VIII skyrius. DUALUMAS

1. Tiesinės erdvės dualioji erdvė

1. 1. Tarkime, kad V ir W – tiesinės erdvės virš kūno k. Atvaizdis $f : V \to W$ yra vadinamas tiesiniu, jei bet kuriems $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, $v_1, v_2 \in V$,

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2).$$

Norint nusakyti tiesinį atvaizdį $f : V \to W$, pakanka nurodyti tiesinės erdvės V kurios nors bazės v_1, v_2, ..., v_n vektorių vaizdus $f(v_1)$, $f(v_2)$, ..., $f(v_n) \in W$. Jei $v \in V$, $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ – vektoriaus v išraiška bazės vektoriais, tai vektoriaus v vaizdas $f(v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(v_j)$ apibrėžiamas vienareikšmiškai, nes vektoriaus v koordinatės α_j, $1 \le j \le n$, vienareikšmiškai nusakomos bazėje v_j, $1 \le j \le n$.

Visų tiesinių atvaizdžių $f : V \to W$ aibėje $L_k(V;W)$ (kuri yra žymima ir $\mathrm{Hom}_k(V,W)$) apibrėžiama tiesinių atvaizdžių sudėtis ir tiesinių atvaizdžių daugyba iš kūno k elementų:

1. Jei $f, g \in L_k(V;W)$, tai $(f+g)(v) =: f(v) + g(v)$, $v \in V$;
2. Jei $\alpha \in k$, $f \in L_k(V;W)$, tai $(\alpha f)(v) =: \alpha f(v)$, $v \in V$.

$L_k(V;W$ yra tiesinė erdvė virš kūno k, $\dim_k L_k(V;W) = \dim_k V \dim_k W$. Dabar nagrinėsime sąsają tarp tiesinių erdvių V ir $L_k(V;k)$, t. y., kai $W = (k,+)$ yra vienmatė tiesinė erdvė virš kūno k.

Apibrėžimas. Tiesinė erdvė $L_k(V;k)$ yra žymima V^* ir yra vadinama tiesinės erdvės V dualiąja erdve. Tiesiniai atvaizdžiai $f : V \to k$ (t. y. tiesinės erdvės V^* elementai) yra vadinami tiesinės erdvės V^* vektoriais arba tiesinėmis formomis, apibrėžtomis tiesinėje erdvėje V.

1. 2. Su kiekviena tiesinės erdvės V baze v_1, v_2, ..., v_n galima susieti dualios erdvės V^* bazę v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*, vadinamą bazės v_1, v_2, ..., v_n dualiąja baze. Kaip žinome, norint apibrėžti tiesinę formą $v^* : V \to k$, pakanka nurodyti tiesinės formos v^* reikšmes tiesinės erdvės V bazės v_1, v_2, ..., v_n vektoriuose. Tiesines formas v_j^*, $1 \le j \le n$, apibrėžkime taip:

$$v_j^*(v_s) = \delta_{js} = \begin{cases} 1, & \text{jei } j = s \\ 0, & \text{jei } j \ne s \end{cases}, \ 1 \le j, s \le n.$$

Teiginys. Tiesinės formos v_1^*, v_2^*, ..., v_n^* sudaro tiesinės erdvės V^* bazę.

Įrodymas. Pirmiausia įrodysime, kad v_1^*, v_2^*, ..., v_n^* yra tiesiškai nepriklausomi tiesinės erdvės V^* vektoriai. Tuo tikslu sudarykime vektorių v_1^*, v_2^*, ..., v_n^* tiesinę kombinaciją $\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* + \ldots + \alpha_n v_n^*$, palyginkime ją tiesinės erdvės V^* nuliniam vektoriui O_{V^*}:

$$\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* + \ldots + \alpha_n v_n^* = O_{V^*}$$

(kiekvienam $v \in V$, $O_{V^*}(v) = 0$) ir įsitikinkime, kad visi koeficientai $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yra lygūs kūno k nuliniam elementui 0. Tiesinės formos $\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* + \ldots + \alpha_n v_n^*$ reikšmė vektoriuje v_s yra lygi

$$(\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* + \ldots + \alpha_n v_n^*)(v_s) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j^*(v_s) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{js} = \alpha_s = 0, \ 1 \le s \le n,$$

nes kiekvienam v_s, $1 \leq s \leq n$, $O_{V^*}(v_s) = 0$. Kaip matome, vektoriai v_1^*, v_2^*, ..., v_n^* yra tiesiškai nepriklausomi.

Lieka įrodyti, kad kiekvienas tiesinės erdvės V^* vektorius $f : V \to k$ yra tiesiškai išreiškiamas vektoriais. Tarkime, kad $f(v_s) = \beta_s$, $1 \leq s \leq n$. Įrodysime, kad

$$f = \beta_1 v_1^* + \beta_2 v_2^* + \ldots + \beta_n v_n^*.$$

Norint įrodyti šią lygybę, pakanka įrodyti, kad kiekvienam v_s, $1 \leq s \leq n$,

$$f(v_s) = (\beta_1 v_1^* + \beta_2 v_2^* + \ldots + \beta_n v_n^*)(v_s).$$

Bet tai akivaizdu, nes $f(v_s) = \beta_s$, o taip pat ir

$$(\beta_1 v_1^* + \beta_2 v_2^* + \ldots + \beta_n v_n^*)(v_s) = \beta_s, \ 1 \leq s \leq n.$$

Pastaba. Ir vėl matome, kad $\dim_k V = \dim_k V^*$ (tai galima gauti ir remiantis lygybe $\dim_k V^* = \dim_k L(V; k) = \dim_k V \dim_k k = \dim_k V$).

