## VI skyrius. MATRICOS IR DETERMINANTAI

### 1. Antros eilės matricos determinantas

**1. 1** Nagrinėkime tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x & +a_{12}y & = b_1 \\ a_{21}x & +a_{22}y & = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

Šią lygčių sistemą galime išspręsti taip: pirmąją lygtį padauginę iš $a_{22}$ ir pridėję prie antrosios, padaugintos iš $-a_{12}$, gauname lygtį

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

(1)-os lygčių sistemos pirmąją lygtį padauginę iš $-a_{21}$ ir pridėję prie antrosios, padaugintos iš $a_{11}$, gauname lygtį

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{12}b_1.$$

Taigi (1)-os lygčių sistemos sprendinys yra toks:

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ y = \frac{a_{11}b_2 - a_{12}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

**1. 2.** Patogu nagrinėti matricas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}.$$

Pirmoji matrica yra sudaryta iš (1)-os lygčių sistemos koeficientų prie nežinomųjų. Antroji ir trečioji matricos yra gautos iš pirmosios, pirmosios matricos pirmąjį ir atitinkamai antrąjį stulpelį pakeitus (1)-os lygčių sistemos laisvaisiais nariais. Reiškinys $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ yra vadinamas pirmosios matricos determinantu. Reiškiniai $b_1a_{22} - b_2a_{12}$ ir $a_{11}b_2 - a_{12}b_1$ yra antrosios ir trečiosios matricų determinantai. Matricos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

determinantas $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ yra žymimas

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{arba} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**1. 3.** Taigi (1)-os lygčių sistemos srendinį galime užrašyti taip:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}, y = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

arba

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Šios (1)-os lygčių sistemos sprendinio formulės universalios. Kai nagrinėjame bendrosios lygčių sistemos sprendinio formules, kaip ir šiuo atveju, tai nebūtina nurodyti, kad $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Kaip matome, šis raidinis reiškinys yra nesuprastinamas ir todėl nėra lygus 0. Rūpintis, kad vardiklis nevirstų nuliumi, reikia tik tuo atveju, kai dydžius $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ pakeičiame, pavyzdžiui, skaitinėmis reikšmėmis.

## 2. Trečiosios eilės matricos determinantas

**2. 1.** Dabar nagrinėkime bendrąją trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x & +a_{12}y & +a_{13}z & = b_1 \\ a_{21}x & +a_{22}y & +a_{23}z & = b_2 \\ a_{31}x & +a_{32}y & +a_{33}z & = b_3 \end{cases} \tag{2}$$

Šią lygčių sistemą pertvarkysime. Piramąją lygtį, padauginę iš $a_{22}$ ir pridėję prie antrosios lygties, padaugintos iš $-a_{12}$, gauname:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x + (a_{13}a_{22} - a_{23}a_{12})z = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Piramąją lygtį, padauginę iš $-a_{32}$ ir pridėję prie trečiosios lygties, padaugintos iš $a_{12}$, gauname:

$$(-a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31})x + (-a_{13}a_{32} + a_{33}a_{12})z = -b_1a_{32} + b_3a_{12}.$$

Antrąją lygtį, padauginę iš $-a_{32}$ ir pridėję prie trečiosios lygties, padaugintos iš $a_{22}$, gauname:

$$(-a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31})x + (-a_{23}a_{32} + a_{33}a_{22})z = -b_2a_{32} + b_3a_{22}.$$

Gavome tokias tris lygtis:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x & +(a_{13}a_{22} - a_{23}a_{12})z & = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})x & +(a_{33}a_{12} - a_{13}a_{32})z & = b_3a_{12} - b_1a_{32} \\ (a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32})x & +(a_{33}a_{22} - a_{23}a_{32})z & = b_3a_{22} - b_2a_{32} \end{cases}$$

Pirmąją iš šių lygčių padauginę iš $a_{33}$, antrąją – iš $a_{23}$, trečiąją – iš $-a_{13}$ ir sudėję gautus rezultatus, gauname:

$$(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31})x =$$

$$= b_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - b_2(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

Tuomet

$$x = \frac{b_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - b_2(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}} =$$

$$= \frac{b_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - b_2(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})} =$$

$$= \frac{b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}.$$

**2. 2.** Apibrėžkime matricos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

determinantą taip:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Tuomet (2)-os lygčių sistemos sprendinio $x$-komponentės reikšmę galima ir taip užrašyti:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}.$$

Panašiai galima užrašyti (2)-os lygčių sistemos sprendinio $y$ ir $z$-komponenčių reikšmes:

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}, \quad z = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}.$$

Panagrinėję šiuos pavyzdžius, galime tikėtis, kad ir $n$ lygčių su $n$ nežinomaisiais sistemos atveju egzistuoja universalios formulės sprendinio komponentėms užrašyti. Iš tikrųjų taip ir yra. Visų pirma, apibrėšime $n$-tos eilės kvadratinės matricos determinanto sąvoką ir įrodysime determinanto pagrindines savybes. Po to rasime $n$ lygčių su $n$ nežinomaisiais sistemos sprendinio išraišką, vadinamą Kramerio taisykle.

## 3. Simetrinė grupė ir jos elementų lyginumo funkcija

**3. 1.** $n$-tos eilės kvadratinės matricos determinantui apibrėžti reikalingos baigtinės aibės elementų keitinio bei keitinio lyginumo sąvokos. Šios sąvokos išsamiai išdėstytos skyrelyje, kuriame yra nagrinėjama $n$-ojo laipsnio simetrinė grupė. Mums reikalingus faktus glaustai priminsime. Po to, apibrėšime $n$-tos eilės kvadratinės matricos determinantą, tiksliau kalbant, apibrėšime determinanto funkciją $\det : M_n(k) \to k$, čia $k$ – kūnas.

