III skyrius. NATŪRALIEJI IR SVEIKIEJI SKAIČIAI

1. Elementarioji dalumo teorija

1. 1. Šiame skyriuje išdėstysime natūraliųjų, sveikųjų skaičių elementariąją dalumo teoriją ir Euklido algoritmą bei įrodysime pagrindinę aritmetikos teoremą.

Natūraliųjų skaičių aibę, o taip pat skaičių sudėties, daugybos veiksmus bei tvarkos sąryšį joje, būtų galima apibrėžti aksiomatiškai. Po to būtų galima natūraliųjų skaičių aibę praplėsti iki sveikųjų skaičių aibės ir vienareikšmiškai pratęsti sudėties, daugybos veiksmus bei tvarkos sąryšį, apibrėžtus natūraliųjų skaičių aibėje, į sveikųjų skaičių aibę, išlaikant pagrindines jų savybes. Bet mes taip nedarysime. Skaitytojui, be jokios abejonės, yra žinomi skaičių sudėties, daugybos veiksmų bei tvarkos sąryšio, apibrėžtų tiek natūraliųjų tiek ir sveikųjų skaičių aibėse, pagrindinės savybės.

Natūraliųjų skaičių aibę žymėsime $\mathbb{N}$, o sveikųjų skaičių aibę – $\mathbb{Z}$. Nulis 0 priklauso natūraliųjų skaičių aibei $\mathbb{N}$. Skaičių sudėties ir daugybos veiksmus žymėsime $+$ ir $\cdot$. Dažniausiai daugybos ženklą tarp dauginamųjų praleisime, o rašysime tik tais atvejais, kai šį ženklą praleidus, gali iškilti dviprasmybių.

1. 2. Taip pat tariame, kad skaitytojui yra žinomi egzistencijos ir pilnosios indukcijos principai. Priminsime juos.

Egzistencijos principas. Kiekvienas netuščias natūraliųjų skaičių aibės poaibis turi mažiausią natūralųjį skaičių.

Skaičių teorijoje daugelis egistencijos įrodymų grindžiami egzistencijos principu.

Pilnosios indukcijos principas. Jei kuris nors teiginys $A(n)$, priklausantis nuo bendrojo natūraliojo skaičiaus n, yra teisingas tuo atveju, kai $n = 1$, ir teiginys $A(n)$ yra teisingas tuo atveju , kai kiekvienam m, $m < n$, yra teisingas teiginys $A(m)$, tai ir kiekvienam natūraliajam skaičiui n yra teisingas teiginys $A(n)$.

1. 3. Elementarioji dalumo teorija remiasi skaičiaus daliklio apibrėžimu.

Apibrėžimas. Skaičius b yra vadinamas skaičiaus a dalikliu ir žymima $b \mid a$, jei egzistuoja toks skaičius c, kad $a = bc$. Skaičius c yra vadinamas papildomu dalikliu skaičiaus a dalikliui b.

Tuo atveju, kai skaičius b yra skaičiaus a daliklis, dažnai rašoma: skaičius b dalija skaičių a; skaičius a dalijasi iš skaičiaus b; skaičius a yra skaičiaus b kartotinis.

Sutarkime rašyti $b \not| a$ tuo atveju, jei skaičius b nėra skaičiaus a daliklis (skaičius b nedalija skaičiaus a).

Remiantis skaičiaus daliklio apibrėžimu, galima įrodyti šias skaičių dalumo savybes:

1. Kiekvienam $a \in \mathbb{Z}$, $\pm 1 \mid a$;
2. Kiekvienam $a \in \mathbb{Z}$, $a \mid 0$ (yra susitarta, kad $0 \mid 0$);
3. Kiekvienam $a \in \mathbb{Z}$, $a \mid a$;
4. Jei $a \mid 1$, tai $a = \pm 1$;
5. Jei $0 \mid a$, tai $a = 0$;
6. Jei $b \mid a$ ir $a \mid b$, tai $a = \pm b$;
7. Jei $c \mid b$ ir $b \mid a$, tai $c \mid a$;

8. Jei $b \mid a_1$ ir $b \mid a_2$, tai bet kuriems $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$, $b \mid a_1u_1 + a_2u_2$.