1. 3. Sakykime, kad $v^* \in V^*$. Atvaizdžio $v^* : V \to k$ reikšmė vektoriuje v paprastai yra žymima $v^*(v)$. Sutarkime tiesinių formų atveju vietoje $v^*(v)$ rašyti $\langle v, \ v^* \rangle$ ir $\langle \ , \ \rangle$ interpretuoti kaip atvaizdį:

$$\langle \ , \ \rangle : V \times V^* \to k, \ (v, \ v^*) \mapsto \langle v, \ v^* \rangle = v^*(v).$$

Atvaizdis $\langle \ , \ \rangle : V \times V^* \to k$ turi šias savybes: bet kuriems $v_1, v_2, v \in V$, $v_1^*, v_2^*, v^* \in V^*$, $\alpha \in k$,

1. $\langle v_1 + v_2, \ v^* \rangle = \langle v_1, \ v^* \rangle + \langle v_2, \ v^* \rangle$;
2. $\langle \alpha v, \ v^* \rangle = \alpha \langle v, \ v^* \rangle$;
3. $\langle v, \ v_1^* + v_2^* \rangle = \langle v, \ v_1^* \rangle + \langle v, \ v_2^* \rangle$;
4. $\langle v, \ \alpha v^* \rangle = \alpha \langle v, \ v^* \rangle$.
5. Jei kiekvienam $v \in V$, $\langle v, \ v^* \rangle = 0$, tai $v^* = O_{V^*}$;
6. Jei kiekvienam $v^* \in V^*$, $\langle v, \ v^* \rangle = 0$, tai $v = O_V$.

Pirmosios dvi atvaizdžio $\langle \ , \ \rangle$ savybės yra gaunamos remiantis tuo, kad atvaizdis v^* yra tiesinis. 3 – 4 atvaizdžio $\langle \ , \ \rangle$ savybės yra ekvivalenčios tiesinių atvaizdžių sudėties ir tiesinių atvaizdžių daugybos iš kūno k elementų apibrėžimams. Penktoji atvaizdžio $\langle \ , \ \rangle$ savybė yra ekvivalenti nulinio tiesinio atvaizdžio apibrėžimui. 6-ąją atvaizdžio $\langle \ , \ \rangle$ savybę galima įrodyti taip. Prisiminkime, kad tiesinis atvaizdis $v^* : V \to k$ vienareikšmiškai apibrėžiamas nurodant tiesinės erdvės V kurios nors bazės vektorių vaizdus. Jei būtų $v \neq O_V$, tai išrinktume tokią tiesinės erdvės V bazę, kuriai priklausytų vektorius v. Tuomet egzistuotų toks $v^* \in V^*$, kad $\langle v, \ v^* \rangle = v^*(v) = 1$, o kituose išrinktos bazės vektoriuose tiesinio atvaizdžio v^* reikšmė būtų lygi 0. Tai prieštarautų 6-osios atvaizdžio $\langle \ , \ \rangle$ savybės prielaidai.

1. 4. Atvaizdis $\langle \ , \ \rangle : V \times V^* \to k$ tiesines erdves V ir V^* vieną kitos atžvilgiu daro lygiavertėmis. Šį teiginį patvirtina ir tas faktas, kad tiesines erdves V ir $(V^*)^* = V^{**}$

kanoniniu būdu galima sutapatinti. Iš tikrųjų. Kiekvienam vektoriui $v \in V$ priskirkime tiesinį atvaizdį

$$\varphi_v : V^* \to k,\ \varphi_v(v^*) =: \langle v,\ v^* \rangle,\ v^* \in V^*.$$

Remdamiesi atvaizdžio $\langle\ ,\ \rangle$ 3 – 4 savybėmis, matome, kad $\varphi_v : V^* \to k$ yra tiesinis atvaizdis. Remdamiesi atvaizdžio $\langle\ ,\ \rangle$ 1 – 2 savybėmis, matome, kad atvaizdis

$$\varphi : V \to V^{**},\ v \mapsto \varphi_v,\ v \in V,$$

yra tiesinis. Remdamiesi atvaizdžio $\langle\ ,\ \rangle$ 6-ąja savybe, matome, kad $\varphi : V \to V^{**}$ yra injektyvus atvaizdis. Kadangi $\dim_k V = \dim_k V^* = \dim_k V^{**}$, tai gauname, kad $\varphi : V \to V^{**}$ yra tiesinė bijekcija.

2. Ortogonalumas

2. 1. Apibrėžimas. Vektoriai $v \in V$ ir $v^* \in V^*$ yra vadinami ortogonaliais, jei $\langle v,\ v^* \rangle = 0$ ir yra žymima $v \perp v^*$.