**3. 2. Simetrinė grupė.**

Priminsime, kad bijekcija

$$\sigma : \{1,\ 2,\ \dots,\ n\} \to \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$$

yra vadinama aibės $\mathbb{N}_n = \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ elementų keitiniu. Kiekvieną aibės $\mathbb{N}_n$ elementų keitinį galima pavaizduoti lentele:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

Visų aibės $\{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ elementų keitinių aibę žymmime $\mathbf{S}_n$. Kadangi dviejų bijekcijų $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_n$ kompozicija (šią kompoziciją vadiname ir aibės $S_n$ elementų daugyba) $\sigma \circ \tau$ yra bijekcija, tai aibėje $\mathbf{S}_n$ apibrėžtas kompozicijos dėsnis $\circ$. Šis kompozicijos dėsnis yra:

1. asociatyvus;
2. id – tapačioji bijekcija priklauso aibei $\mathbf{S}_n$ ir
3. kiekvienam $\sigma \in \mathbf{S}_n$, $\sigma^{-1} \in \mathbf{S}_n$.

Taigi aibė $\mathbf{S}_n$ kompozicijos dėsnio $\circ$ atžvilgiu yra grupė, kuri yra vadinama $n$-ojo laipsnio simetrine grupe.

**3. 3. Simetrinės grupės elementų lyginumo funkcija.** Aibės $\{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ elementų keitinys $\sigma$ apibrėžtas taip:

$$\sigma(l) = \begin{cases} i, & \text{jei } l = j, \\ j, & \text{jei } l = i, \\ l, & \text{jei } l \neq i, j, \end{cases}$$

$1 \leq l \leq n$, yra vadinamas transpozicija ir žymimas $(i\ j)$. Skyrelyje, kuriame nagrinėjama $n$-ojo laipsnio simetrinė grupė, įrodoma, kad kiekvienas grupės $\mathbf{S}_n$ elementas užrašomas transpozicijų kompozicija. Grupės $\mathbf{S}_n$ elemento skaidinys transpozicijų kompozicija nėra vienareikšmiškai apibrėžiamas, bet vienareikšmiškai apibrėžiamas elemento skaidinyje transpozicijų skaičiaus lyginumas. Todėl apibrėžtas atvaizdis:

$$\operatorname{sgn} : \mathbf{S}_n \to \{1,\ -1\},$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \sigma \text{ yra užrašomas lyginiu skaičiumi transpozicijų kompozicija,} \\ -1, & \text{jei } \sigma \text{ yra užrašomas nelyginiu skaičiumi transpozicijų kompozicija.} \end{cases}$$

Žinome, kad $\operatorname{sgn}((i\ j)) = -1$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Svarbi atvaizdžio

$$\operatorname{sgn} : \mathbf{S}_n \to \{1,\ -1\}$$

savybė:

$$\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau),\ \sigma,\ \tau \in \mathbf{S}_n.$$

**Apibrėžimas.** Grupės $S_n$ elementas $\sigma$ yra vadinamas lyginiu (nelyginiu), jei $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ ($\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$)

**Pavyzdžiai.**

1. Imkime, pavyzdžiui, grupės $\mathbf{S}_4$ elementą

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Galime užrašyti šį elementą transpozicijų sandaugomis:

$$\sigma = (1\ 2)(1\ 4)(1\ 3) = (2\ 4)(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 2)(3\ 4)(1\ 4) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 4)(2\ 4)(1\ 2)$$

(transpozicijas dauginame iš dešinės į kairę, t. y. taip kaip apibrėžiama atvaizdžių kompozicija). Šiuo atveju $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$, t.y. keitinys $\sigma$ yra nelyginis.

2. Imkime, pavyzdžiui, grupės $\mathbf{S}_4$ elementą

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Galime užrašyti šį elementą transpozicijų sandaugomis:

$$\tau = (1\ 2)(1\ 3)(2\ 4)(1\ 2) = (2\ 3)(1\ 4).$$

Taigi $\mathrm{sgn}(\tau) = 1$, t.y. keitinys $\tau$ yra lygimis.

**3. 4. Inversijos.**

**Apibrėžimas.** Sakoma, kad užrašytų skirtingų natūraliųjų skaičių pora $j\ \ i$ sudaro inversiją arba netvarką, jei $j > i$.

Dabar išsiaiškinsime, kaip galima rasti aibės $\mathbb{N}_n$ elementų keitinio

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

lyginumą, remiantis natūraliųjų skaičių poros inversijos sąvoka.

**Apibrėžimas.** Grupės $S_n$ elementas $\sigma$ yra vadinamas lyginiu (nelyginiu), jei keitinio $\sigma$ pirmosios eilutės natūraliųjų skaičių porų netvarkų skaičiaus suma su šio keitinio antrosios eilutės natūraliųjų skaičių porų netvarkų skaičiumi yra lyginis (nelyginis) skaičius.

**Pastaba.** Jei pirmojoje keitinio $\sigma$ eilutėje skaičiai surašyti natūralia tvarka, tai jokia skaičių pora nesudaro netvarkos. Tuomet reikia suskaičiuoti tik, kiek yra natūraliųjų skaičių porų, sudarančių netvarką (inversiją) antrojoje keitinio $\sigma$ eilutėje. Šio natūraliųjų skaičių porų, sudarančių netvarkas (inversijas) antrojoje keitinio $\sigma$ eilutėje, skaičiaus lyginumas ir yra vadinamas keitinio $\sigma$ lyginumu.

**Pratimai.** Įrodykite, kad keitinio $\sigma \in S_n$ lyginumas apibrėžtas korektiškai, t.y. nesikeičia, jei sukeisime keitinio, užrašyto lentele, stulpelius vietomis.