Šias skaičių dalumo savybes gali įrodyti skaitytojas.

1. 4. Skaičių didžiausias bendrasis daliklis. Remdamiesi skaičių dalumo sąvoka, galime apibrėžti skaičių didžiausią bendrąjį daliką.

Apibrėžimas. Skaičius d yra vadinamas skaičių a_1, a_2, ..., a_n didžiausiu bendruoju dalikliu, jei

1. $d \mid a_1$, $d \mid a_2$, ..., $d \mid a_n$;
2. Jei $d' \mid a_1$, $d' \mid a_2$, ..., $d' \mid a_n$, tai $d' \mid d$.

Šis apibrėžimas remiasi tik skaičių dalumo sąvoka ir nesiremia tokiomis sąvokomis kaip "didesnis", "mažesnis", "didžiausias" ir panašiai. Dažnai skaičių a_1, a_2, ..., a_n didžiausias bendrasis daliklis yra apibrėžiamas kaip didžiausias natūralusis skaičius d, kuris dalija skaičius a_1, a_2, ..., a_n. Daugeliu atvejų dalumo sąvoką galima apibrėžti ne tik natūraliųjų ir sveikųjų, bet ir kitų skaičių aibėse,tuo tarpu tvarkos sąryšio, suderinto su sudėties ir daugybos savybėmis, tose aibėse apibrėžti negalima.

Pastaba. Jei d yra skaičių a_1, a_2, ..., a_n didžiausias bendrasis daliklis (d.b.d.), tai akivaizdu, kad ir $-d$ taip pat yra skaičių a_1, a_2, ..., a_n d.b.d.. Taigi iš dviejų skaičių a_1, a_2, ..., a_n d.b.d., besiskiriančių ženklu, galime išsirinkti neneigiamąjį ir jį žymėti d.b.d.$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ arba $a_1 \sqcup a_2 \sqcup \ldots \sqcup a_n$. Pavyzdžiui, $5 \sqcup 6 \sqcup 12 = 1$, $0 \sqcup (-7) = 7$, $0 \sqcup a = |a|$, čia $a \in \mathbb{Z}$.

Remdamiesi skaičių d.b.d. apibrėžimu, gauname $a_1 \sqcup a_2 \sqcup \ldots \sqcup a_n = a_1 \sqcup (a_2 \sqcup \ldots \sqcup a_n)$. Vadinasi, n skaičių a_1, a_2, ..., a_n d.b.d., $n \geq 2$, galima apskaičiuoti, mokant apskaičiuoti dviejų skaičių d.b.d..

Susitarimas. Sutarkime, kad $0 \sqcup 0 = 0$.

Kadangi $0 \sqcup a = |a|$, tai galima apsiriboti skaičių $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ d.b.d. radimu. Nesusiaurindami bendrumo, galime tarti, kad $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, nes $a_1 \sqcup a_2 = (-a_1) \sqcup a_2 = a_1 \sqcup (-a_2) = (-a_1) \sqcup (-a_2)$.

1. 5. Dalybos su liekana formulė. Dviejų skaičių a_1 ir a_2 didžiausią bendrąjį daliklį $a_1 \sqcup a_2$ galima rasti remiantis Euklido algoritmu. Euklido algoritmas pagrįstas dalybos su liekana formule.

Dalybos su liekana formulė. Bet kuriems $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, $a_2 > 0$, egzistuoja tokie vieninteliai skaičiai $b_2, a_3 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_3 < a_2$, kad $a_1 = a_2b_2 + a_3$.