Sakykime, L – tiesinės erdvės V virš kūno k tiesinis poerdvis. Apibrėžkime tiesinės erdvės V^* poaibį

$$L^{\perp} =: \{v^* \in V^* |\ \langle v,\ v^* \rangle = 0, v \in L\}.$$

Teiginys. $L^{\perp}$ yra tiesinės erdvės V^* tiesinis poerdvis. $\dim_L^{\perp} = \dim_k V - \dim_k L$.

Įrodymas. Tarkime, kad $v_1^*, v_2^* \in L^{\perp}$. Tuomet kiekvienam $v \in L$ ir bet kuriems $\alpha_1, \alpha_2 \in k$,

$$\langle v,\ \alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* \rangle = \alpha_1 \langle v,\ v_1^* \rangle + \alpha_2 \langle v,\ v_2^* \rangle = 0.$$

Kaip matome, $L^{\perp}$ yra tiesinės erdvės V^* tiesinis poerdvis. Lieka įrodyti, kad $\dim_L^{\perp} = \dim_k V - \dim_k L$.

Išrinkime tiesinio poerdvio L bazę $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_r$ ir papildykime iki tiesinės erdvės V bazės $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_r,\ v_{r+1},\ \ldots,\ v_n$. Nagrinėkime tiesinės erdvės V^* bazę $v_1^*,\ v_2^*,\ \ldots,\ v_r^*,\ v_{r+1}^*,\ \ldots,\ v_n^*$, dualią tiesinės erdvės V bazei $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_r,\ v_{r+1},\ \ldots,\ v_n$. Akivaizdu, kad vektoriai $v_{r+1}^*, \ldots, v_n^*$ priklauso tiesiniam poerdviui $L^{\perp}$, nes kiekvienas vektorius v_j^*, $r+1 \le j \le n$, yra ortogonalus tiesinio poerdvio L bazės vektoriams $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_r$, t. y. $\langle v_i,\ v_j^* \rangle = 0$, $1 \le i \le r$, $r+1 \le j \le n$. Įrodysime, kad kiekvienas tiesinio poerdvio $L^{\perp}$ vektorius v^* yra tiesiškai išreiškiamas vektoriais $v_{r+1}^*,\ \ldots,\ v_n^*$.

Sakykime, kad vektorius $v^* \in L^{\perp}$ tiesinės erdvės V^* bazės vektoriais $v_1^*,\ v_2^*,\ \ldots,\ v_r^*,\ v_{r+1}^*,\ \ldots,\ v_n^*$ užrašomas taip:

$$v^* = \alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* + \ldots + \alpha_r v_r^* + \alpha_{r+1} v_{r+1}^* + \ldots + \alpha_n v_n^*.$$

Kadangi $v^* \in L^{\perp}$, tai kiekvienam i, $1 \le i \le r$, $\alpha_i = \langle v_i,\ v^* \rangle = 0$. Vadinasi, $v^* = \alpha_{r+1} v_{r+1}^* + \ldots + \alpha_n v_n^*$. $\triangle$

Kadangi tiesinės erdvės V ir V^* viena kitos atžvilgiu vaidina lygiavertį vaidmenį, tai kiekvienam tiesinės erdvės V^* poerdviui U galima apibrėžti $U^{\perp} =: \{v \in V |\ \langle v,\ v^* \rangle = 0, v^* \in U\}$. $U^{\perp}$ yra tiesinės erdvės V tiesinis poerdvis ir, be to, $\dim_k U^{\perp} = \dim_k V^* - \dim_k U$.

Teiginys. Atvaizdis, kuriuo remiantis kiekvienam tiesinės erdvės V tiesiniam poerdviui L yra priskiriamas tiesinės erdvės V^* tiesinis poerdvis $L^\perp$, yra bijekcija tarp tiesinės erdvės V visų tiesinių poerdvių aibės ir tiesinės erdvės V^* visų tiesinių poerdvių aibės.

Įrodymas. Akivaizdu, kad kiekvienam tiesinės erdvės V tiesiniam poerdviui L yra teisinga lygybė $(L^\perp)^\perp = L$.

Pratimai.

Sakykime, L_1, L_2 yra tiesinės erdvės V tiesiniai poerdviai. Įrodykite:

1. $L_1 \subset L_2$ tada ir tik tada, kai $L_1^\perp \supset L_2^\perp$;

2. $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$;

3. $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$.

2. 2. Sakykime, L yra tiesinės erdvės V virš kūno k tiesinis poerdvis, V^* – tiesinės erdvės V duali erdvė. Egzistuoja svarbūs ryšiai tarp tiesinių erdvių L, L^*, $L^\perp$, $(L^\perp)^*$, V/L, $(V/L)^*$, $V^*/L^\perp$, $(V^*/L^\perp)^*$.