**3. 5.** Lengva suvokti, kaip susieti šią keitinio lyginumo sąvoką su anksčiau apibrėžta keitinio lyginumo sąvoka. Keitinį

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & \dots & s & \dots n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_r & \dots & j_s & \dots j_n \end{pmatrix}$$

padauginę iš kairės iš transpozicijos $(j_r\ j_s)$, gauname keitinį

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & \dots & s & \dots n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_s & \dots & j_r & \dots j_n \end{pmatrix}.$$

Įsižiūrėkite, ką gavome! Taigi nagrinėjamą keitinį galime padauginti iš kairės iš transpozicijų taip, kad gautas keitinys būtų lygus tapačiajam:

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Taigi galima užrašyti lygybę:

$$(i_r\ l_r)(i_{r-1}\ l_{r-1})\dots(i_1\ l_1)\sigma =$$

$$= (i_r\ l_r)(i_{r-1}\ l_{r-1})\dots(i_1\ l_1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \mathrm{id}.$$

Remdamiesi šia lygybe, matome, kad

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} = (i_1\ l_1)\dots(i_{r-1}\ l_{r-1})(i_r\ l_r),$$

t. y. $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^r$.

**Pavyzdžiai.** 1. Nagrinėkime keitinį

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Šio keitinio antrojoje eilutėje skaičių poros, sudarančios inversijas, yra šios:

$$3\ 1;\ 3\ 2;\ 4\ 2.$$

Taigi $\sigma$ – nelyginis keitinys.

2. Nagrinėkime keitinį

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Šio keitinio antrojoje eilutėje skaičių poros, sudarančios inversijas, yra šios:

$$4\ 3;\ 4\ 2;\ 4\ 1; 3\ 2; 3\ 1; 2\ 1.$$

Taigi $\tau$ – lyginis keitinys.

## 4. Matricos

**4. 1.** Priminsime, kad kūno $k$ elementų šeima $(\alpha_{ij}), 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$, sunumeruota dviem indeksais ir surašyta į lentelę

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

yra vadinama $m \times n$ matrica, o $\alpha_{ij}$ -šios matricos $ij$-elementu arba $ij$-komponente ($\alpha_{ij}$-matricos elementas, užrašytas matricos $i$-osios eilutės ir $j$-ojo stulpelio sankirtoje).

**4. 2.** Priminsime, kad $m \times n$ matricą, nurodant jos elementus, sutarėme sutrumpintai žymėti taip: $(\alpha_{ij})_{ij=1}^{m,n}$. Matricos $(\alpha_{ij})_{ij=1}^{m,n}$ ir $(\beta_{ij})_{ij=1}^{m,n}$ yra lygios tada ir tik tada, kai $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ visiems $i, j, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. Visų $m \times n$ matricų, kurių elementai priklauso kūnui $k$, aibę žymime $M_{m\times n}(k)$.

Jei $m = n$, tai $n \times n$ matricos dar yra vadinamos $n$-os eilės kvadratinėmis matricomis. Visų $n\times n$ matricų su koeficientais kūne $k$ aibę žymime $M_n(k)$. $n$-tos eilės kvadratinių matricų aibėje $M_n(k)$ yra matrica $\mathbf{1}_n = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{n}$, vadinama vienetine matrica, čia $\delta_{ij}$ – Kronekerio simbolis, apibrėžiamas taip:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i = j, \\ 0, & \text{jei } i \ne j. \end{cases}$$

**4. 3.** Priminsime, kokius veiksmus galima atlikti su matricomis ir tų veiksmų savybes.

Pirmiausia, aibėje $M_{m\times n}(k)$ yra apibrėžta sudėtis $+$. Matricų $(\alpha_{ij})_{ij=1}^{m,n}, (\beta_{ij})_{ij=1}^{m,n} \in M_{m\times n}(k)$ suma apibrėžiama taip:

$$(\alpha_{ij})_{ij=1}^{m,n} + (\beta_{ij})_{ij=1}^{m,n} =: (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{i,j=1}^{m,n}.$$

$(M_{m\times n}(k), +)$ yra Abelio grupė, nulinė $m\times n$ matrica matrica $(0)_{i,j=1}^{m,n}$, – šios grupės neutralus elementas.

**4. 4.** Antra, yra apibrėžta aibės $M_{m\times n}(k)$ elementų daugyba $\cdot$ iš kūno $k$ elementų. Kūno $k$ elemento $\lambda$ ir matricos $(\alpha_{ij})_{ij=1}^{m,n} \in M_{m\times n}(k)$ sandauga apibrėžiama taip:

$$\lambda \cdot (\alpha_{ij})_{ij=1}^{m,n} = (\lambda\alpha_{ij})_{ij=1}^{m,n}.$$

Žinome, kad bet kuriems $\lambda, \mu \in k$, $A, B \in M_{m\times n}(k)$ teisingos lygybės:

1. $\lambda \cdot (\mu A) = (\lambda\mu) \cdot A$;
2. $1 \cdot A = A$, čia 1 – kūno $k$ vienetas;
3. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;
4. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot B$.

Prisiminę tiesinės erdvės apibrėžimą, matome, kad $(M_{m\times n}(k), +)$ yra tiesinė erdvė virš kūno $k$.

Matricos $(\alpha_{ij})_{ij=1}^{m,n}$ eilutes

$$(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \ldots,\ \alpha_{in}),\ 1 \le i \le m,$$

surašę vieną šalia kitos į vieną ilgą eilutę, matricą $(\alpha_{ij})_{ij=1}^{m,n}$ galime sutapatinti su tiesinės erdvės $\underbrace{k^n \times k^n \times \ldots \times k^n}_{m} = k^{nm}$ vektoriumi

$$(\alpha_{11},\ \ldots,\ \alpha_{1n},\ \alpha_{21},\ \ldots,\ \alpha_{2n},\ \ldots,\ \alpha_{m1},\ \ldots,\ \alpha_{mn}).$$

Taigi tiesinę erdvę $M_{m\times n}(k)$ galime sutapatinti su tiesine erdve $\underbrace{k^n \times k^n \times \ldots \times k^n}_{m}$