Įrodymas. Kadangi $a_2 > 0$, tai egzistuoja toks $b_2 \in \mathbb{Z}$, kad $a_2b_2 \leq a_1 < a_2(b_2 + 1)$. Pažymėkime $a_3 =: a_1 - a_2b_2$. Akivaizdu, kad $0 \leq a_3 < a_2$ ir $a_1 = a_2b_2 + a_3$. Jei egzistuotų kita tokia skaičių pora $b_2', a_3' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_3' < a_2$, kad $a_1 = a_2b_2' + a_3'$, tai gautume lygybę: $a_2b_2' + a_3' = a_2b_2 + a_3$. Pertvarkę šią lygybę, gautume: $a_2(b_2' - b_2) = a_3 - a_3'$. Vadinasi, būtų tesinga lygybė $a_2|b_2' - b_2| = |a_3 - a_3'|$. Bet $0 \leq |a_3 - a_3'| < a_2$. Taigi $b_2' = b_2$, $a_3' = a_3$. $\triangle$

2. Euklido algoritmas

2. 1. Tarkime, a_1, a_2 – sveikieji skaičiai, $a_2 > 0$. Pasinaudoję keletą kartų dalybos su liekana formule, gauname:

$$\begin{array}{lll} a_1 & = a_2b_2 + a_3, & 0 \le a_3 < a_2, \\ a_2 & = a_3b_3 + a_4, & 0 \le a_4 < a_3, \\ \vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{l-3} & = a_{l-2}b_{l-2} + a_{l-1}, & 0 \le a_{l-1} < a_{l-2}, \\ a_{l-2} & = a_{l-1}b_{l-1} + a_l, & 0 \le a_l < a_{l-1}, \\ a_{l-1} & = a_lb_l + 0 & \end{array}.$$

Šių lygybių seka ir sudaro Euklido algoritmo esmę.

Įrodysime, kad paskutinė nelygi nuliui liekana a_l yra skaičių a_1, a_2 didžiausias bendrasis daliklis. Tuo tikslu reikia įrodyti, kad

1. $a_l \mid a_1$, $a_l \mid a_2$;
2. Jei $d' \mid a_1$, $d' \mid a_2$, tai $d' \mid a_l$.

Iš paskutinės Euklido algoritmo lygybės matome, kad $a_l \mid a_{l-1}$, iš priešpaskutinės – $a_l \mid a_{l-2}$ ir t. t.. Taigi $a_l \mid a_2$, $a_l \mid a_1$.

Lieka įsitikinti, kad a_l tenkina ir antrąją didžiausio bendrojo daliklio apibrėžimo savybę. Sakykime, $d' \mid a_1$, $d' \mid a_2$. Iš pirmosios Euklido algoritmo lygybės matome, kad $d' \mid a_3$, iš antrosios – $d' \mid a_4$ ir t. t.. Taigi galų gale gauname $d' \mid a_l$.

2. 2. Išvada. Jei d yra skaičių a_1 ir a_2 didžiausias bendrasis daliklis, tai egzistuoja tokie sveikieji skaičiai u_1, u_2, kad

$$d = a_1u_1 + a_2u_2.$$

Pritaikę skaičiams a_1, a_2 Euklido algoritmą, tarkime gauname $d = a_l$. Remdamiesi anksčiau parašytomis lygybėmis, gauname:

$$d = a_l = a_{l-2} - a_{l-1}b_{l-1} = a_{l-2} - (a_{l-3} - a_{l-2}b_{l-2})b_{l-1} =$$

$$= -a_{l-3}b_{l-1} + a_{l-2}(1 + b_{l-1}b_{l-2}) = \ldots = a_1u_1 + a_2u_2.$$

Pavyzdžiai.

1. Rasime skaičių 1147 ir 899 didžiausą bendrąjį daliklį ir jį išreikšime duotaisiais skaičiais. Užrašome lygybes:

$$\begin{array}{ll} 1147 & = 899 \cdot 1 + 248, \\ 899 & = 248 \cdot 3 + 155, \\ 248 & = 155 \cdot 1 + 93, \\ 155 & = 93 \cdot 1 + 62, \\ 93 & = 62 \cdot 1 + 31, \\ 62 & = 31 \cdot 2 + 0 \end{array}.$$

Taigi skaičių 1147 ir 899 didžiausias bendrasis daliklis yra lygus 31.

