobūdžio lygybių. Tuomet

$$f(\alpha_{j_1} u_{j_1} + \alpha_{j_2} u_{j_2} + \ldots + \alpha_{j_r} u_{j_r}) = \alpha_{j_1} f(u_{j_1}) + \alpha_{j_2} f(u_{j_2}) + \ldots + \alpha_{j_r} f(u_{j_r}) = O_V$$

arba

$$\alpha_{j_1} \lambda_{j_1} u_{j_1} + \alpha_{j_2} \lambda_{j_2} u_{j_2} + \ldots + \alpha_{j_r} \lambda_{j_r} u_{j_r} = O_V. \tag{2}$$

1-ąją lygybę padauginę iš $-\lambda_{j_1}$ ir pridėję prie 2-osios, gauname:

$$\alpha_{j_2}(\lambda_{j_2} - \lambda_{j_1}) u_{j_2} + \ldots + \alpha_{j_r}(\lambda_{j_r} - \lambda_{j_1}) u_{j_r} = O_V. \tag{3}$$

Kadangi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in k$ – tarp savęs skirtingi ir nei vienas α_{j_i}, $1 \leq i \leq r$, nėra lygus kūno k nuliniam elementui 0, tai ir nei vienas koeficientas $\alpha_{j_i}(\lambda_{j_i} - \lambda_{j_1})$, $2 \leq i \leq r$, nėra lygus kūno k nuliniam elementui 0. Vadinasi, 3-ioji lygybė trumpesnė nei 2-oji lygybė. Bet tai prieštarauja tam, kad 2-oji pasirinkta lygybė trumpiausia tarp visų lygybių su nenuliniais koeficientais, siejančių vektorius $u_1, u_2, \ldots, u_s$. $\triangle$

Išvada. Sakykime, (V, k) – tiesinė erdvė virš kūno k. Jei tiesinio atvaizdžio $f : V \to V$ charakteringojo polinomo $\varphi_f(t)$ šaknys $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ priklauso kūnui k ir yra tarpusavyje skirtingos, tai egzistuoja tiesinės erdvės V bazė, sudaryta iš tiesinio atvaizdžio f tikrinių vektorių $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Šioje bazėje tiesinį atvaizdį atitinka įstrižaininė matrica

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Įrodymas. Kadangi tiesinio atvaizdžio $f : V \to V$ charakteringojo polinomo $\varphi_f(t)$ šaknys $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ priklauso kūnui k, tai, remiantis teorema [žr. 1. 3.], egzistuoja tiesinio atvaizdžio f tikriniai vektoriai u_1, u_2, ..., u_n, atitinkantys tikrines reikšmes λ_1, λ_2, ..., λ_n. Remiantis įrodytu teiginiu, šie vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi. Kadangi tų vektorių skaičius yra lygus tiesinės erdvės V dimensijai (žinome, kad $\deg \varphi_f(t) = \dim_k V$), tai tie vektoriai sudaro tiesinės erdvės bazę.

Kadangi $f(u_j) = \lambda_j u_j$, $1 \le j \le n$, tai tiesinį atvaizdį f bazėje u_1, u_2, ..., u_n atitinka išvadoje nurodyta matrica. $\triangle$

1. 5. Sakykime, (V, k) – tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis. Kai išsirenkame tiesinės erdvės V bazę v_1, v_2, ..., v_n, tai tiesiniam atvaizdžiui f vienareikšmiškai galime priskirti matricą $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$:

$$f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_j,\ 1 \le i \le n.$$

Jei išsirenkame kitą bazę $\widetilde{v}_1$, $\widetilde{v}_2$, ..., $\widetilde{v}_n$ ir T yra perėjimo matrica iš pirmosios bazės į antrąją, tai tiesinio atvaizdžio f matrica antrojoje bazėje yra TAT^{-1}. Kyla klausimas, ar galima išrinkti tiesinės erdvės V tokią bazę, kurioje tiesinio atvaizdžio f matrica turėtų paprasčiausią pavidalą ir kaip atrodo ši paprasčiausio pavidalo matrica?

Šį klausimą galime suformuluoti ir matricų kalba. Priminsime, kad $M_n(k)$ – visų n-tos eilės kvadratinių matricų, kurių elementai priklauso kūnui k, algebra,

$$GL_n(k) = \{T \in M_n(k) |\ \det T \neq 0\}$$

– pilnoji tiesinė n-tos eilės matricų su koeficientais kūne k grupė. Apibrėžkime aibėje $M_n(k)$ išorinį kompozicijos dėsnį, kurio operatorių aibė yra $GL_n(k)$:

$$GL_n(k) \times M_n(k) \to M_n(k),\ (T, A) \mapsto TAT^{-1},\ T \in GL_n(k),\ A \in M_n(k).$$

Esant fiksuotai matricai $A \in M_n(k)$, aibė $\{TAT^{-1} |\ T \in GL_n(k)\}$ yra vadinama matricos A orbita. Sutarkime matricos A orbitą žymėti $\mathrm{Orb}(A)$. Matrica B priklauso matricos A orbitai $\mathrm{Orb}(A)$ tada ir tik tada, kai matrica B yra panaši matricai A. Anksčiau suformuluotą klausimą apie tiesinio atvaizdžio paprasčiausio pavidalo matricą dabar galime performuluoti taip: kokio paprasčiausio pavidalo matricą galime išrinkti iš matricos A orbitos $\mathrm{Orb}(A)$?

Jei tiesinio atvaizdžio f charakteringojo polinomo $\varphi_f(t)$ šaknys λ_1, λ_2, ..., λ_n priklauso kūnui k ir yra tarp savęs skirtingos, tai, kaip matėme, egzistuoja tiesinės erdvės V bazė, sudaryta iš f tikrinių vektorių u_1, u_2, ..., u_n, atitinkančių tikrines reikšmes λ_1, λ_2, ..., λ_n. Šioje bazėje tiesinio atvaizdžio f matrica yra įstrižaininio pavidalo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bendruoju atveju negalima išrinkti tokios tiesinės erdvės V bazės, kurioje tiesinio atvaizdžio matrica būtų įstrižaininio pavidalo. Tai pailiustruosime pavyzdžiu.

Pavyzdys. Imkime matricą
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Šios matricos charakteringasis polinomas $\varphi_A(t)$ yra lygus $(t-1)^2$. Jei egzistuotų tokia matrica $T \in GL_2(k)$, kad TAT^{-1} būtų įstrižaininė, tai ji turėtų būti lygi antros eilės vienetinei matricai $\mathbf{1}_2$. Iš tikrųjų, panašių matricų charakteringieji polinomai yra lygūs, o tik vienetinės įstrižaininės matricos charakteringasis polinomas yra lygus $(t-1)^2$. Bet gi lygybė $TAT^{-1} = \mathbf{1}_2$ negalima, nes, remdamiesi šia lygybe, gautume $A = T^{-1}\mathbf{1}_2T = \mathbf{1}_2$.

2. Tiesinio atvaizdžio šaknies poerdvis

2. 1. Tegu V –tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis. Priminsime, kad tiesinės erdvės V vektorius $u \neq O_V$ yra vadinamas tiesinio atvaizdžio f tikriniu vektoriumi, atitinkančiu f tikrinę reikšmę $\lambda \in k$, jei $f(u) = \lambda u$. Kadangi id ir f tiesiniai atvaizdžiai, tai ir $f - \lambda\mathrm{id}$ – tiesinis atvaizdis. Todėl lygybę $f(u) = \lambda u$ galime perrašyti taip:
$$f(u) - \lambda\mathrm{id}(u) = (f - \lambda\mathrm{id})(u) = O_V.$$
Taigi $u \in V$, $u \neq O_V$, yra tiesinio atvaizdžio f tikrinis vektorius, atitinkantis f tikrinę reikšmę $\lambda \in k$, tada ir tik tada, kai $u \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{id})$. Kaip matome, jei $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{id}) \neq \{O_V\}$, tai tiesinio poerdvio $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{id})$ vektoriai, išskyrus nulinį vektorių, yra tiesinio atvaizdžio f tikriniai vektoriai, atitinkantys f tikrinę reikšmę λ. Tikslinga nagrinėti ne tik tiesinės erdvės V tiesinį poerdvį $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{id})$, bet ir tiesinius poerdvius $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{id})^j$, $j \geq 1$.