**4. 5.** Trečia, yra apibrėžta matricų daugyba

$$\cdot : M_{m\times n}(k) \times M_{n\times p}(k) \to M_{m\times p}(k).$$

Duotų matricų

$$(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \quad \text{ir} \quad (\beta_{ij})_{i,j=1}^{n,p}$$

sandauga yra vadinama matrica

$$(\gamma_{ij})_{i,j=1}^{m,p} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \cdot (\beta_{ij})_{i,j=1}^{n,p},$$

kurios $ij$-elementas $\gamma_{ij}$ apibrėžiamas taip:

$$\gamma_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is} \cdot \beta_{sj}, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le p.$$

Paprastai tariant, matricos $(\gamma_{ij})_{i,j=1}^{m,p}$ $ij$-elementas yra gaunamas pirmosios matricos $i$ eilutę paelemenčiui sudauginant su antrosios matricos $j$ stulpeliu ir gautus rezultatus sudedant.

Matricų daugyba turi savybes:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),\ A \in M_{m\times n}(k),\ B \in M_{n\times p}(k),\ C \in M_{p\times r}(k)$;
2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C,\ A, B \in M_{m\times n}(k),\ C \in M_{n\times p}(k)$;
3. $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B,\ C \in M_{m\times n}(k),\ A, B \in M_{n\times p}(k)$;
4. Kiekvienai matricai $A \in M_{m\times n}(k)$

$$\mathbf{1}_m \cdot A = A,$$

čia $\mathbf{1}_m =: (\delta_{ij})_{i,j=1}^{m}$, vadinama $m$ eilės vienetine matrica, o $\delta_{ij}$ yra Kronekerio $\delta$ funkcija.

5. Kiekvienai matricai $A \in M_{m\times n}(k)$

$$A \cdot \mathbf{1}_n = A.$$

Mus domins matricų daugyba aibėje $M_n(k)$.

## 5. Kvadratinės matricos ir determinanto funkcija

**5. 1.** Dabar nagrinėsime tik $n$-tos eilės kvadratines matricas $(\alpha_{ij})_{ij=1}^n \in M_n(k)$. Pažymėkime matricos $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n \in M_n(k)$ $j$-ąją eilutę $v_j$, t. y.

$$v_j = (\alpha_{j1}\ \alpha_{j2}\ \dots\ \alpha_{jn}),\ 1 \le j \le n.$$

Tuomet matricą $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n$ galima užrašyti taip:

$$A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (\, v_1^t \quad v_2^t \quad \dots \quad v_n^t \,)^t,$$

čia $B^t$ žymi, kad matrica $B$ yra transponuojama. Transponavę matricą $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, gauname matricą $B^t = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$, čia $\gamma_{ij} = \beta_{ji}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

**5. 2.** Artimiausias mūsų tikslas – apibrėžti atvaizdį

$$\det : M_n(k) \to k,\ A \mapsto \det A,\ \ A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n \in M_n(k),$$

tenkinantį sąlygas, kurias suformuluosime vėliau. Norėdami pabrėžti, kad šio atvaizdžio det reikšmė det$A$ matricoje $A$ priklauso nuo matricos $A$ eilučių, turėtume rašyti

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{arba} \quad \det(\, v_1^t \quad v_2^t \quad \dots \quad v_n^t \,)^t.$$

Bet šie užrašai nepatogūs. Norėdami pabrėžti, kad det$A$ priklauso nuo matricos $A$ eilučių, sutarkime rašyti det$(v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n)$, t. y. atvaizdį det traktuoti kaip matricos $A$ eilučių funkciją.

**Teiginys.** Egzistuoja vienintelė funkcija

$$\det : M_n(k) \to k,\ A \mapsto \det A,\ A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n \in M_n(k),$$

tenkinanti sąlygas:

1. det yra matricos $A$ eilučių $n$-tiesinė funkcija, t. y. funkcija det yra tiesinė pagal $n$-tos eilės kvadratinės matricos kiekvieną eilutę: kiekvienam $j$, $1 \le j \le n$, $\det(v_1, \dots, \lambda v_j' + \mu v_j'', \dots, v_n) = \lambda \det(v_1, \dots, v_j', \dots, v_n) + \mu \det(v_1, \dots, v_j'', \dots, v_n)$;

2. det yra matricos $A$ eilučių alternuojanti funkcija, t. y., jei matricos $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n$ kurios nors dvi eilutės $v_i$ ir $v_j$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, yra lygios, tai $\det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$.

3. $\det \mathbf{1}_n = 1$, čia $\mathbf{1}_n = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n$, $\delta_{ij}$ – Kronekerio simbolis (det – normuota funkcija, – vienetinės matricos determinantas yra lygus 1).

**Įrodymas.** Tarkime, kad funkcija det egzistuoja. Visų pirma įrodysime, kad det turi tokią savybę: matricos determinantas keičia ženklą, sukeitus matricos dvi eilutes vietomis. Po to įrodysime, kad tik vienintelė funkcija gali tenkinti išvardintas sąlygas ir pagaliau įrodysime funkcijos det egzistavimą.