$31 = 93 - 62 = 93 - (155 - 93) = 93 \cdot 2 - 155 = (248 - 155) \cdot 2 - 155 = 248 \cdot 2 - 155 \cdot 3 = 248 \cdot 2 - (899 - 248 \cdot 3) \cdot 3 = 248 \cdot 11 - 899 \cdot 3 = (1147 - 899) \cdot 11 - 899 \cdot 3 = 1147 \cdot 11 - 899 \cdot 14.$

Kaip matome, $a_1 = 1147$, $u_1 = 11$, $a_2 = 899$, $u_2 = -14$.

2. Rasime skaičių 47561 ir 3911 didžiausą bendrąjį daliklį ir jį išreikšime duotaisiais skaičiais. Užrašome lygybes:

$$\begin{array}{rl} 47561 & = 3911 \cdot 12 + 629, \\ 3911 & = 629 \cdot 6 + 137, \\ 629 & = 137 \cdot 4 + 81, \\ 137 & = 81 \cdot 1 + 56, \\ 81 & = 56 \cdot 1 + 25, \\ 56 & = 25 \cdot 2 + 6, \\ 25 & = 6 \cdot 4 + 1 \end{array}.$$

$1 = 25 - 6 \cdot 4 = 25 - (56 - 25 \cdot 2) \cdot 4 = 25 \cdot 9 - 56 \cdot 4 = (81 - 56) \cdot 9 - 56 \cdot 4 = 81 \cdot 9 - 56 \cdot 13 = 81 \cdot 9 - (137 - 81) \cdot 13 = 81 \cdot 22 - 137 \cdot 13 = (629 - 137 \cdot 4) \cdot 22 - 137 \cdot 13 = 629 \cdot 22 - 137 \cdot 101 = 629 \cdot 22 - (3911 - 629 \cdot 6) \cdot 101 = 629 \cdot 628 - 3911 \cdot 101 = (47561 - 3911 \cdot 12) \cdot 628 - 3911 \cdot 101 = 47561 \cdot 628 - 3911 \cdot 7637.$

Šiuo atveju $a_1 = 47561$, $u_=628$, $a_2 = 3911$, $u_2 = -7637$.

3. Pagrindinė aritmetikos teorema

3. 1. Apibrėžimas. Natūralusis skaičius $p > 1$ yra vadinamas pirminiu, jei skaičiaus p dalikliai yra tik 1 ir p.

Įrodysime svarbią pirminių skaičių savybę.

Teorema. Jei pirminis skaičius p yra natūraliųjų skaičių a ir b sandaugos daliklis, tai p yra bent vieno skaičiaus a ar b daliklis.

Įrodymas. Jei $p \mid a$, tai teoremos įrodumas baigtas. Jei $p \nmid a$, tai skaičių p ir a didžiausias bendrasis daliklis yra lygus 1. Vadinasi, remiantis anksčiau įrodyta išvada, egzistuoja tokie $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$, kad

$$1 = pu_1 + au_2.$$

Padauginę šią lygybę iš skaičiaus b, gauname

$$b = pbu_1 + abu_2.$$

Kadangi $p \mid p$, $p \mid ab$, tai remiantis 8-ąja skaičių dalumo savybe, $p \mid pbu_1 + abu_2$, t. y. $p \mid b$. $\triangle$

3. 2. Pagrindinė aritmetikos teorema. Kiekvienas natūralusis skaičius a, $a \neq 0$, vienareikšmiškai yra išskaidomas pirminių skaičių sandauga, jei nekreipiame dėmesio į dauginamųjų tvarką.

Įrodymas. Pirmiausia matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad kiekvienas natūralusis skaičius yra išskaidomas pirminių skaičių sandauga, o po to – išskaidymo vienetinumą.