Prieš pradedant nagrinėti tiesinius poerdvius $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{id})^j$, $j \geq 1$, sutarkime paprastumo dėlei vietoje $f - \lambda\mathrm{id}$ rašyti $f - \lambda$. Šis užrašas negali sukelti jokių nesusipratimų.

2. 2. Taigi nagrinėkime tiesinės erdvės V tiesinių poerdvių grandinėlę:
$$\{O_V\} \subset \mathrm{Ker}\,(f-\lambda) \subset \mathrm{Ker}\,(f-\lambda)^2 \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}\,(f-\lambda)^j \subset \mathrm{Ker}\,(f-\lambda)^{j+1} \subset \ldots.$$

Teiginys. Tarkime, m – toks mažiausias teigiamas sveikasis skaičius, kad
$$\mathrm{Ker}\,(f-\lambda)^m = \mathrm{Ker}\,(f-\lambda)^{m+1}.$$
Tuomet kiekvienam $r \in \mathbb{N}$ teisinga lygybė:
$$\mathrm{Ker}\,(f-\lambda)^m = \mathrm{Ker}\,(f-\lambda)^{m+r}.$$

Įrodymas. Šį teiginį įrodysime matematinės indukcijos metodu pagal skaičių r. Kai $r = 1$ teiginys teisingas. Tarkime, kad kiekvienam j, $1 \leq j < r$, teisinga lygybė:
$$\mathrm{Ker}\,(f-\lambda)^m = \mathrm{Ker}\,(f-\lambda)^{m+j}.$$
Įrodysime, kad $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda)^m = \mathrm{Ker}\,(f-\lambda)^{m+r}$.

Kadangi
$$\text{Ker }(f-\lambda)^m = \text{Ker }(f-\lambda)^{m+r-1} \subset \text{Ker }(f-\lambda)^{m+r},$$
tai, norint įrodyti teiginį, pakanka įrodyti, kad
$$\text{Ker }(f-\lambda)^{m+r} \subset \text{Ker }(f-\lambda)^{m+r-1}.$$

Tarkime, $u \in \text{Ker }(f-\lambda)^{m+r}$, t. y.
$$(f-\lambda)^{m+r}(u) = ((f-\lambda)^{m+r-1} \circ (f-\lambda))(u) = (f-\lambda)^{m+r-1}((f-\lambda)(u)) = O_V.$$
Kaip matome,
$$(f-\lambda)(u) \in \text{Ker }(f-\lambda)^{m+r-1} = \text{Ker }(f-\lambda)^m,$$
t. y.
$$(f-\lambda)^m((f-\lambda)(u)) = (f-\lambda)^{m+1}(u) = O_V.$$
Taigi $u \in \text{Ker }(f-\lambda)^{m+1}$ arba
$$\text{Ker }(f-\lambda)^{m+r} \subset \text{Ker }(f-\lambda)^{m+1} = \text{Ker }(f-\lambda)^m. \quad \triangle$$

2. 3. Tiesinės erdvės V skirtingų tiesinių poerdvių grandinėlė:
$$\{O_V\} \subset \text{Ker }(f-\lambda) \subset \text{Ker }(f-\lambda)^2 \subset \ldots \subset \text{Ker }(f-\lambda)^j \subset \text{Ker }(f-\lambda)^{j+1} \subset \ldots$$
negali būti begalinė, jei tiesinės erdvės V dimensija yra baigtinė. Ilgiausios grandinėlės ilgis gali būti lygus $\dim_k V+1$, t. y. tuo atveju, kai kiekvieno sekančio grandinėlės tiesinio poerdvio dimensija padidėja tik 1. Vadinasi, teisinga lygybė:
$$\text{Ker }(f-\lambda)^n = \text{Ker }(f-\lambda)^{n+1},$$
čia $n = \dim_k V$.

Apibrėžimas. Tegu V – tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ –tiesinis atvaizdis, $\lambda \in k$ – tiesinio atvaizdžio f tikrinė reikšmė. Tiesinės erdvės V tiesinis poerdvis Ker $(f-\lambda)^n$, čia $n = \dim_k V$, yra vadinamas tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdviu, atitinkančiu f tikrinę reikšmę $\lambda \in k$ ir yra žymimas V_λ.

Teiginys. Tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdvis V_λ, atitinkantis f tikrinę reikšmę $\lambda \in k$, yra f-invariantinis, t. y., jei $u \in V_\lambda$, tai ir $f(u) \in V_\lambda$.

Įrodymas. Pirmiausia pastebėsime, kad tiesiniai atvaizdžiai f ir λ id yra perstatomi. Iš tikrųjų, kiekvienam $u \in V$ teisinga lygybė:
$$(f \circ (\lambda \text{ id}))(u) = f(\lambda \text{ id}(u)) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = ((\lambda \text{ id}) \circ f)(u).$$
Kaip matome, $f \circ (\lambda \text{ id}) = (\lambda \text{ id}) \circ f$. Tiesinis atvaizdis f taip pat yra perstatomas pats su savimi. Vadinasi, kiekvienam polinomui $p(t) \in k[t]$ f ir $p(f)$ yra perstatomi.

Tarkime, $u \in V_\lambda$, t. y. $(f-\lambda)^n(u) = O_V$, čia $n = \dim_k V$. Tuomet remdamiesi tuo, kad f ir $(f-\lambda)^n$ yra perstatomi, galime užrašyti lygybę:

$$(f-\lambda)^n(f(u)) = f((f-\lambda)^n(u)) = f(O_V) = O_V.$$

Taigi matome, jei $u \in V_\lambda$, tai ir $f(u) \in V_\lambda$, t. y., iš tikrųjų, V_λ yra f-invariantinis. $\triangle$

3. Tiesinio atvaizdžio matricos kanoninis pavidalas

3. 1. Įrodysime keletą teiginių, analogiškų analizėje vieneto išskaidymui. Analizėje pirmiausia apibrėžiamas integralas lokaliai, t. y. daugdaros taško atvirojoje aplinkoje. Integralo apibrėžimas visoje daugdaroje yra pagrįstas vieneto išskaidymu.

Teiginys. Sakykime, V – tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis, o polinomų $p(t), q(t) \in k[t]$ didžiausias bendrasis daliklis yra lygus 1. Tuomet, jei tiesinės erdvės V vektorius u toks, kad $p(f)(u) = O_V$ ir $q(f)(u) = O_V$, tai ir $u = O_V$.