Remdamiesi 2-ąja sąlyga, galime užrašyti lygybę: bet kuriems $i, j$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$,

$$0 = \det(v_1,\ \ldots,\ v_i + v_j,\ \ldots,\ v_i + v_j,\ \ldots,\ v_n) =$$

$$= \det(v_1,\ \ldots,\ v_i,\ \ldots,\ v_i,\ \ldots,\ v_n) + \det(v_1,\ \ldots,\ v_i,\ \ldots,\ v_j,\ \ldots,\ v_n) +$$

$$+ \det(v_1,\ \ldots,\ v_j,\ \ldots,\ v_i,\ \ldots,\ v_n) + \det(v_1,\ \ldots,\ v_j,\ \ldots,\ v_j,\ \ldots,\ v_n) =$$

$$= \det(v_1,\ \ldots,\ v_i,\ \ldots,\ v_j,\ \ldots,\ v_n) + \det(v_1,\ \ldots,\ v_j,\ \ldots,\ v_i,\ \ldots,\ v_n).$$

Vadinasi, kiekvienam aibės $\mathbb{N}_n$ elementų keitiniui $\sigma$, teisinga lygybė:

$$\det(v_{\sigma(1)},\ v_{\sigma(2)},\ \ldots,\ v_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n).$$

Dabar įrodysime funkcijos det vienatį. Užrašykime matricos $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n$ $j$-ąją eilutę $v_j$, $1 \leq j \leq n$, tiesinės erdvės $k^n$ standartinės bazės vektoriais $e_1$, $e_2$, ..., $e_n$:

$$v_j = (\alpha_{j1},\ \alpha_{j2},\ \ldots,\ \alpha_{jn}) = \alpha_{j1}e_1 + \alpha_{j21}e_2 + \ldots + \alpha_{jn}e_n,$$

čia $e_j = (\delta_{j1},\ \delta_{j2},\ \ldots,\ \delta_{jn})$, $\delta_{ij}$ – Kronekerio simbolis. Įrašę $v_j$, $1 \leq j \leq n$, išraiškas į $\det(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n)$ ir remdamiesi 1-ąja ir 2-ąja funkcijos det savybėmis, gauname:

$$\det(\sum_{j_1=1}^n \alpha_{1j_1}e_{j_1},\ \sum_{j_2=1}^n \alpha_{2j_2}e_{j_2},\ \ldots,\ \sum_{j_n=1}^n \alpha_{nj_n}e_{j_n}) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^n \alpha_{1j_1} \sum_{j_2=1}^n \alpha_{2j_2} \ldots \sum_{j_n 1}^n \alpha_{nj_n} \det(e_{j_1},\ e_{j_2},\ \ldots,\ e_{j_n}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)} \ldots \alpha_{n\sigma(n)} \det(e_{\sigma(1)},\ e_{\sigma(2)},\ \ldots,\ e_{\sigma(n)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)} \ldots \alpha_{n\sigma(n)} \det(e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n),$$

čia

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r & \ldots & s & \ldots n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_r & \ldots & j_s & \ldots j_n \end{pmatrix}.$$

Taigi

$$\det((\alpha_{ij})_{ij=1}^n) = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)}\dots\alpha_{n\sigma(n)},$$

nes $\det(e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n) = 1$ (3-ioji det savybė).

Pagaliau matematinės indukcijos metodu įrodysime determinanto funkcijos det egzistavimą.

1-os eilės matricai $(\alpha)$ apibrėžkime $\det(\alpha) = \alpha$. Sakykime, kad kiekvienai $n-1$-os eilės kvadratinei matricai $A$ funkcija det, tenkinanti teoremoje išvardintas sąlygas, egzistuoja. Tegu $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n \in M_n(k)$ – $n$-tos eilės matrica. Apibrėžkime bet kuriam $r$, $1 \le r \le n$,

$$\det(\alpha_{ij})_{ij=1}^n = (-1)^{r+1}\alpha_{1r}M^{1r} + (-1)^{r+2}\alpha_{2r}M^{2r} + \dots + (-1)^{r+n}\alpha_{nr}M^{nr}, \tag{1}$$

čia $M^{jr}$ – $n-1$-os eilės matricos, gautos matricoje $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n$ išbraukus $j$-ąją eilutę ir $r$-ąjį stulpelį, determinantas. Lieka įrodyti, kad ši funkcija tenkina teoremoje išvardintas sąlygas.

Išsirinkime matricos $A$ $s$-ąją eilutę, $1 \le s \le n$. Jei $j \ne s$, $1 \le j \le n$, tai matricos $A$ $s$-osios eilutės elementai, išskyrus elementą, esantį $r$-ajame stulpelyje, sudaro ir determinanto $M^{jr}$, $1 \le j \le n$, $j \ne s$, kurią nors eilutę. Kadangi $n-1$-os eilės determinantai yra tiesinės funkcijos pagal kiekvieną eilutę, tai ir

$$\det(\alpha_{ij})_{ij=1}^n = (-1)^{r+s}\alpha_{sr}M^{sr} + \sum_{\substack{j=1\\ j\ne s}}^{n} (-1)^{r+j}\alpha_{jr}M^{jr},$$

yra tiesinė funkcija pagal $s$ eilutę, nes ir dėmuo $(-1)^{r+s}\alpha_{sr}M^{sr}$ tiesiškai priklauso nuo $s$ eilutės koordinatės $\alpha_{sr}$.

Dabar įrodysime, kad, jei matricos $A$ kurios nors dvi eilutės yra lygios,tai ir apibrėžtas $n$-os eilės matricos $A$ determinantas $\det(A)$ yra lygus nuliui. Tarkime, kad matricos $A$ $p$-oji ir $q$-oji eilutės yra lygios, $p < q$. Tuomet sumos

$$\det A = \det(\alpha_{ij})_{ij=1}^n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{r+j}\alpha_{jr}M^{jr}$$

dėmenys $(-1)^{r+j}\alpha_{jr}M^{jr}$ lygūs 0, jei $j \ne p,\ q$, nes šiuo atveju determinantai $M^{jr}$ turi po dvi lygias eilutes. Taigi iš šios sumos lieka tik dviejų dėmenų suma:

$$(-1)^{r+p}\alpha_{pr}M^{pr} + (-1)^{r+q}\alpha_{qr}M^{qr} = (-1)^{r+p}\alpha_{pr}(M^{pr} + (-1)^{q-p}M^{qr}).$$