Teiginys. Egzistuoja kanoninės tiesinės bijekcijos:

$$1.\ L^* \simeq V^*/L^\perp;\ \ 2.\ (V/L)^* \simeq L^\perp.$$

Dualiai:

$$3.\ L \simeq (V^*/L^\perp)^*;\ \ 4.\ V/L) \simeq (L^\perp)^*.$$

Įrodymas. 1. Tiesinė erdvė L^* yra sudaryta iš tiesinių formų $f : L \to k$. Kiekvieną tiesinį atvaizdį $f : L \to k$ galima pratęsti iki tiesinio atvaizdžio $\bar{f} : V \to k$ ir, savaime suprantama, ne vieninteliu būdu. Sakykime, $g_1, g_2 \in V^*$ tokie, kad $g_1\big|_L = g_2\big|_L = f$. Tuomet $g_1 - g_2 \in L^\perp$, nes kiekvienam $v \in L$, $(g_1 - g_2)(v) = f(v) - f(v) = 0$. Vadinasi, kiekvienai tiesinei formai $f : L \to k$ galime priskirti faktorerdvės $V^*/L^\perp$ vektorių $\bar{f} + L^\perp$, čia $\bar{f}\big|_L = f$. Įsitikinsime, kad atvaizdis $L^* \to V^*/L^\perp$,

$$f \mapsto \bar{f} + L^\perp,\ \ f \in L^*,\ \ \bar{f} \in V^*,\ \ \bar{f}\big|_L = f,$$

yra tiesinis.

Sutarkime $\bar{f} : V \to k$ žymėti tokį tiesinį atvaizdį, kurio siaurinys $\bar{f}\big|_L$ iki tiesinės erdvės V tiesinio poerdvio L sutaptų su tiesiniu atvaizdžiu $f : L \to k$.

Sakykime, $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, $f_1, f_2 \in L^*$, o $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in V^*$ tokie, kad $\bar{f}_1\big|_L = f_1$, $\bar{f}_2\big|_L = f_2$. Tuomet

$$\overline{(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)}\big|_L = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = (\alpha_1 \bar{f}_1)\big|_L + (\alpha_2 \bar{f}_2)\big|_L,$$

t. y.

$$\overline{(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)} - \alpha_1 \bar{f}_1 - \alpha_2 \bar{f}_2 \in L^\perp.$$

Vadinasi, $\overline{(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)} \in \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 + L^\perp$ arba $\overline{(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)} + L^\perp = \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 + L^\perp$.

Tiesinis atvaizdis $L^* \to V^*/L^\perp$,

$$f \mapsto \bar{f} + L^\perp,\ \ f \in L^*,\ \ \bar{f} \in V^*,\ \ \bar{f}\big|_L = f,$$

yra injektyvus. Norint įrodyti, kad šis atvaizdis yra tiesinė bijekcija, pakanka įrodyti, kad tiesinių erdvių L^* ir $V^*/L^\perp$ dimensijos yra lygios. Bet tai akivaizdu, kadangi

$$\dim_k V^*/L^\perp = \dim_k V^* - \dim_k L^\perp = \dim_k V^* - (\dim_k V - \dim_k L) = \dim_k L = \dim_k L^*.$$

2. To fakto, kad $(V/L)^* \simeq L^\perp$, įrodymas visiškai paprastas. Iš tikrųjų. Kiekvienas tiesinis atvaizdis $f : V/L \to k$ yra toks tiesinis atvaizdis $f : V \to k$, kuriuo remiantis kiekvienam tiesinio poerdvio L vektoriui yra priskiriamas kūno k nulis 0, kitaip tariant, yra poerdvio $L^\perp$ elementas. Kadangi $\dim_k V/L = \dim_k V - \dim_k L = \dim_k L^\perp$, tai įrodymas baigtas.

Dualūs teiginiai akivaizdūs. Reikia pakeisti tiesinę erdvę V tiesine erdve V^*, L – tiesiniu poerdviu $L^\perp$ ir pasinaudoti įrodytais teiginiais.

Pratimas. Sakykime, V_1, V_2 – tiesinės erdvės virš kūno k. Įrodykite, kad $(V_1 \oplus V_2)^* \simeq V_1^* \oplus V_2^*$.

2. 3. Dabar nagrinėsime vietoje dvitiesinio atvaizdžio $\langle\ ,\ \rangle : V \times V^* \to k$ dvitiesinį atvaizdį $F(\ ,\ ) : V \times W \to k$. Tai bendresnis atvejis.

Apibrėžimas. Sakykime, V ir W – tiesinės erdvės virš kūno k. Atvaizdis

$$F(\ ,\ ) : V \times W \to k$$

yra vadinamas dvitiesiniu, jei bet kuriems $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$,

1. $F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2,\ w) = \alpha_1 F(v_1,\ w) + \alpha_2 F(v_2,\ w)$;
2. $F(v,\ \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 F(v,\ w_1) + \alpha_2 F(v,\ w_2)$.

Pastaba. Sakykime, $F(\ ,\ ) : V \times W \to k$ yra dvitiesinis atvaizdis. Šiuo atveju kiekvienam $v \in V$ gauname tiesinį atvaizdį $F(v,\ ) : W \to k$. Iš tikrųjų, kiekvienam fiksuotam v, $v \in V$, $F(v,\ )$ yra tiesinis pagal laisvąjį argumentą. Panašiai, kiekvienam $w \in W$ gauname tiesinį atvaizdį $F(\ , w) : V \to k$.

Apibrėžimas. Dvitiesinis atvaizdis $F(\ ,\ ) : V \times W \to k$ yra vadinamas neišsigimusiu iš kairės, jei iš sąlygos: kiekvienam $w \in W$, $F(v,\ w) = 0$, gauname $v = O_V$.

Dvitiesinis atvaizdis $F(\ ,\ ) : V \times W \to k$ yra vadinamas neišsigimusiu iš dešinės, jei iš sąlygos: kiekvienam $v \in V$, $F(v,\ w) = 0$, gauname $w = O_W$.