Skaičiaus 1 skaidinys pirminiais skaičiais tuščias. Sakykime, kiekvienas natūralusis skaičius b, $1 < b < a$, yra išskaidomas pirminių skaičių sandauga. Įrodysime, kad ir skaičius a taip pat yra išskaidomas pirminių skaičių sandauga.

Galimi du atvejai: i) a – pirminis skaičius; ii) a – nėra pirminis skaičius. Pirmuoju atveju a išskaidytas pirminio skaičiaus sandauga. Antruoju atveju egzistuoja tokie natūralieji skaičiai $1 < a' < a$ ir $1 < a'' < a$, kad $a = a' \cdot a''$. Kadangi remiantis padaryta prielaida natūralieji skaičiai a' ir a'' yra išskaidomi pirminių skaičių sandauga, tai ir natūralusis skaičius a yra išskaidomas pirminių skaičių sandauga.

Vienetinumas. Natūraliojo skaičiaus skaidinio pirminių skaičių sandauga vienetinumą įrodysime matematinės indukcijos metodu.

Skaičiaus 1 skaidinys pirminiais skaičiais tuščias.

Sakykime, kad kiekvienas natūralusis skaičius a', $1 < a' < a$, vienareikšmiškai išskaidomas pirminių skaičių sandauga (indukcinė prielaida).

Įrodysime, kad ir skaičius a vienareikšmiškai išskaidomas pirminių skaičių sandauga.

Tarkime,

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s, \tag{1}$$

čia p_i, q_j, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$, – pirminiai skaičiai. Įrodysime, kad $r = s$ ir $p_i = q_{j_i}$, $1 \leq i \leq r$, čia $j_1, j_2, \ldots, j_r$ yra skaičių $1, 2, \ldots, r$ perstatinys.

Kadangi $p_1 \mid a$, tai $p_1 \mid q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$. Jei $p_1 \neq q_1$, tai $p_1 \mid q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$. Pakartoję šį samprotavimą, gauname, jog egzistuoja toks j_1, kad $p_1 = q_{j_1}$. (1)-os lygybės abi puses suprastinę iš p_1, gauname:

$$a' = p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot \ldots \hat{q}_{j_1} \ldots \cdot q_s,$$

čia stogelis virš q_{j_1}, t. y. $\hat{q}_{j_1}$ reiškia, kad pirminio skaičiaus q_{j_1} sandaugoje nėra. Kadangi $a' < a$, tai remdamiesi indukcine prielaida, gauname: $r = s$, $p_i = q_{j_i}$, $2 \leq i \leq r$. $\triangle$

Pastabos.

1. Kaip žinome, į skaičiaus 1 skaidinį neįeina nė vienas pirminis skaičius.

2. Vienas ir tas pats pirminis skaičius p skaičiaus a skaidinyje pirminiais skaičiais gali pasikartoti. Skaičiaus p pasikartojimų skaičius α skaičiaus a skaidinyje yra vadinamas pirminio skaičiaus p kartotinumu. Atsižvelgę į pirminių skaičių kartotinumus skaičiaus a skaidinyje pirminiais skaičiais, galime parašyti

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m},$$

čia p_1, p_2, …, p_m – skirtingi pirminiai skaičiai, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, …, $\alpha_m > 0$ – jų kartotinumai. Šis vienintelis skaičiaus a skaidinys pirminiais skaičiais yra vadinamas **kanoniniu**. Analogiškai kiekvienas sveikasis skaičius $a \neq 0$ vienareikšmiškai yra užrašomas taip:

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}.$$

3. Jei $a \neq 0$ yra racionalusis skaičius, tai jis vieninteliu būdu užrašomas taip:

$$a = \pm \frac{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}}{q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{\beta_s}},$$

čia p_1, p_2, ..., p_r, q_1, q_2, ..., q_s – skirtingi pirminiai skaičiai, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, ..., $\alpha_r > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, ..., $\beta_s > 0$ – natūralieji skaičiai. Tarę, kad sveikieji skaičiai $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, ..., $\alpha_t \neq 0$ gali būti tiek teigiami, tiek neigiami, racionaliojo skaičiaus $a \neq 0$ skaidinys pirminiais skaičiais gali būti ir taip užrašomas:

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}.$$

Žymėjimai. Sutarkime naudoti žymėjimus:

1. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$.