Determinantas $M^{pr}$ yra gaunamas iš determinanto $M^{qr}$, pastorojo determinanto eilutes perstačius taip, kad šį perstatinį atitinka keitinys

$$\sigma(j) = \begin{cases} j, & \text{jei } 1 \le j \le p-1, \\ j+1, & \text{jei } p \le j \le q-2, \\ p, & \text{jei } j = q-1, \\ j, & \text{jei } q \le j \le n-1\ , \end{cases} .$$

Šį keitinį užrašę

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p-1 & p & \dots & q-1 & q & \dots & n-1 \\ 1 & \dots & p-1 & p+1 & \dots & p & q & \dots & n-1 \end{pmatrix},$$

suskaičiuokime, kiek skaičių porų antrojoje eilutėje sudaro inversijas. Kaip matome, skaičių poros, kurios sudaro inversijas, yra tik šios:

$$p+1\ p; \dots ; q-1\ p.$$

Šių porų yra $q-2-(p-1)=q-p-1$. Taigi suma

$$M^{pr} + (-1)^{q-p} M^{qr} = M^{pr} + (-1)^{q-p}(-1)^{q-p-1} M^{pr} = M^{pr} - M^{pr} = 0.$$

Lieka įrodyti, kad $\det \mathbf{1}_n = 1$. Bet tai akivaizdu, nes

$$\det(e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n) = \delta_{rr} \det(e_1',\ \dots,\ \hat{e_r},\ \dots,\ e_n') = 1,$$

čia stogelis virš $e_r$ žymi, kad $e_r$ praleistas, o $e_j'$, $j \neq r$, žymi, kad praleista vektoriaus $e_j$ $r$-oji koordinatė. $\triangle$

**5. 3. Pastaba.** Įrodinėdami determinanto funkcijos vienatį, įrodėme, kad

$$\det A = \det(\alpha_{ij})_{ij=1}^n = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \dots \alpha_{n\sigma(n)}.$$

Šią formulę galima traktuoti kaip $n$-os eilės kvadratinės matricos determinanto apibrėžimą. Taip apibrėžę $n$-os eilės kvadratinės matricos determinantą, turėtume įrodyti, kad ši determinanto funkcija tenkina determinanto funkcijos tris sąlygas, suformuluotas teoremoje.

**Pratimas.** Apibrėžę matricos $A = \det(\alpha_{ij})_{ij=1}^n$ determinantą formule

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \dots \alpha_{n\sigma(n)},$$

įrodykite, ši funkcija tenkina determinanto funkcijos tris savybes.

**5. 4.** Remdamiesi (1)-ąja rekurenčiąja formule, $n$-tos eilės matricos determinantą galime apskaičiuoti, mokėdami apskaičiuoti $n-1$-os eilės determinantą. Šia formule remdamiesi, $n$-tos eilės matricos determinantą galime išskleisti bet kuriuo determinanto sulpeliu. Dabar įrodysime, kad $n$-os eilės matricos $A$ ir šios matricos transponuotos matricos $A^t$ determinantai yra lygūs: $\det A = \det A^t$. Tuomet $n$-os eilės matricos determinantą galima išskleisti ir bet kuria determinanto eilute.

**Teiginys.** Tarkime, $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n$. Tuomet $\det A = \det A^t$, čia $A^t = (\beta_{ij})_{ij=1}^n$, $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$.

**Įrodymas.** Įrodinėdami determinanto funkcijos vienatį, įrodėme, kad

$$\det A = \det(\alpha_{ij})_{ij=1}^n = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \dots \alpha_{n\sigma(n)}.$$

Taigi
$$\det A^t = \det(\beta_{ij})_{ij=1}^n = \sum_{\sigma\in \mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\beta_{1\sigma(1)}\beta_{2\sigma(2)}\ldots\beta_{n\sigma(n)}.$$
Kiekvienas šio determinanto dėmuo
$$\operatorname{sgn}(\sigma)\beta_{1\sigma(1)}\beta_{2\sigma(2)}\ldots\beta_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\ldots\alpha_{\sigma(n)n}.$$
Bet
$$\operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\ldots\alpha_{\sigma(n)n} = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{1\sigma^{-1}(1)}\alpha_{2\sigma^{-1}(2)}\ldots\alpha_{n\sigma^{-1}(n)}.$$
Kadangi $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$, tai
$$\det A = \det A^t. \ \triangle$$

**5. 5. Išvada.** Tegu $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n \in M_n(k)$ – $n$-tos eilės matrica. Tuomet bet kuriam $r$, $1 \le r \le n$,
$$\det(\alpha_{ij})_{ij=1}^n = (-1)^{r+1}\alpha_{r1}M^{r1} + (-1)^{r+2}\alpha_{r2}M^{r2} + \ldots + (-1)^{r+n}\alpha_{rn}M^{rn}.$$

**5. 6. Apibrėžimas.** Sakykime, $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n$, $M_{ij}$ – $n-1$-os eilės matricos, gautos matricoje $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n$ išbraukus $i$-ąją eilutę ir $j$-ąjį stulpelį, determinantas, $A_{ij} =: (-1)^{i+j}M_{ij}$, $1 \le i, j \le n$. $M_{ij}$ yra vadinamas matricos $A$ $ij$-ojo elemento $\alpha_{ij}$ papildomu minoru, o $A_{ij}$ – šio elemento algebriniu adjunktu.