Įrodymas. Kadangi polinomų $h(t)$ ir $q(t)$ didžiausias bendrasis daliklis yra lygus 1, tai egzistuoja tokie polinomai $a(t), b(t) \in k[t]$, kad

$$a(t)p(t) + b(t)q(t) = 1.$$

Į šią lygybę vietoje kintamojo t įrašę f, gauname

$$a(f)p(f) + b(f)q(f) = \mathrm{id}.$$

Sakykime, $u \in V$ ir $p(f)(u) = O_V$, $q(f)(u) = O_V$. Tuomet

$$u = \mathrm{id}(u) = (a(f)p(f) + b(f)q(f))(u) =$$

$$= (a(f)p(f))(u) + (b(f)q(f))(u) = a(f)(p(f)(u)) + b(f)(q(f)(u)) = O_V. \; \triangle$$

Teiginys. Tarkime, kad V – tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis. Jei polinomai $p(t), q(t) \in k[t]$ tenkina sąlygas:

1. Polinomų $p(t)$ ir $q(t)$ didžiausias bendrasis daliklis yra lygus 1;
2. Į polinomų $p(t)$ ir $q(t)$ sandaugą $p(t)q(t)$ vietoje kintamojo t įrašę tiesinį atvaizdį f, gauname nulinį atvaizdį, t. y. $p(f)q(f) = O$, čia O – nulinis atvaizdis,

tai V yra tiesinės erdvės V tiesinių poerdvių $\mathrm{Ker}\; p(f)$ ir $\mathrm{Ker}\; q(f)$ tiesioginė suma $V = \mathrm{Ker}\; q(f) \oplus \mathrm{Ker}\; p(f)$, t. y. kiekvienas tiesinės erdvės V vektorius u vienareikšmiškai yra užrašomas dviejų vektorių $u_1 \in \mathrm{Ker}\; q(f)$ ir $u_2 \in \mathrm{Ker}\; p(f)$ suma $u = u_1 + u_2$.

Įrodymas. Kadangi polinomų $p(t)$ ir $q(t)$ didžiausias bendrasis daliklis yra lygus 1, tai egzistuoja tokie polinomai $a(t), b(t) \in k[t]$, kad

$$a(t)p(t) + b(t)q(t) = 1.$$

Į šią lygybę vietoje kintamojo t įrašę f, gauname

$$a(f)p(f) + b(f)q(f) = \mathrm{id}.$$

Remdamiesi šia lygybe, galime parašyti: kiekvienam $u \in V$,

$$u = \mathrm{id}(u) = (a(f)p(f) + b(f)q(f))(u) = (a(f)p(f))(u) + (b(f)q(f))(u).$$

Pažymėkime $u_1 =: (a(f)p(f))(u)$ ir $u_2 =: (b(f)q(f))(u)$. Taigi $u = u_1 + u_2$. Kadangi $p(f)q(f) = O$, čia O – nulinis atvaizdis, tai

$$q(f)(u_1) = q(f)(a(f)p(f))(u) = a(f)(q(f)p(f))(u) = O_V,$$

t. y. $u_1 \in \mathrm{Ker}\, q(f)$. Panašiai įrodoma, kad $u_2 \in \mathrm{Ker}\, p(f)$. Vadinasi, $V = \mathrm{Ker}\, q(f) + \mathrm{Ker}\, p(f)$. Lieka įrodyti, kad kiekvienas $u \in V$ vienareikšmiškai užrašomas vektorių $u_1 \in \mathrm{Ker}\, q(f)$ ir $u_2 \in \mathrm{Ker}\, p(f)$ suma $u = u_1 + u_2$. Tuo tikslu pakanka įrodyti, kad

$$\mathrm{Ker}\, q(f) \cap \mathrm{Ker}\, p(f) = \{O_V\}.$$

Jei $v \in \mathrm{Ker}\, q(f) \cap \mathrm{Ker}\, p(f)$, tai $q(f)(v) = O_V$ ir $p(f)(v) = O_V$. Kadangi polinomai $q(t)$ ir $p(t)$ yra tarpusavy pirminiai, tai remdamiesi anksčiau įrodytu teiginiu, gauname $v = O_V$, t. y. $\mathrm{Ker}\, q(f) \cap \mathrm{Ker}\, p(f) = \{O_V\}$. $\triangle$

3. 2. Išvada. Sakykime, V – tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis. Jei polinomai $q_j(t) \in k[t]$, $1 \le j \le s$, tenkina sąlygas:

1. Polinomų $q_i(t)$ ir $q_j(t)$, $i \ne j$, $1 \le i, j \le s$, didžiausias bendrasis daliklis yra lygus 1;

2. Į polinomų $q_j(t)$, $1 \le j \le s$, sandaugą $q_1(t)q_2(t)\ldots q_s(t)$ vietoje kintamojo t įrašę tiesinį atvaizdį f, gauname nulinį atvaizdį, t. y. $q_1(f)q_2(f)\ldots q_s(f) = O$, čia O – nulinis atvaizdis,

tai V yra tiesinės erdvės V tiesinių poerdvių $\mathrm{Ker}\, q_j(f)$, $1 \le j \le s$, tiesioginė suma

$$V = \bigoplus_{j=1}^{s} \mathrm{Ker}\, q_j(f),$$

t. y. kiekvienas tiesinės erdvės V vektorius u vienareikšmiškai yra užrašomas s vektorių $u_j \in \mathrm{Ker}\, q_j(f)$, $1 \le j \le s$, suma

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_s.$$

Įrodymas. Šią išvadą įrodysime matematinės indukcijos metodu.

Tarkime, kad išvada teisinga tuo atveju, kai polinomų yra mažiau nei s, $s > 2$. Įrodysime, kad ši išvada teisinga ir tuo atveju, kai polinomų yra s, $s > 2$.

Tegu $q(t) =: q_1(t)$, $p(t) =: q_2(t)\ldots q_s(t)$. Polinomų $q(t)$ ir $p(t)$ didžiausias bendrasis daliklis yra lygus 1 ir $q(f)p(f) = O$. Remdamiesi įrodytu teiginiu, gauname

$$V = \mathrm{Ker}\, q(f) \oplus \mathrm{Ker}\, p(f).$$

Pažymėkime $L =: \mathrm{Ker}\, p(f)$. Kadangi tiesiniai atvaizdžiai f ir $p(f)$ yra perstatomi, tai L yra tiesinės erdvės V f-invariantinis poerdvis. Pažymėkime $g =: f\big|_L$. Kadangi $L = \mathrm{Ker}\, p(f)$, tai

$p(g) = O$, $O : L \to L$ – nulinis atvaizdis. Be to, polinomų $q_i(t)$ ir $q_j(t)$, $i \neq j$, $2 \leq i, j \leq s$, didžiausias bendrasis daliklis yra lygus 1 ir $p(t) = q_2(t) \dots q_s(t)$. Remdamiesi indukcine prielaida, gauname

$$L = \text{Ker } q_2(g) \oplus \dots \oplus \text{Ker } q_s(g).$$

Lieka pastebėti, kad Ker $q_j(g) =$ Ker $q_j(f)$, $2 \leq j \leq s$. Tai įrodoma taip. Akivaizdu, kad Ker $q_j(g) \subset$ Ker $q_j(f)$, $2 \leq j \leq s$. Kadangi kiekvienam j, $2 \leq j \leq s$,

$$\text{Ker } q_j(f) \subset \text{Ker } (q_2(f) \dots q_s(f)) = \text{Ker } p(f) = L,$$

tai

$$\text{Ker } q_j(f) = \text{Ker } q_j(f) \cap L \subset \text{Ker } q_j(g).$$

Taigi įrodėme, kad

$$V = \text{Ker } q_1(f) \oplus \text{Ker } p(f) = \text{Ker } q_1(f) \oplus \text{Ker } q_2(g) \oplus \dots \oplus \text{Ker } q_s(g) =$$

$$= \text{Ker } q_1(f) \oplus \text{Ker } q_2(f) \oplus \dots \oplus \text{Ker } q_s(f). \quad \triangle$$

3. 3. Sakykime, V – tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis, $\varphi_f(t)$ – tiesinio atvaizdžio charakteringasis polinomas.