2. $\binom{n}{j} = C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$, $0 \leq j \leq n$, $0! = 1$.

3. Jei $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_r)$, j_1, $j_2, \ldots$, $j_r \geq 0$, tai $\mathbf{j}! = j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_r!$.

4. $\binom{n}{\mathbf{j}} = \frac{n!}{\mathbf{j}!}$, čia $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_r)$, $j_1 + j_2 + \ldots + j_r = n$.

5. Jei $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_r)$, j_1, $j_2, \ldots$, $j_r \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$, tai

$$\mathbf{a}^{\mathbf{j}} = a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_r^{j_r}.$$

6. Niutono binomo koeficientą $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$, $0 \leq j \leq n$, $0! = 1$, galima apibrėžti ir neigiamiems sveikiesiems skaičiams $-n$, čia $n > 0$. Tik šiuo atveju naudokimės tokia lygybe:

$$\binom{n}{j} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-j+1)}{j!}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Tuomet

$$\binom{-n}{j} = \frac{-n \cdot (-n-1) \cdot \ldots \cdot (-n-j+1)}{j!} =$$

$$(-1)^j \frac{(n+j-1) \cdot (n+j-2) \cdot \ldots \cdot n)}{j!} = (-1)^j \binom{n+j-1}{j}.$$

Pratimai.

1. Matematinės indukcijos metodu įrodykite Niutono binomo formulę:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}.$$

2. Matematinės indukcijos metodu įrodykite formulę:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = \sum_{\substack{j_1,\, j_2, \ldots,\, j_r \geq 0 \\ j_1 + j_2 + \ldots + j_r = n}} \binom{n}{\mathbf{j}} \mathbf{a}^{\mathbf{j}},$$

čia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

3. Matematinės indukcijos metodu įrodykite lygybę:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. Raskite lygties $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N$ sveikaisiais neneigiamais skaičiais sprendinių skaičiaus formulę.

Nurodymas: pirmiausia raskite ieškomos formulės išraišką, kai $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, po to pabandykite atspėti galutinę formulės išraišką ir matematinės indukcijos metodu įrodyti, kad teisingai ją atspėjote.

5. 4-ąjį pratimą galima ir kitaip spręsti. Lygties $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N$ sprendinių skaičius sveikaisiais neneigiamais skaičiais yra lygus nelygybės

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \leq N \tag{1}$$

sprendinių skaičiui sveikaisiais neneigiamais skaičiais. Tegu skaičių rinkinys $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ yra 1-os nelygybės sprendinys. Sudarykime tokią skaičių seką:

$$1 \leq a_1 + 1 = b_1 < a_1 + a_2 + 2 = b_2 < \ldots < a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = b_{n-1} \leq N + n - 1.$$

Akivaizdu, kad žinodami skaičių b_j, $1 \leq j \leq n-1$, seką

$$1 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1} \leq N + n - 1, \tag{2}$$

vienareikšmiškai galime apibrėžti 1-os nelygybės sprendinį $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Keliais būdais galime išrinkti skaičių b_j, $1 \leq j \leq n-1$, seką, tenkinančią 2-ąsias nelygybes? Galima ir kitaip paklausti: keliais būdais galime išrinkti $n-1$ skaičių iš $N+n-1$ skaičių? Atsakymas: $\binom{N+n-1}{n-1}$.

6. Tegu $|a| < 1$. Tuomet begalinės mažėjančios geometrinės progresijos

$$1, a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$$

narių suma yra lygi

$$\sum_{j=0}^{\infty} a^j = (1-a)^{-1}.$$

Įrodykite, kad

$$(1-a)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-n}{j} (-1)^j a^j = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} a^j.$$