Apibrėžimas. Dvitiesinis atvaizdis $F(\ ,\ ) : V \times W \to k$ yra vadinamas tiesinių erdvių V ir W poriniu, jei jis yra neišsigimęs iš kairės ir iš dešinės.

Pavyzdžiai.

1. Dvitiesinis atvaizdis $\langle\ ,\ \rangle : V \times V^* \to k$,

$$(v, v^*) \mapsto \langle v,\ v^* \rangle = v^*(v),\ v \in V,\ v^* \in V^*,$$

yra tiesinių erdvių V ir V^* porinys.

2. Dvitiesinis atvaizdis

$$\langle\ ,\ \rangle : k^n \times k^n \to k,$$

$$((\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)) \mapsto \langle(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),\ (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\rangle =: \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\beta_j,$$

$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n) \in k^n$, yra tiesinių erdvių k^n ir k^n porinys.

Teiginys. Sakykime, $F(\ ,\ ) : V \times W \to k$ yra tiesinių erdvių V ir W porinys. Tuomet egzistuoja tokia tiesinė bijekcija $\varphi_F : W \to V^*$, kad

$$\langle v, \varphi_F(w)\rangle = F(v,w),\ v \in V,\ w \in W.$$

Kitaip tariant, atvaizdžių diagrama

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\varphi_F} & V \times V^* \\ F(\ ,\ ) \searrow & & \swarrow \langle\ ,\ \rangle \\ & k & \end{array}$$

yra komutatyvi: $\langle\ ,\ \rangle \circ (\mathrm{id} \times \varphi_F) = F(\ ,\ )$.

Įrodymas. Apibrėžkime atvaizdį $\varphi_F : W \to V^*$ taip: kiekvienam $w \in W$, $\varphi_F(w) =: F(\ ,w)$, čia $F(\ ,w) : V \to k$, kaip žinome, yra tiesinis atvaizdis. Taigi bet kuriems $v \in V$, $w \in W$, $\langle v, \varphi_F(w)\rangle = F(v,w)$.

Atvaizdis $\varphi_F : W \to V^*$ yra tiesinis. Iš tikrųjų, bet kuriems $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, $w_1, w_2 \in W$,

$$\varphi_F(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = F(\ ,\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) =$$

$$= \alpha_1 F(\ ,w_1) + \alpha_2 F(\ ,w_2) = \alpha_1\varphi_F(w_1) + \alpha_2\varphi_F(w_2),$$

nes $F(\ ,\ )$ yra tiesinis pagal antrąjį argumentą.

Įrodysime, kad $\mathrm{Ker}\varphi_F = \{O_W\}$. Tarkime, kad $\varphi_F(w)$ yra nulinė forma, apibrėžta erdvėje V, t. y. kiekvienam $v \in V$, $\langle v, \varphi_F(w)\rangle = F(v,w) = 0$. Kadangi dvitiesinis atvaizdis $F(\ ,\ )$ neišsigimęs iš dešinės, tai $w = O_W$.

Lieka įrodyti, kad $\varphi_F(W) = V^*$. Sakykime, kad $\varphi_F(W) \neq V^*$. Tuomet $\varphi_F(W)^\perp \subset V$ ir $\varphi_F(W)^\perp \neq \{O_V\}$. Išrinkime $v \in \varphi_F(W)^\perp$, $v \neq O_V$. Tuomet kiekvienam $w \in W$, $\langle v, \varphi_F(w)\rangle = F(v,w) = 0$. Kadangi dvitiesinis atvaizdis $F(\ ,\ )$ neišsigimęs iš kairės, tai v turi būti nulinis vektorius. Gavome prieštarą. Vadinasi, prielaida $\varphi_F(W) \neq V^*$ negalima. Taigi įrodėme, kad $\varphi_F(W) = V^*$.

Teiginys. Sakykime, $F(\ ,\ ) : V \times W \to k$ yra tiesinių erdvių V ir W porinys. Tuomet egzistuoja tokia tiesinė bijekcija $\psi_F : V \to W^*$, kad

$$\langle \psi_F(v), w\rangle = F(v,w),\ v \in V,\ w \in W.$$

Kitaip tariant, atvaizdžių diagrama

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\psi_F\times\mathrm{id}} & W^* \times W \\ F(\ ,\ ) \searrow & & \swarrow \langle\ ,\ \rangle \\ & k & \end{array}$$

yra komutatyvi: $\langle\ ,\ \rangle \circ (\psi_F \times \mathrm{id}) = F(\ ,\ )$.

Įrodymas. Šio teiginio įrodymas analogiškas praeito teiginio įrodymui.

1. Išvada. Sakykime, $F(\ ,\ ) : V \times W \to k$ yra tiesinių erdvių V ir W porinys. Tuomet $\dim_k V = \dim_k W$.

2. Išvada. Sakykime, $F(\ ,\ ) : V \times W \to k$ yra tiesinių erdvių V ir W porinys, v_1, v_2, …, v_n – tiesinės erdvės V bazė. Tuomet egzistuoja tokia tiesinės erdvės W bazė w_1, w_2, …, w_n, kad $F(v_i, w_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le n$.