Teorema. Jei tiesinio atvaizdžio $f : V \to V$ charakteringasis polinomas $\varphi_f(t) \in k[t]$ yra išskaidomas pirmojo laipsnio polinomų sandauga $\varphi_f(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1}(\lambda_2 - t)^{r_2} \dots (\lambda_s - t)^{r_s}$, čia $\lambda_i \neq \lambda_j$, jei tik $i \neq j$, tai

1. $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$, čia V_{λ_j} – tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdvis, atitinkantis tikrinę reikšmę λ_j, $1 \leq j \leq s$;
2. $V_{\lambda_j} = \text{Ker}(f - \lambda_j)^{r_j}$, $1 \leq j \leq s$;
3. $\dim_k V_{\lambda_j} = r_j$, $1 \leq j \leq s$.

Įrodymas. Polinomai $(\lambda_i - t)^{r_i}$, $(\lambda_j - t)^{r_j}$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq s$, yra tarpusavy pirminiai. Be to, $\varphi_f(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1}(\lambda_2 - t)^{r_2} \dots (\lambda_s - t)^{r_s}$ ir $\varphi_f(f) = O$ (Hamiltono-Keili teorema), čia $O : V \to V$ – nulinis atvaizdis. Taigi polinomai $(\lambda_j - t)^{r_j}$, $1 \leq j \leq s$, tenkina išvados sąlygas. Remdamiesi išvada, galime parašyti:

$$V = \text{Ker } (\lambda_1 - f)^{r_1} \oplus \text{Ker } (\lambda_2 - f)^{r_2} \oplus \dots \oplus \text{Ker } (\lambda_s - f)^{r_s}.$$

Lieka įrodyti, kad kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$,

$$\text{Ker } (\lambda_j - f)^{r_j} = V_{\lambda_j}.$$

Nagrinėkime polinomus $(\lambda_j - t)^n$, $1 \leq j \leq s$, čia $n = \dim_k V$. Kaip žinome, kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$, šaknies poerdvis $V_{\lambda_j} =$ Ker $(\lambda_j - f)^n$. Pakartoję ankstesnius samprotavimus, gauname:

$$V = \text{Ker } (\lambda_1 - f)^n \oplus \text{Ker } (\lambda_2 - f)^n \oplus \dots \oplus \text{Ker } (\lambda_s - f)^n.$$

Kadangi kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$,

$$\text{Ker } (\lambda_j - f)^{r_j} \subset \text{Ker } (\lambda_j - f)^n,$$

tai
$$\text{Ker}\,(\lambda_j - f)^{r_j} = \text{Ker}\,(\lambda_j - f)^n.$$
Taigi įrodėme pirmąjį ir antrąjį teoremos teiginius:
$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$$
ir kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$,
$$V_{\lambda_j} = \text{Ker}(f - \lambda_j)^{r_j}.$$

Lieka įrodyti, kad kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$, $\dim_k V_{\lambda_j} = r_j$.

Kadangi tiesinio atvaizdžio $f : V \to V$ šaknies poerdvis V_{λ_j}, atitinkantis šio atvaizdžio tikrinę reikšmę λ_j, $1 \leq j \leq s$, yra f-invariantinis, tai galime nagrinėti tiesinį atvaizdį $f_j =: f\big|_{V_{\lambda_j}}$, $f_j : V_{\lambda_j} \to V_{\lambda_j}$, $1 \leq j \leq s$. Kadangi kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$,
$$\dim_k V_{\lambda_j} = \deg \varphi_{f_j}(t),$$
tai įrodę, kad kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$, tiesinio atvaizdžio f_j charakteringasis polinomas
$$\varphi_{f_j}(t) = (\lambda_j - t)^{r_j},$$
užbaigtume teoremos įrodymą.

Pastebėsime, kad kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$, λ_j yra tiesinio atvaizdžio $f_j : V_{\lambda_j} \to V_{\lambda_j}$ charakteringojo polinomo $\varphi_{f_j}(t)$ šaknis. Iš tikrųjų, nes kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$, tikrinis vektorius u_j, atitinkantis tiesinio atvaizdžio f tikrinę reikšmę λ_j, priklauso V_{λ_j}. Jei λ_i būtų polinomo $\varphi_{f_j}(t)$ šaknis, čia $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq s$, tai f šaknies poerdviai V_{λ_i} ir V_{λ_j} turėtų nenulinį bendrą tikrinį vektorių, atitinkantį tikrinę reikšmę λ_i. To būti negali, nes tiesinė erdvė V yra tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdvių V_{λ_j}, $1 \leq j \leq s$, tiesioginė suma
$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}.$$
Kadangi
$$\varphi_f(t) = \varphi_{f_1}(t)\varphi_{f_2}(t) \ldots \varphi_{f_s}(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1}(\lambda_2 - t)^{r_2} \ldots (\lambda_s - t)^{r_s},$$
tai kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$, $\varphi_{f_j}(t) = (\lambda_j - t)^{r_j}$. $\triangle$

4. Nilpotenčiojo atvaizdžio matricos kanoninis pavidalas

4. 1. Tegu V – tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis. Jei tiesinio atvaizdžio f charakteringasis polinomas $\varphi_f(t)$ yra išsiskaidomas kintamojo t polinomų žiede $k[t]$ pirmojo laipsnio polinomų sandauga $\varphi_f(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1}(\lambda_2 - t)^{r_2} \ldots (\lambda_s - t)^{r_s}$, tai tiesinė erdvė V yra išskaidoma tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdvių V_{λ_j}, $1 \leq j \leq s$, tiesiogine suma
$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}.$$
Kadangi f šaknies poerdviai V_{λ_j}, $1 \leq j \leq s$, yra f-invariantiniai, tai tiesinis atvaizdis f vienareikšmiškai apibrėžiamas atvaizdžiais $f_j =: f\big|_{V_{\lambda_j}}$, $1 \leq j \leq s$. Šiuo atveju f yra vadinamas

tiesinių atvaizdžių f_j, $1 \leq j \leq s$, tiesiogine suma. Taigi tiesinio atvaizdžio f tyrimą redukavome į tiesinių atvaizdžių f_j, $1 \leq j \leq s$, nagrinėjimą. Tiesiniai atvaizdžiai f_j, $1 \leq j \leq s$, yra paprastesni negu f, nes jų charakteringieji polinomai paprastesni. Tiesinio atvaizdžio f_j charakteringasis polinomas $\varphi_{f_j} = (\lambda_j - t)^{r_j}$, $1 \leq j \leq s$. Todėl dabar nagrinėsime tiesinį atvaizdį $f : V \to V$, kurio charakteringasis polinomas $\varphi_f(t) = (\lambda - t)^r$.

Tarkime, V – tiesinė erdvė virš kūno k, $f : V \to V$ –tiesinis atvaizdis, kurio charakteringasis polinomas $\varphi_f(t) = (\lambda - t)^r$. Tuomet $(\lambda - f)^r = O$, čia $O : V \to V$ – nulinis atvaizdis, $r = \dim_k V$. Kadangi $(\lambda - f)^r = O$, tai egzistuoja toks mažiausias teigiamas sveikasis skaičius p, kad $(\lambda - f)^p = O$, bet $(\lambda - f)^{p-1} \neq O$. Taigi $V = \text{Ker } (\lambda - f)^p$, bet $V \neq \text{Ker } (\lambda - f)^{p-1}$. Nagrinėkime tiesinių poerdvių grandinėlę:

$$V = \text{Ker } (\lambda - f)^p \supset \text{Ker } (\lambda - f)^{p-1} \supset \text{Ker } (\lambda - f)^{p-2} \supset \ldots \supset \text{Ker } (\lambda - f) \supset \{O_V\}.$$

4. 2. Dabar dar suprastinkime žymėjimus. Pažymėkime tiesinį atvaizdį $f - \lambda$ raide g. Tiesinio atvaizdžio g charakteringasis polinomas $\varphi_g(t) = t^r$. Taigi $g^r = O$. Anksčiau užrašyta tiesinių poerdvių grandinėlė dabar atrodys taip:

$$V = \text{Ker } g^p \supset \text{Ker } g^{p-1} \supset \text{Ker } g^{p-2} \supset \ldots \supset \text{Ker } g \supset \{O_V\}.$$

Apibrėžimas. Tiesinis atvaizdis $g : V \to V$, tenkinantis sąlygą $g^r = O$, čia $r = \dim_k V$, yra vadinamas nilpotenčiuoju. Toks mažiausias teigiamas sveikasis skaičius p, kad $g^p = O$ yra vadinamas tiesinio atvaizdžio g nilindeksu.