Matricos $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n \in M_n(k)$ determinanto $\det A$ skleidinį $r$-ąja eilute arba $r$-uoju stulpeliu galime užrašyti taip:
$$\det(\alpha_{ij})_{ij=1}^n = \alpha_{r1}A^{r1} + \alpha_{r2}A^{r2} + \ldots + \alpha_{rn}A^{rn}$$
arba
$$\det(\alpha_{ij})_{ij=1}^n = \alpha_{1r}A^{1r} + \alpha_{2r}A^{2r} + \ldots + \alpha_{nr}A^{nr}.$$

**5. 7.** Matricos $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n$ $r$-osios eilutės elementus $\alpha_{rj}$ pakeiskime $x_{rj}$, $1 \le j \le n$ ir užrašykime gautos matricos $\tilde{A}$ determinanto skleidinį $r$-ąja eilute:
$$\det\tilde{A} = x_{r1}A^{r1} + x_{r2}A^{r2} + \ldots + x_{rn}A^{rn}. \tag{1}$$
Jei (1)-oje lygybėje vietoje $x_{rj}$ įrašytume, pavyzdžiui, $\alpha_{sj}$, $s \ne r$, $1 \le j \le n$, tai gautume matricos, kurios $r$-oji ir $s$-oji eilutės yra lygios, determinanto skleidinio $r$-ąja eilute formulę. Kadangi matricos, kurios dvi eilutės yra lygios, determinantas yra lygus nuliui, tai gauname lygybę:
$$\alpha_{s1}A^{r1} + \alpha_{s2}A^{r2} + \ldots + \alpha_{sn}A^{rn} = 0, \quad \text{jei} \quad s \ne r,\ 1 \le r, s \le n.$$

**5. 8. Matricų sandaugos determinantas.**

**Apibrėžimas.** Atvaizdis $F : V^n \to W$, čia $V$ ir $W$ – tiesinės erdvės virš kūno $k$, yra vadinamas $n$-tiesiniu, alternuojančiu, jei bet kuriems $v_1, \ldots, v_j, v_j', \ldots, v_n \in V$, $1 \le j \le n$, $\lambda$, $\mu \in k$,

1. $F(v_1, \ldots, \lambda v_j + \mu v_j', \ldots, v_n) = \lambda F(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + \mu F(v_1, \ldots, v_j', \ldots, v_n)$;

2. Atvaizdžio $F$ reikšmė yra lygi tiesinės erdvės $W$ nuliniam vektoriui, jei bent dvi argumentų reikšmės yra lygios.

**Teiginys.** Tegu $k^n$ – tiesinė erdvė virš kūno $k$, $F : \underbrace{k^n \times k^n \times \ldots \times k^n}_{n} \to k$ – $n$-tiesinis, alternuojantis atvaizdis, $(\alpha_{ij})_{ij=1}^n \in M_n(k)$ – $n$-os eilės kvadratinė matrica. Tuomet

$$F(\sum_{j_1=1}^n \alpha_{1j_1} e_{j_1},\ \sum_{j_2=1}^n \alpha_{2j_2} e_{j_2},\ \ldots,\ \sum_{j_n=1}^n \alpha_{nj_n} e_{j_n}) = \det(\alpha_{ij})_{ij=1}^n F(e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n),$$

čia $e_1$, $e_2$, ..., $e_n$ – tiesinės erdvės $k^n$ standartinė bazė.

**Įrodymas.**

$$F(\sum_{j_1=1}^n \alpha_{1j_1} e_{j_1},\ \sum_{j_2=1}^n \alpha_{2j_2} e_{j_2},\ \ldots,\ \sum_{j_n=1}^n \alpha_{nj_n} e_{j_n}) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^n \alpha_{1j_1} \sum_{j_2=1}^n \alpha_{2j_2} \ldots \sum_{j_n 1}^n \alpha_{nj_n} F(e_{j_1},\ e_{j_2},\ \ldots,\ e_{j_n}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \ldots \alpha_{n\sigma(n)} F(e_{\sigma(1)},\ e_{\sigma(2)},\ \ldots,\ e_{\sigma(n)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \ldots \alpha_{n\sigma(n)} F(e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n) =$$

$$= \det(\alpha_{ij})_{ij=1}^n F(e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n). \triangle$$

**Apibrėžimas.** Dviejų matricų $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n$ ir $B = (\beta_{ij})_{ij=1}^n$ sandauga yra vadinama matrica $C = (\gamma_{ij})_{ij=1}^n$, čia

$$\gamma_{ij} = \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} \beta_{rj}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

**Teiginys.** $\det(AB) = \det A \det B$.

**Įrodymas.** Tegu

$$F : \underbrace{k^n \times k^n \times \ldots \times k^n}_{n} \to k$$

yra $n$-tiesinis, neišsigimęs, alternuojantis atvaizdis. Tuomet

$$F(\sum_{j_1=1}^n (\sum_{l_1=1}^n \alpha_{1l_1} \beta_{l_1 j_1}) e_{j_1},\ \sum_{j_2=1}^n (\sum_{l_2=1}^n \alpha_{2l_2} \beta_{l_2 j_2}) e_{j_2},\ \ldots,\ \sum_{j_n=1}^n (\sum_{l_n=1}^n \alpha_{nl_n} \beta_{l_n j_n}) e_{j_n}) =$$

$$= \det((\alpha_{ij})_{ij=1}^n (\beta_{ij})_{ij=1}^n) F(e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n) = \det(AB) F(e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n).$$

Kita vertus,

$$F(\sum_{j_1=1}^{n}(\sum_{l_1=1}^{n}\alpha_{1l_1}\beta_{l_1j_1})e_{j_1},\ \sum_{j_2=1}^{n}(\sum_{l_2=1}^{n}\alpha_{2l_2}\beta_{l_2j_2})e_{j_2},\ \dots,\ \sum_{j_n=1}^{n}(\sum_{l_n=1}^{n}\alpha_{nl_n}\beta_{l_nj_n})e_{j_n}) =$$

$$= \det(\alpha_{ij})_{ij=1}^{n}F(\sum_{j_1=1}^{n}\beta_{1j_1}e_{j_1},\ \sum_{j_2=1}^{n}\beta_{2j_2}e_{j_2},\ \dots,\ \sum_{j_n=1}^{n}\beta_{nj_n}e_{j_n}) =$$

$$= \det(\alpha_{ij})_{ij=1}^{n}\det(\beta_{ij})_{ij=1}^{n}F(e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n) = \det A\det BF(e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n).$$

Pavyzdžiui,

$$F = \det : \underbrace{k^n \times k^n \times \ldots \times k^n}_{n} \to k$$

yra $n$-tiesinis, alternuojantis, neišsigimęs atvaizdis, $\det(e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n) = 1$. Taigi $\det(AB) = \det A\det B$. $\triangle$

**5. 9. Atvirkštinė matrica.**

**Teiginys.** $n$-os eilės kvadratinei matricai $A \in M_n(k)$ egzistuoja atvirkštinė matrica $A^{-1}$ tada ir tik tada, kai $\det A \neq 0$.