Įrodymas. Sakykime, kad v_1^*, v_2^*, …, v_n^* yra bazės v_1, v_2, …, v_n duali bazė. Pažymėkime $w_j =: \varphi_F^{-1}(v^*)$, $1 \le j \le n$ (kaip žinome, $\varphi_F : W \to V^*$ – tiesinė bijekcija, todėl φ_F^{-1} egzistuoja ir yra tiesinis atvaizdis $\varphi_F^{-1} : V^* \to W$). Tuomet

$$F(v_i, w_j) = \langle v_i, \varphi_F(w_j) \rangle = \langle v_i, v_j^* \rangle = \delta_{ij},\ 1 \le i, j \le n.$$

3. Išvada. Sakykime, $F(\ ,\ ) : V \times W \to k$ yra tiesinių erdvių V ir W porinys, L – tiesinės erdvės V tiesinis poerdvis. Tuomet $L^\perp =: \{w \in W |\ F(v, w) = 0, v \in L\}$ yra tiesinės erdvės W tiesinis poerdvis ir $\dim_k L^\perp = \dim_k V - \dim_k L$.

Įrodymas. Šios išvados įrodymas analogiškas įrodymui tiesinių erdvių V ir V^* porinio $\langle\ ,\ \rangle$ atveju.

3. Tiesinių homogeninių lygčių sistemos

3. 1. Nagrinėkime tiesinių homogeninių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 & +\alpha_{12}x_2 & +\dots & +\alpha_{1n}x_n & = 0 \\ \alpha_{21}x_1 & +\alpha_{22}x_2 & +\dots & +\alpha_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{s1}x_1 & +\alpha_{s2}x_2 & +\dots & +\alpha_{sn}x_n & = 0 \end{cases}$$

Šią lygčių sistemą dažniausiai užrašinėsime trumpiau:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0,\ \alpha_{ij} \in k,\ 1 \le i \le s,\ 1 \le j \le n.$$

Matricos $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{s,n}$ eilutes

$$v_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}),\ 1 \le i \le s,$$

interpretuosime kaip tiesinės erdvės k^n vektorius. Sakykime, kad vektorių v_i, $1 \le i \le s$, tiesinis apvalkalas yra L, t. y.

$$L = kv_1 + kv_2 + \dots + kv_s = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_s v_s |\ \alpha_i \in k,\ 1 \le i \le s\}.$$

Kaip žinome, egzistuoja tiesinių erdvių k^n ir k^n porinys

$$\langle\ ,\ \rangle : k^n \times k^n \to k,\ \langle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\rangle =: \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j,$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in k^n$. Lygčių sistemos

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0,\ \alpha_{ij} \in k,\ 1 \le i \le s,\ 1 \le j \le n,$$

sprendinių aibę

$$\{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) | \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j = 0,\ 1 \le i \le s\}$$

galime interpretuoti kaip tiesinės erdvės k^n tiesinį poerdvį $L^{\perp}$. Dabar suformuluosime teoremą, kuri gaunama kaip išvada iš anksčiau įrodytų teiginių.

Teorema. Sakykime, kad tiesinių homogeninių lygčių sistemos

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0,\ \alpha_{ij} \in k,\ 1 \le i \le s,\ 1 \le j \le n,$$

matricos $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{s,n}$, sudarytos iš koeficientų prie nežinomųjų, rangas yra lygus r. Tuomet šios tiesinių homogeninių lygčių sistemos sprendiniai sudaro tiesinės erdvės k^n tiesinį poerdvį N, kurio dimensija virš kūno k yra lygi $n - r$.

Įrodymas. Jei matricos $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{s,n}$ rangas yra lygus r, tai šios matricos eilučių-vektorių tiesinio apvalkalo L dimensija $\dim_k L = r$. Kaip matėme, nagrinėjamos tiesinių homogeninių lygčių sisemos sprendinių erdvė N sutampa su $L^{\perp}$. Taigi $L^{\perp} \subset k^n$ ir, kaip žinome, $\dim_k L^{\perp} = \dim_k k^n - \dim_k L = n - r$.

3. 2. Nagrinėkime tiesinių homogeninių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 & +\alpha_{12}x_2 & +\ldots & +\alpha_{1n}x_n & = 0 \\ \alpha_{21}x_1 & +\alpha_{22}x_2 & +\ldots & +\alpha_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 & +\alpha_{n2}x_2 & +\ldots & +\alpha_{nn}x_n & = 0 \end{cases}$$

Koeficientai šios lygčių sistemos α_{ij}, $1 \le i, j \le n$, tegu priklauso kūnui k.

Remdamiesi Kramerio taisyke, žinome, jei šios lygčių sistemos matricos, sudarytos iš koeficientų prie nežinomųjų, determinantas nelygus nuliui, tai ši lygčių sistema turi tik vieną sprendinį $(\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n})$. Įrodysime: jei šios lygčių sistemos matricos, sudarytos iš koeficientų prie nežinomųjų, determinantas lygus nuliui, tai ši lygčių sistema turi ir nenulinį sprendinį

$$(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n) \in k^n,\ \ (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n) \ne (\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n}).$$

3. 3. Teorema. Tiesinių homogeninių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 & +\alpha_{12}x_2 & +\ldots & +\alpha_{1n}x_n & =0 \\ \alpha_{21}x_1 & +\alpha_{22}x_2 & +\ldots & +\alpha_{2n}x_n & =0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 & +\alpha_{n2}x_2 & +\ldots & +\alpha_{nn}x_n & =0 \end{cases},$$

$\alpha_{ij} \in k$, $1 \leq i, j \leq n$, čia k – kūnas, turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai šios lygčių sistemos matricos, sudarytos iš koeficientų prie nežinomųjų, determinantas lygus nuliui.