Sakykime, vektorių šeima $v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1m_1}$ – maksimali tiesiškai nepriklausoma pagal tiesinį poerdvį Ker g^{p-1}.

Teiginys. Vektoriai $g(v_{11}), g(v_{12}), \ldots, g(v_{1m_1})$ priklauso tiesiniam poerdviui Ker g^{p-1} ir yra tiesiškai nepriklausomi pagal tiesinį poerdvį Ker g^{p-2}.

Įrodymas. Akivaizdu, kad vektoriai $g(v_{11}), g(v_{12}), \ldots, g(v_{1m_1})$ priklauso tiesiniam poerdviui Ker g^{p-1}. Sakykime,

$$\alpha_1 g(v_{11}) + \alpha_2 g(v_{12}) + \ldots + \alpha_{m_1} g(v_{1m_1}) \in \text{Ker } g^{p-2}.$$

Tuomet

$$f(\alpha_1 v_{11} + \alpha_2 v_{12} + \ldots + \alpha_{m_1} v_{1m_1}) \in \text{Ker } g^{p-2},$$

t. y.

$$g^{p-1}(\alpha_1 v_{11} + \alpha_2 v_{12} + \ldots + \alpha_{m_1} v_{1m_1}) = O_V.$$

Vadinasi,

$$\alpha_1 v_{11} + \alpha_2 v_{12} + \ldots + \alpha_{m_1} v_{1m_1} \in \text{Ker } g^{p-1}.$$

Kadangi $v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1m_1}$ yrai tiesiškai nepriklausomi pagal tiesinį poerdvį Ker g^{p-1}, tai $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m_1} = 0$. $\triangle$

4. 3. Vektorius

$$g(v_{11}), g(v_{12}), \ldots, g(v_{1m_1}) \in \text{Ker } g^{p-1}$$

papildykime iki maksimalios tiesiškai nepriklausomų vektorių šeimos

$$g(v_{11}), g(v_{12}), \dots, g(v_{1m_1}), v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2m_2} \in \text{Ker } g^{p-1}$$

pagal tiesinį poerdvį Ker g^{p-2}.

Taip ir toliau tęsdami, gauname vektorių šeimą:

$$\begin{array}{cccccccccc}
v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m_1} & & & & & & \\
g(v_{11}) & g(v_{12}) & \dots & g(v_{1m_1}) & v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m_2} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots \\
g^{p-1}(v_{11}) & g^{p-1}(v_{12}) & \dots & g^{p-1}(v_{1m_1}) & g^{p-2}(v_{21}) & g^{p-2}(v_{22}) & \dots & g^{p-2}(v_{2m_2}) & v_{p1} & \dots\ v_{pm_p}
\end{array}$$

Nesunku įsitikinti, kad ši vektorių šeima yra tiesinės erdvės V bazė. Taigi išrinkome tiesinės erdvės V laiptuotą bazę. Akivaizdu, kad tokia bazė nevienareikšmiškai parenkama Šios bazės vektorius įsivaizduokime išdėstytus į eilutę, kai išdėstymas pradedamas nuo pirmojo stulpelio viršaus iki apačios, po to nuo antrojo stulpelio viršaus iki apačios ir t. t.. Šioje bazėje rasime tiesinio atvaizdžio g matricą. Tuo tikslu imkime šios bazės vektorių g vaizdus ir užrašykime šioje bazėje:

$$\begin{array}{ccccccc}
g(v_{11}) & = 0v_{11} & +1g(v_{11}) & +0g^2(v_{11}) & +\dots & +0g^{p-1}(v_{11}) & +\dots \\
g(g(v_{11})) & = 0v_{11} & +0g(v_{11}) & +1g^2(v_{11}) & +\dots & +0g^{p-1}(v_{11}) & +\dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
g(g^{p-1}(v_{11})) & = 0v_{11} & +0g(v_{11}) & +0g^2(v_{11}) & +\dots & +0g^{p-1}(v_{11}) & +\dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
g(v_{1m_1}) & = 0v_{1m_1} & +1g(v_{1m_1}) & +0g^2(v_{1m_1}) & +\dots & +0g^{p-1}(v_{1m_1}) & +\dots \\
g(g(v_{1m_1})) & = 0v_{1m_1} & +0g(v_{1m_1}) & +1g^2(v_{1m_1}) & +\dots & +0g^{p-1}(v_{1m_1}) & +\dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
g(g^{p-1}(v_{1m_1})) & = 0v_{1m_1} & +0g(v_{1m_1}) & +0g^2(v_{1m_1}) & +\dots & +0g^{p-1}(v_{1m_1}) & +\dots \\
g(v_{21}) & = 0v_{21} & +1g(v_{21}) & +0g^2(v_{21}) & +\dots & +0g^{p-2}(v_{21}) & +\dots \\
g(g(v_{21})) & = 0v_{21} & +0g(v_{21}) & +1g^2(v_{21}) & +\dots & +0g^{p-1}(v_{21}) & +\dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
g(g^{p-2}(v_{21})) & = 0v_{21} & +0g(v_{21}) & +0g^2(v_{21}) & +\dots & +0g^{p-2}(v_{21}) & +\dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
g(v_{p1}) & = 0v_{p1} & +0v_{p2} & +0v_{p3} & +\dots & +0v_{pm_p} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
g(v_{pm_p}) & = 0v_{p1} & +0v_{p2} & +0v_{p3} & +\dots & +0v_{pm_p} &
\end{array}$$

Pastebėsime, kad jau antrojo stulpelio bazės vektorių g vaizdus užrašydami bazės vektoriais praleidome dėl vietos stokos pirmojo stulpelio vektorius.

4. 4. Kad galėtume glaustai užrašyti tiesinio atvaizdžio g matricą nagrinėjamojoje bazėje, pažymėkime

$$J_m(\lambda) = m\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right.$$

Apibrėžimas. Matrica $J_m(\lambda)$ yra vadinama m-tos eilės Žordano langeliu, atitinkančiu tikrinę reikšmę λ.

Dabar galime užrašyti tiesinio avaizdžio g nagrinėjamojoje bazėje matricą:

$$\begin{pmatrix} J_p(0) & \dots & O & O & \dots & O & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ O & \dots & J_p(0) & O & \dots & O & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & \dots & O & J_{p-1}(0) & \dots & O & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ O & \dots & O & O & \dots & J_{p-1}(0) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ O & \dots & O & O & \dots & O & \dots & J_1(0) & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ O & \dots & O & O & \dots & O & \dots & \dots & \dots & J_1(0) \end{pmatrix}$$

Šioje matricoje visi Žordano langeliai atitinka tikrinę reikšmę 0, o raide O žymime atitinkamų matmenų nulines matricas. Užrašytoje matricoje p eilės Žordano langelių yra tiek, kiek nagrinėjamojoje laiptuotoje bazėje yra p aukščio stulpelių, t. y. m_1, $p-1$ eilės Žordano langelių yra m_2 ir t. t.. Vadinasi,

$$pm_1 + (p-1)m_2 + \ldots + 2m_{p-1} + 1m_p = r = \dim_k V.$$

4. 5. Skaičiai $m_1, m_2, \ldots, m_p$ yra tiesinio atvaizdžio g invariantai, t. y. priklauso tik nuo nagrinėjamo tiesinio atvaizdžio g ir nepriklauso nuo laiptuotos bazės parinkimo. Įrodysime tai. Tuo tikslu sudarykime lentelę:

$$\begin{array}{llllll} m_1 & & & & = \dim_k \operatorname{Ker} g^p & - \dim_k \operatorname{Ker} g^{p-1} \\ m_1 & +m_2 & & & = \dim_k \operatorname{Ker} g^{p-1} & - \dim_k \operatorname{Ker} g^{p-2} \\ m_1 & +m_2 & +m_3 & & = \dim_k \operatorname{Ker} g^{p-2} & - \dim_k \operatorname{Ker} g^{p-3} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & +m_2 & +m_3 & +\ldots \quad +m_p & = \dim_k \operatorname{Ker} g & \end{array}$$