**Įrodymas.** Tegu $n$-os eilės kvadratinei matricai $A \in M_n(k)$ egzistuoja atvirkštinė matrica $A^{-1}$, t. y. $AA^{-1} = \mathbf{1}_n$. Tuomet

$$\det A\det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det\mathbf{1}_n = 1,$$

t. y. $\det A \neq 0$.

Sakykime, $\det A \neq 0$. Tegu $M^{ij}$ – matricos $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^{n}$ $ij$-ojo elemento $\alpha_{ij}$ papildomas minoras (priminsime: $M^{ij}$ – $n-1$-os eilės matricos, gautos matricoje $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^{n}$ išbraukus $i$-ąją eilutę ir $j$-ąjį stulpelį, determinantas), $A^{ij} =: (-1)^{i+j}M^{ij}$, – šio elemento algebrinis adjunktas. Apibrėžkime matricą

$$B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A^{11} & A^{21} & \dots & A^{n1} \\ A^{12} & A^{22} & \dots & A^{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{1n} & A^{2n} & \dots & A^{nn} \end{pmatrix}.$$

Sudauginę matricas $A$ ir $B$, galite įsitikinti, kad $AB = BA = \mathbf{1}_n$. Taigi $B = A^{-1}$. $\triangle$

## 6. Kramerio taisyklė.

**6. 1. Teorema.** Tarkime, tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 & +\alpha_{12}x_2 & +\dots & +\alpha_{1n}x_n & =\beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 & +\alpha_{22}x_2 & +\dots & +\alpha_{2n}x_n & =\beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 & +\alpha_{n2}x_2 & +\dots & +\alpha_{nn}x_n & =\beta_n \end{cases}$$

matricos $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n \in M_n(k)$, sudarytos iš koeficientų prie nežinomųjų, determinantas $\det A \neq 0$. Tuomet ši tiesinių lygčių sistema turi vienintelį sprendinį $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, kurio $j$-oji koordinatė

$$\gamma_j = \frac{d_j}{\det A}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

čia $d_j$, $1 \leq j \leq n$ – matricos, gautos matricoje $A$ $j$-ąjį stulpelį pakeitus lygčių sistemos laisvaisiais nariais, determinantas.

**Įrodymas.** Šią tiesinių lygčių sistemą užrašykime taip:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Kadangi $\det A \neq 0$, tai egzistuoja $A^{-1}$ ir yra lygi

$$\frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A^{11} & A^{21} & \ldots & A^{n1} \\ A^{12} & A^{22} & \ldots & A^{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{1n} & A^{2n} & \ldots & A^{nn} \end{pmatrix}.$$

(1)-osios lygybės abi puses padauginę iš kairės iš $A^{-1}$, gauname:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A^{11} & A^{21} & \ldots & A^{n1} \\ A^{12} & A^{22} & \ldots & A^{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{1n} & A^{2n} & \ldots & A^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Taigi

$$x_j = \frac{\beta_1 A^{1j} + \beta_2 A^{2j} + \ldots + \beta_n A^{nj}}{\det A}.$$

Kaip matome, $\beta_1 A^{1j} + \beta_2 A^{2j} + \ldots + \beta_n A^{nj}$ – matricos, gautos matricoje $A$ $j$-ąjį stulpelį pakeitus lygčių sistemos laisvaisiais nariais, determinanto skleidinys $j$-uoju stulpeliu. $\triangle$

**Teorema (Hamiltomo - Keili).** Tegu $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n \in M_n(k)$, $\varphi_A(t) = \det(A - t\mathbf{1}_n)$. Tuomet $\varphi_A(A) = O$, čia $O$ – nulinė matrica.

**Įrodymas.** Nagrinėkime matricą $B(t) = (A_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, čia $A_{ij}(t)$ matricos $A - t\mathbf{1}_n$ $ji$ elemento algebrinis adjunktas. Kiekvienas matricos $B(t)$ elementas $A_{ij}(t)$ yra kintamojo $t$ polinomas, kurio laipsnis $\deg A_{ij}(t) \leq n-1$. Tegu $B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + \ldots + B_1 t + B_0$, čia $B_j$, $0 \leq j \leq n-1$, matricos su pastoviais koeficientais, $\varphi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$. Galime užrašyti lygybę: $(A - t\mathbf{1}_n)B(t) = \varphi_A(t)\mathbf{1}_n$. Sudauginę ir sulyginę koeficientus prie $t$ laipsnių, gauname:

$$\begin{array}{ccc} & -B_{n-1} & = (-1)^n \\ AB_{n-1} & -B_{n-2} & = a_{n-1} \\ AB_{n-2} & -B_{n-3} & = a_{n-2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ AB_1 & -B_0 & = a_1 \\ AB_0 & & = a_0 \end{array}.$$

Pirmąją lygybę iš kairės padauginę iš $A^n$, antrąją – iš $A^{n-1}$ ir t. t. ir sudėję, gauname:

$$O = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + A_0 = \varphi_A(A). \ \triangle$$

**Apibrėžimas.** Kintamojo $t$ polinomas $\varphi_A(t) = \det(A - t\mathbf{1}_n)$ yra vadinamas matricos $A$ charakteringuoju polinomu.

Hamiltono - Keili teorema teigia, kad matrica $A$ yra jos chrakteringojo polinomo šaknis.