Įrodymas. Jei ši lygčių sistema turi nenulinį sprendinį, tai būtinai šios lygčių sistemos matricos, sudarytos iš koeficientų prie nežinomųjų, determinantas lygus nuliui. Priešingu atveju gautume prieštarą Kramerio taisyklei.

Tegu matricos $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ determinantas

$$\det(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n} = 0.$$

Nagrinėkime tiesinį atvaizdį

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathbb{R}^n, \ \ \mathcal{A}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)A^t,$$

čia A^t – matricos A transponuota matrica. Kadangi $\det A = 0$, tai neegzistuoja A^{-1}. Vadinasi, tiesiniam atvaizdžiui $\mathcal{A}$ neegzistuoja atvirkštinis atvaizdis, t. y.

$$\mathrm{Ker}\mathcal{A} \neq \{(\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n})\}$$

Tegu

$$(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n) \in \mathrm{Ker}\mathcal{A},\ (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n) \neq (\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n}).$$

Tuomet

$$(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)A^t = (\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n}),$$

t. y. $(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)$ yra nagrinėjamos tiesinių homogeninių lygčių sistemos nenulinis sprendinys. $\triangle$

4. Dualusis atvaizdis

4. 1. Sakykime, V ir W – tiesinės erdvės virš kūno k, $f : V \to W$ – tiesinis atvaizdis, V^* ir W^* – tiesinių erdvių V ir W dualios erdvės.

Apibrėžimas. Tiesinis atvaizdis $f^* : W^* \to V^*$ yra vadinamas dualiuoju atvaizdžiu tiesiniam atvaizdžiui $f : V \to W$, jei bet kuriems $v \in V$, $w^* \in W^*$,

$$\langle f(v), w^* \rangle = \langle v, f^*(w^*) \rangle.$$

Iškyla klausimas, ar kiekvienam tiesiniam atvaizdžiui $f : V \to W$ egzistuoja jam dualusis tiesinis atvaizdis $f^* : W^* \to V^*$?

Teiginys. Kiekvienam tiesiniam atvaizdžiui $f : V \to W$ egzistuoja jam dualusis tiesinis atvaizdis $f^* : W^* \to V^*$.

Įrodymas. Sakykime, v_1^*, v_2^*, …, v_n^* ir w_1^*, w_2^*, …, w_s^* – tiesinių erdvių V^* ir W^* bazės, dualios tiesinių erdvių V ir W bazėms v_1, v_2, …, v_n ir w_1, w_2, …, w_s. Pažymėkime $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,s}$ tiesinio atvaizdžio $f : V \to W$ matricą esant fiksuotoms tiesinių erdvių V ir W bazėms v_1, v_2, …, v_n ir w_1, w_2, …, w_s, t. y.

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} w_j,\ 1 \le i \le n.$$

Pažymėkime $X = (x_{ij})_{i,j=1}^{s,n}$ ieškomo tiesinio atvaizdžio $f^* : W^* \to V^*$ matricą esant fiksuotoms tiesinių erdvių W^* ir V^* bazėms w_1^*, w_2^*, …, w_s^* ir v_1^*, v_2^*, …, v_n^*, t. y.

$$f^*(w_j^*) = \sum_{i=1}^{n} x_{ji} v_j^*,\ 1 \le j \le s.$$

Reikia įsitikinti, kad, remiantis dualaus tiesinio atvaizdžio f^* tiesiniam atvaizdžiui f apibrėžimu, matrica X vienareikšmiškai yra nusakoma. Remdamiesi atvaizdžio f^* apibrėžimu, gauname:

$$\langle f(v_i), w_j^* \rangle = \langle v_i, f^*(w_j^*) \rangle,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le s.$$

Į šią lygybę įrašę tiesinio atvaizdžio f ir ieškomo tiesinio atvaizdžio matricų koeficientus, gauname:

$$\langle \sum_{r=1}^{s} \alpha_{ir} w_r, w_j^* \rangle = \langle v_i, \sum_{i=1}^{n} x_{ji} v_j^* \rangle,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le s.$$

Šią lygybę pertvarkę, gauname:

$$\sum_{r=1}^{s} \alpha_{ir} \langle w_r, w_j^* \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_{ji} \langle v_i, v_j^* \rangle,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le s,$$

arba $\alpha_{ij} = x_{ji}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le s$.

Taigi matome, kad $X = A^t$, čia A^t – matricai A transpuonota matrica.

Teiginio įrodymo eigoje įrodėme nepaprastai svarbų faktą, kurį suformuluosime atskirai.