Kaip matome, skaičiai m_1, m_2, ..., m_p vienareikšmiškai yra išreiškiami tiesinės erdvės V tiesinių poerdvių $\operatorname{Ker} g^j$, $1 \le j \le p$, dimensijomis $\dim_k \operatorname{Ker} g^j$, $1 \le j \le p$. Priminsime, kad kad p – toks mažiausias teigiamas sveikasis skaičius, kad $g^p = O$.

Pratimai.

1. Užrašykite skaičių $m_1, m_2, \ldots, m_p$ išraiškas tiesinės erdvės V tiesinių poerdvių Ker g^j, $1 \leq j \leq p$, dimensijomis $\dim_k \operatorname{Ker} g^j$, $1 \leq j \leq p$.

2. Įrodykite, kad skaičius $m_1+m_2+m_3+\ldots+m_p$ yra lygus tiesinio atvaizdžio g anksčiau užrašytoje matricoje Žordano langelių skaičiui.

Prisiminę, kad $g = f - \lambda$, galime užrašyti tiesinio atvaizdžio f matricą anksčiau nurodytoje šaknies poerdvio V laiptuotoje bazėje:

$$\begin{pmatrix}
J_p(\lambda) & \ldots & O & O & \ldots & O & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
O & \ldots & J_p(\lambda) & O & \ldots & O & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
O & \ldots & O & J_{p-1}(\lambda) & \ldots & O & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
O & \ldots & O & O & \ldots & J_{p-1}(\lambda) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
O & \ldots & O & O & \ldots & O & \ldots & J_1(\lambda) & \ldots & \ldots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
O & \ldots & O & O & \ldots & O & \ldots & \ldots & \ldots & J_1(\lambda)
\end{pmatrix}$$

Kaip matome, šioje matricoje visi Žordano langeliai atitinka tiesinio atvaizdžio f tikrinę reikšmę λ.

4. 6. Dabar galime aptarti bendrąjį atvejį. Jei $f : V \to V$ tiesinis atvaizdis, kurio charakteringasis polinomas

$$\varphi_f(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1}(\lambda_2 - t)^{r_2} \ldots (\lambda_s - t)^{r_s},$$

tai, kaip buvo įrodyta,

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s},$$

čia $V_{\lambda_j} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_j)^{r_j}$, $1 \leq j \leq s$, – tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdviai. Kiekviename šaknies poerdvyje išrinkę anksčiau nurodytu būdu laiptuotą bazę, gauname tiesinės erdvės V bazę. Šioje tiesinės erdvės V bazėje tiesinio atvaizdžio f matrica yra sudaryta iš blokų, išdėstytų matricos įstrižainėje. Kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$, tiesinio atvaizdžio $f_j = f\big|_{V_{\lambda_j}}$ matrica šaknies poerdvio V_{λ_j} laiptuotoje bazėje ir sudaro tiesinio atvaizdžio f matricos bloką B_j. Kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$, blokas B_j yra sudarytas iš Žordano langelių, atitinkančių f tikrinę reikšmę λ_j. Kaip buvo įrodyta, kiekvieno bloko B_j, $1 \leq j \leq s$, Žordano langeliai vienareikšmiškai apibrėžiami, jei juos išdėstyti jų eilių nedidėjimo tvarka. Taip gauta tiesinio atvaizdžio f matrica yra vadinama tiesinio atvaizdžio f kanoninio (arba Žordano) pavidalo matrica. Ši matrica vienareikšmiškai apibrėžiama, jei nekreipiame dėmesio į blokų B_j, $1 \leq j \leq s$, išdėstymo tvarką.

4. 7. Išnagrinėsime keletą pavyzdžių.

Pavyzdžiai.

1. Apibrėžkime tiesinį atvaizdį $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ taip:

$$f((\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)A,$$

čia A yra 4×4 matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tiesinio atvaizdžio f tiesinės erdvės $\mathbb{R}^4$ standartinėje bazėje $e_j = (\delta_{j1},\ \delta_{j2},\ \delta_{j3},\ \delta_{j4})$, $1 \le j \le 4$, matrica yra kaip tik A. Šios matricos charakteringasis polinomas $\varphi_A(t) = t^4 - 16t^3 + 96t^2 - 256t + 256 = (t-4)^4$. Kaip matome, $\mathbb{R}^4$ yra tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdvis, nes f charakteringasis polinomas turi tik vieną šaknį. Vadinasi, tiesinis atvaizdis $g = f - 4$ yra nilpotentusis. Raskime jo nilindeksą. Tuo tikslu matricą $A - 4$ keliame sveikaisiais laipsniais:

$$(A-4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = O.$$

Pasisekė. Matricos $A - 4$ nilindeksas yra lygus 2. Šiuo atveju poerdvių grandinėlė atrodo taip:

$$\mathbb{R}^4 = \text{Ker }(A-4)^2 \supset \text{Ker }(a-4) \supset \{(0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$

Raskime tiesinį poerdvį

$$\text{Ker }(A-4) =: \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A-4) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$

Sąlyga

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A-4) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\}$$

ekvivalenti lygčiai:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Taigi

$$\text{Ker }(A-4) = \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Kadangi $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$, $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker }(A-4) = 3$, tai egzistuoja tik vienas tiesiškai nepriklausomas vektorius $v_1 \in \mathbb{R}^4$ pagal tiesinį poerdvį Ker $(A-4)$. Bet kuris nenulinis vektorius $v_1 \in \mathbb{R}^4$, nepriklausantis Ker $(A-4)$, kaip tik ir tenkina šią sąlygą. Pavyzdžiui, imkime $v_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$. Tuomet

$$v_2 = v_1(A-4) = (1,\ 0,\ 0,\ 0)(A-4) = (1,\ 1,\ -1,\ -1).$$

Kadangi $v_2 \in \text{Ker }(A-4)$, tai parinkime $v_3, v_4 \in \text{Ker }(A-4)$ taip, kad vektoriai v_2, v_3, v_4 būtų tiesiškai nepriklausomi. Pavyzdžiui, vektorius v_3 ir v_4 galime išrinkti tokius:

$$v_3 = (1,\ 0,\ 0,\ -1),\ v_4 = (0,\ 1,\ 0,\ -1).$$

Vektoriai v_1, v_2, v_3, v_4 sudaro tiesinės erdvės $\mathbb{R}^4$ laiptuotą bazę:

$$\begin{array}{ll} v_1 & = (1,\ 0,\ 0,\ 0) \\ v_2 & = (1,\ 1,\ -1,\ -1) \quad v_3 = (1,\ 0,\ 0,\ -1) \quad v_4 = (0,\ 1,\ 0,\ -1) \end{array}.$$

Tiesinės erdvės $\mathbb{R}^4$ laiptuotoje bazėje v_1, v_2, v_3, v_4 tiesinių atvaizdžių g ir f matricos atrodo taip:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Perėjimo matrica T iš bazės e_j, $1 \le j \le 4$ į bazę v_1, v_2, v_3, v_4 yra

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Galite įsitikinti, kad

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Apibrėžkime tiesinį atvaizdį $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ taip:

$$f((\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)A,$$

čia A yra 4×4 matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Šios matricos charakteringasis polinomas $\varphi_A(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = (t-1)^4$. Raskime matricos $A - 1$ nilindeksą.

$$(A-1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = O.$$

Šiuo atveju poerdvių grandinėlė atrodo taip:

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}\ (A-1)^2 \supset \mathrm{Ker}\ (A-1) \supset \{(0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$

Raskime tiesinį poerdvį

$$\text{Ker }(A-1) =: \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A-1) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$

Sąlyga

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A-1) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

ekvivalenti tiesinių lygčių sistemai:

$$\begin{cases} \quad +2\alpha_2 \quad +\alpha_3 \qquad\qquad = 0 \\ \alpha_1 \qquad\qquad\qquad -\alpha_4 \quad = 0 \end{cases}$$

Taigi

$$\text{Ker }(A-1) = \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ -2\alpha_2,\ \alpha_1) \mid \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Kadangi $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$, $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker }(A-1) = 2$, tai egzistuoja tik du tiesiškai nepriklausomas vektoriai $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ pagal tiesinį poerdvį Ker $(A-1)$. Vektoriai

$$(1,\ 0,\ 0,\ 1) \quad \text{ir} \quad (0,\ 1,\ -2,\ 0)$$

sudaro tiesinio poerdvio Ker $(A-1)$ bazę. Parinkime tiesinės erdvės $\mathbb{R}^4$ dar du vektorius taip, kad parinktieji ir užrašytieji tiesinio poerdvio Ker $(A-1)$ bazės vektoriai sudarytų tiesinės erdvės $\mathbb{R}^4$ bazę. Pavyzdžiui, vektoriai $v_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $v_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$ ir užrašytieji tiesinio poerdvio Ker $(A-1)$ bazės vektoriai sudaro tiesinės erdvės $\mathbb{R}^4$ bazę. Vadinasi, v_1 ir v_2 yra tiesiškai nepriklausomi pagal tiesinį poerdvį Ker $(A-1)$. Pažymėkime $v_3 = v_1(A-1)$ ir $v_4 = v_2(A-1)$. Taigi vektoriai v_1, v_2, v_3, v_4 sudaro tiesinio atvaizdžio g (o taip pat ir tiesinio atvaizdžio f) šaknies erdvės $\mathbb{R}^4$ laiptuotą bazę:

$$\begin{array}{llll} v_1 & = (1,\ 0,\ 0,\ 0) & v_2 & = (0,\ 1,\ 0,\ 0) \\ v_3 & = (0,\ 1,\ -2,\ 0) & v_4 & = (2,\ 0,\ 0,\ 2) \end{array}$$

Taigi matricų $A-1$ ir A (o tuo pačiu ir tiesinių atvaizdžių g ir f) kanoniniai (arba Žordano) pavidalai yra:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Perėjimo matrica T iš tiesinės erdvės $\mathbb{R}^4$ standartinės bazės į bazę v_1, v_2, v_3, v_4 yra:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{o} \quad TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Įsitikinkite!

3. Nagrinėkime tiesinį atvaizdį $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, apibrėžtą taip:

$$f((\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)A,$$

čia A yra 4×4 matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Šios matricos charakteringasis polinomas $\varphi_A(t) = t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 = (t-2)^4$. Raskime matricos $A - 2$ nilindeksą.

$$(A-1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricą $A - 2$ pakelkime trečiuoju laipsniu:

$$(A-2)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pagaliau tik

$$(A-2)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Šiuo atveju poerdvių grandinėlė yra tokia:

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}\ (A-2)^4 \supset \mathrm{Ker}\ (A-2)^3 \supset \mathrm{Ker}\ (A-2)^2 \supset \mathrm{Ker}\ (A-2) \supset \{(0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$

Raskime tiesinį poerdvį

$$\mathrm{Ker}\ (A-2)^3 =: \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A-2)^3 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$

Sąlyga

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A-2)^3 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

ekvivalenti tiesiniai lygčiai $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$. Taigi

$$\mathrm{Ker}\ (A-2)^3 = \{(\alpha_1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) \mid \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Kadangi $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\ (A-2)^3 = 3$, tai egzistuoja tik vienas tiesinės erdvės $\mathbb{R}^4$ vektorius tiesiškai nepriklausomas pagal tiesinį poerdvį Ker $(A-2)^3$. Bet kuris vektorius

$v_1 \in \mathbb{R}^4$, nepriklausantis tiesiniam poerdviui Ker $(A-2)^3$, yra tiesiškai nepriklausomas pagal Ker $(A-2)^3$. Parinkime, pavyzdžiui, $v_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$. Tuomet vektoriai v_1, $v_2 = v_1(A-2)$, $v_3 = v_1(A-2)^2$, $v_4 = v_1(A-2)^3$ sudaro tiesinio atvaizdžio f šaknies erdvės $\mathbb{R}^4$ laiptuotą bazę:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ 0) \\ v_2 &= (1,\ 1,\ 0,\ 0) \\ v_3 &= (1,\ 1,\ 1,\ 0) \\ v_4 &= (1,\ 1,\ 1,\ 1) \end{aligned}$$

Šioje bazėje tiesinio atvaizdžio f (arba matricos A) kanoninis pavidalas yra:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Perėjimo matrica T iš tiesinės erdvės $\mathbb{R}^4$ standartinės bazės į laiptuotą bazę yra

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{o} \quad TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Įsitikinkite !

4. Nagrinėkime tiesinį atvaizdį $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, apibrėžtą taip:

$$f((\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)A,$$

čia A yra 4×4 matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Šios matricos charakteringasis polinomas $\varphi_A(t) = t^4 - 8t^2 + 16 = (t^2-4)^2 = (t-2)^2(t+2)^2$. Šiuo aveju tiesinė erdvė $\mathbb{R}^4$ yra tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdvių V_2 ir V_{-2} tiesioginė suma. Kiekvieno šaknies poerdvio dimensija yra lygi 2. Raskime tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdvius.

Tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdvis V_2, atitinkantis f tikrinę reikšę 2.

$$V_2 = \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4) \in \mathbb{R} \,|(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A-2)^2 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$

Raskime matricos $A-2$ kvadratą:

$$(A-2)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 20 & -12 & 20 & -12 \\ 12 & -4 & 12 & -4 \\ 20 & -12 & 20 & -12 \\ 12 & -4 & 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Sąlyga

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A-2)^2 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

ekvivalenti tiesinių lygčių sistemai:

$$\begin{cases} 20\alpha_1 & +12\alpha_2 & +20\alpha_3 & +12\alpha_4 & = 0 \\ -12\alpha_1 & -4\alpha_2 & -12\alpha_3 & -4\alpha_4 & = 0 \end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname:

$$V_2 = \mathrm{Ker}\ (A-2)^2 = \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ -\alpha_1,\ -\alpha_2) \mid \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Šaknies poerdvyje V_2 tiesinių poerdvių grandinėlė atrodo taip:

$$V_2 = \mathrm{Ker}\ (A-2)^2 \supset \mathrm{Ker}\ (A-2) \supset \{(0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$

Raskime

$$\mathrm{Ker}\ (A-2) = \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4) \in \mathbb{R}\ |(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A-2) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$