Išvada. Tarkime, v_1^*, v_2^*, …, v_n^* ir w_1^*, w_2^*, …, w_s^* – tiesinių erdvių V^* ir W^* bazės, dualios tiesinių erdvių V ir W bazėms v_1, v_2, …, v_n ir w_1, w_2, …, w_s. Jei tiesiniam atvaizdžiui $f : V \to W$ priskiriama matrica A esant fiksuotoms tiesinių erdvių V ir W bazėms v_1, v_2, …, v_n ir w_1, w_2, …, w_s, tai tiesiniam atvaizdžiui $f^* : W^* \to V^*$, dualiajam atvaizdžiui f, priskiriama matrica A^t esant fiksuotoms tiesinių erdvių W^* ir V^* bazėms w_1^*, w_2^*, …, w_s^* ir v_1^*, v_2^*, …, v_n^*.

4. 2. Sakykime, kad tiesiniam atvaizdžiui $f : V \to W$ dualus tiesinis atvaizdis yra $f^* : W^* \to V^*$, t. y.

$$\begin{array}{rcl} f: & V \to W, & \\ & V^* \leftarrow W^* & : f^* \end{array},$$

$$\langle f(v), w^* \rangle = \langle v, f^*(w^*) \rangle,\ v \in V,\ w^* \in W^*.$$

Ištirsime ryšį tarp tiesinių poerdvių: $f(V)^{\perp} \subset W^*$, $f^*(W^*)^{\perp} \subset V$ ir $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Ker} f^*$.

Teiginys. $\mathrm{Ker} f = f^*(W^*)^{\perp}$, $\mathrm{Ker} f^* = f(V)^{\perp}$.

Įrodymas. Tarkime, kad $v \in \mathrm{Ker} f$. Tuomet kiekvienam $w^* \in W^*$,

$$0 = \langle f(v), w^* \rangle = \langle v, f^*(w^*) \rangle.$$

Kaip matome, kiekvienam $w^* \in W^*$, $f^*(w^*) \in \mathrm{Ker} f^{\perp}$, t. y. $f^*(W^*) \subset \mathrm{Ker} f^{\perp}$ arba $\mathrm{Ker} f \subset f^*(W^*)^{\perp}$.

Dabar įrodysime, kad $f^*(W^*)^{\perp} \subset \mathrm{Ker} f$. Tarkime, kad $v \in f^*(W^*)^{\perp}$, t. y. kiekvienam $w^* \in W^*$,

$$0 = \langle v, f^*(w^*) \rangle = \langle f(v), w^* \rangle.$$

Kadangi kiekvienam $w^* \in W^*$, $\langle f(v), w^* \rangle = 0$, o porinys $\langle\ ,\ \rangle$ neišsigimęs iš kairės, tai $f(v) = O_W$. Taigi įrodėme: jei $v \in f^*(W^*)^{\perp}$, tai $v \in \mathrm{Ker} f$. Vadinasi, $\mathrm{Ker} f = f^*(W^*)^{\perp}$. Panašiai įrodoma, kad $\mathrm{Ker} f^* = f(V)^{\perp}$.

4. 3. Išvada. Jei tiesiniam atvaizdžiui $f : V \to W$ dualus tiesinis atvaizdis yra $f^* : W^* \to V^*$, tai $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^*$ (čia $\mathrm{rg} f$ – tiesinio atvaizdžio f rangas). $\triangle$

Įrodymas. $\mathrm{rg} f = \dim_k f(V) = \dim_k V - \dim_k \mathrm{Ker} f = \dim_k V - \dim_k f^*(W^*)^{\perp} = \dim_k V - (\dim_k V^* - \dim_k f^*(W^*)) = \dim_k f^*(W^*) = \mathrm{rg} f^*$. $\triangle$

4. 4. Įrodysime labai svarbų faktą.

Teorema. Matricos $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,s}$, $\alpha_{ij} \in k$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le s$, maksimalus tiesiškai nepriklausomų eilučių skaičius yra lygus maksimaliam tiesiškai nepriklausomų stulpelių skaičiui.

Pastaba. Jei matricos koeficientai priklauso žiedui, o ne kūnui, tai teoremos teiginys bendruoju atveju neteisingas.

Įrodymas. Apibrėžkime tiesinį atvaizdį $f : k^n \to k^s$,

$$f((\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1s} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{ns} \end{pmatrix}$$

arba

$$f((\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)) = (\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_{j1}, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_{j2}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_{js}),$$

$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in k^n$. Kadangi tiesinės erdvės k^n standartinės bazės j-ojo vektoriaus $e_j = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \ldots, \delta_{jn})$ vaizdas yra $f(e_j) = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{js})$, $1 \leq j \leq n$, tai $\mathrm{rg}f$ yra lygus matricos $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,s}$ maksimaliam tiesiškai nepriklausomų eilučių skaičiui. Tiesinės erdvės k^n standartinė bazė yra duali pati sau. Remiantis išvada [žr. 4. 1.], tiesinio atvaizdžio $f^* : k^s \to k^n$, dualaus tiesiniam atvaizdžiui f, matrica tiesinių erdvių k^s ir k^n standartinėse bazėse yra A^t. Taigi šiuo atveju $\mathrm{rg}f^*$ yra lygus matricos A^t maksimaliam tiesiškai nepriklausomų eilučių arba matricos A maksimaliam tiesiškai nepriklausomų stulpelių skaičiui. Bet, kaip žinome, $\mathrm{rg}f = \mathrm{rg}f^*$. Taigi teorema įrodyta. $\triangle$