Sąlyga

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A-2) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$

ekvivalenti tiesinių lygčių sistemai:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 & & -5\alpha_3 & -3\alpha_4 & = 0 \\ & -2\alpha_2 & +3\alpha_3 & +\alpha_4 & = 0 \\ -5\alpha_1 & -3\alpha_2 & -2\alpha_3 & & = 0 \\ 3\alpha_1 & +\alpha_2 & & -2\alpha_4 & = 0 \end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname:

$$\mathrm{Ker}\ (A-2) = \{(\alpha,\ -\alpha,\ -\alpha,\ \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Parinkime vektorių $v_1 \in V_2$ tokį, kad $v_1 \notin \mathrm{Ker}\ (A-2)$. Pavyzdžiui, tegu $v_1 = (1,\ 0,\ -1,\ 0)$. Tuomet vektoriai $v_1 = (1,\ 0,\ -1,\ 0)$ ir $v_2 = v_1(A-2) = (3,\ -3,\ -3,\ 3)$ sudaro tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdvio V_2 laiptuotą bazę. Taigi tiesinio atvaizdžio $f\big|_{V_2}$ matrica šioje bazėje yra tokia:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdvis V_{-2}, atitinkantis f tikrinę reikšę -2.

$$V_{-2} = \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4) \in \mathbb{R}\ |(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A+2)^2 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$

Raskime matricos $A+2$ kvadratą:

$$(A+2)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 20 & -12 & -20 & 12 \\ 12 & -4 & -12 & 4 \\ -20 & 12 & 20 & -12 \\ -12 & 4 & 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Sąlyga
$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A-2)^2 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$
ekvivalenti tiesinių lygčių sistemai:
$$\begin{cases} 20\alpha_1 & +12\alpha_2 & -20\alpha_3 & -12\alpha_4 & = 0 \\ -12\alpha_1 & -4\alpha_2 & +12\alpha_3 & +4\alpha_4 & = 0 \end{cases}$$
Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname:
$$V_2 = \text{Ker } (A-2)^2 = \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2) \mid \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$
Šaknies poerdvyje V_2 tiesinių poerdvių grandinėlė atrodo taip:
$$V_2 = \text{Ker } (A+2)^2 \supset \text{Ker } (A+2) \supset \{(0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$
Raskime
$$\text{Ker } (A+2) = \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4) \in \mathbb{R}\ |(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A-2) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$
Sąlyga
$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)(A+2) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\}.$$
ekvivalenti tiesinių lygčių sistemai:
$$\begin{cases} 2\alpha_1 & & -5\alpha_3 & -3\alpha_4 & = 0 \\ & 2\alpha_2 & +3\alpha_3 & +\alpha_4 & = 0 \\ -5\alpha_1 & -3\alpha_2 & +2\alpha_3 & & = 0 \\ 3\alpha_1 & +\alpha_2 & & +2\alpha_4 & = 0 \end{cases}$$
Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname:
$$\text{Ker } (A+2) = \{(\alpha,\ -\alpha,\ \alpha,\ -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$
Parinkime vektorių $v_3 \in V_{-2}$ tokį, kad $v_3 \notin \text{Ker } (A+2)$. Imkime, pavyzdžiui, $v_3 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$. Tuomet vektoriai $v_3 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$ ir $v_4 = v_3(A+2) = (-3,\ 3,\ -3,\ 3)$ sudaro tiesinio atvaizdžio f šaknies poerdvio V_{-2} laiptuotą bazę. Taigi tiesinio atvaizdžio $f\big|_{V_{-2}}$ matrica šioje bazėje yra tokia:
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
Tiesinio atvaizdžio f matrica tiesinės erdvės $\mathbb{R}^4$ bazėje
$$\begin{array}{llll} v_1 & = (1,\ 0,\ -1,\ 0) & v_3 & = (1,\ 0,\ 1,\ 0) \\ v_2 & = (3,\ -3,\ -3,\ 3) & v_4 & = (-3,\ 3,\ -3,\ 3) \end{array}$$

yra tokia:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Funkcijos, kurių argumentai yra matricos

5. 1. Gali iškilti klausimas, o kam gi reikalingas tiesinio atvaizdžio matricos ar matricos kanoninis pavidalas? Atsakymas gana paprastas: su matrica kanoniniame pavidale lengviau operuoti. Pavyzdžiui, kaip rasti

$$e^A = \exp(A) =: \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j,$$

čia A – n-tos eilės kvadratinė matrica? Pailiustruosime paprastu pavyzdžiu, kaip rasti $\exp(A)$. Tegu, pavyzdžiui,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pabandykite tiesiogiai suskaičiuoti

$$e^A = \exp \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tai nelengva būtų padaryti. O suskaičiuoti galima.

15. 2. Matricos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

chakteringasis polinomas $\varphi_A(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$. Koks matricos $A - 2$ nilindeksas?

$$(A-2)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Apibrėžkime tiesinį atvaizdį $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ taip:

$$f((\alpha_1,\ \alpha_2)) = (\alpha_1,\ \alpha_2)A,\ (\alpha_1,\ \alpha_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Užrašykime tiesinės erdvės $\mathbb{R}^2$ tiesinių poerdvių seką:

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}\ (A-2)^2 \supset \mathrm{Ker}\ (A-2).$$

Raskime tiesinį poerdvį

$$\mathrm{Ker}\ (A-2) = \{(\alpha_1,\ \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (\alpha_1,\ \alpha_2)(A-2) = (0\ 0)\}.$$

Sąlyga $(\alpha_1,\ \alpha_2)(A-2) = (0\ 0)$ ekvivalenti lygčiai:

$$3\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Taigi

$$\mathrm{Ker}\ (A-2) = \{(\alpha,\ -3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Galime išrinkti tiesinės erdvės $\mathbb{R}^2$ laiptuotą bazę: $v_1 = (1,\ 0)$ ir $v_2 = v_1(A-2) = (-3,\ 9)$. Perėjimo matrica iš tiesinės erdvės $\mathbb{R}^2$ standartinės bazės į laiptuotą bazę yra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ši matrica nepatinka, nes jos determinantas yra lygus 9. Galime laiptuotą bazę išrinkti ir kitą: $u_1 = (2,\ -5)$, $u_2 = u_1(A-2) = (-1,\ 3)$. Šiuo atveju perėjimo matrica iš tiesinės erdvės $\mathbb{R}^2$ standartinės bazės į naują laiptuotą bazę yra

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kaip žinome,

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{arba} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dabar rasti matricos A bet kurį teigiamą sveikąjį laipsnį A^j, $j \geq 0$, nesudėtinga.

$$A^j = \left(\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right)^j =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^j\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^j & j2^j \\ 0 & 2^j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Taigi

$$e^A = \exp A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^j & j2^j \\ 0 & 2^j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\begin{pmatrix} 2^j & j2^j \\ 0 & 2^j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = e^2\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Panašiai galima rasti e^{tA}:

$$e^{tA} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-3t & 9t \\ -t & 1+3t \end{pmatrix}.$$

Galima apibrėžti $\sin A$, $\cos A$ ir kitų funkcijų reikšmes, kai funkcijos argumentas yra matrica.

Pratimai.

1. Pakelkite n-uoju laipsniu matricą A:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Nuoroda. Matricą A užrašykite pavidalu: $A = \lambda \mathbf{1}_3 + U$, čia

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tuomet matricą A keldami n-uoju laipsniu $A^n = (\lambda \mathbf{1}_3 + U)^n$ galite pasinaudoti Niutono binomo formule, nes matricos $\mathbf{1}_3$ ir U yra perstatomos. Be to, pastebėkite, kad $U^3 = O$.

2. Raskite e^{tA}, $\sin(tA)$, $\cos(tA)$, čia matrica tokia pat, kaip ir pirmajame pavyzdyje.

3. Tarkime, kad matricos

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

tikrinė reikšmė λ tenkina sąlygą: $|\lambda| < 1$. Tuomet $\ln(\mathbf{1}_2 + A)$ galima apibrėžti kaip eilutę:

$$\ln(\mathbf{1}_2 + A) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} A^j}{j}.$$

Įrodykite, kad ši eilutė konverguoja. Raskite matricos $\ln(\mathbf{1}_2 + A)$ išraišką.