II skyrius. KOMPOZICIJOS DĖSNIAI

1. Vidiniai kompozicijos dėsniai

1. 1. Viena iš pagrindinių sąvokų norint apibrėžti algebrines struktūras aibėse yra kompozicijos dėsnio sąvoka. Apibrėžiami dviejų tipų kompozicijos dėsniai: vidiniai ir išoriniai. Dabar nagrinėsime tik vidinius kompozicijos dėsnius, kurie dažnai dar yra vadinami ir binariosiomis operacijomis. Vidinius kompozicijos dėsnius paprastumo dėlei vadinsime kompozicijos dėsniais. Vėliau nagrinėsime ir išorinius kompozicijos dėsnius.

Apibrėžimas. Atvaizdis $f : X \times X \to X$ yra vadinamas aibės X elementų kompozicijos dėsniu (binariąja operacija), apibrėžtu (apibrėžta) aibėje X. Elementas $f(x_1, x_2) \in X$ yra vadinamas aibės X elementų x_1, x_2 kompozicija, o x_1, x_2 – komponuojamaisiais elementais.

Pastaba. Yra nagrinėjami ir dalinai apibrėžti kompozicijos dėsniai, t. y. , kai atvaizdžio f apibrėžimo sritis yra aibės $X \times X$ poaibis. Pavyzdžiui, atimtis $-$ natūraliųjų skaičių aibėje $\mathbb{N}$ dalinai apibrėžta: atvaizdžio $- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ apibrėžimo sritis yra $D(-) = \{(a, b) \mid \ a > b,\ a, b \in \mathbb{N}\}$. Mes dalinai apibrėžtų kompozicijos dėsnių nenagrinėsime. Kompozicijos dėsnį f, apibrėžtą aibėje X, paprastumo dėlei vadinsime kompozicijos dėsniu aibėje X.

Jei f – komozicijos dėsnis aibėje X, tai kiekvienam sutvarkytam aibės X elementų dvejetui (x_1, x_2), remiantis f apibrėžimu, yra priskiriamas vienas ir tik vienas aibės X elementas $f(x_1, x_2)$. Pavyzdžiui, sudėtis $+$, daugyba $\cdot$ skaičių aibėse $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ yra kompozicijos dėsniai. Tik skaičių sudėties, daugybos atvejais vietoje $+(a, b)$, $\cdot(a, b)$ įprasta rašyti $a + b$, $a \cdot b$. Mes dažniausiai kompozicijos dėsnius žymėsime $+$, $\cdot$, $\circ$, $*$, ar dar kitokiais ženklais ir, kaip ir skaičių sudėties ir daugybos atvejais, rašysime juos tarp komponuojamųjų elementų: $x + y$, $x \cdot y$, $x * y$, $x \circ y$ ir t. t. (o taip pat dažnai kompozicijos dėsnio ženklą tarp komponuojamųjų elementų ir praleisime, kai aišku, kokį kompozicijos dėsnį nagrinėjame). Kartais kompozicijos ženklą patogu rašyti ir prieš komponuojamųjų elementų porą: $\min(a, b)$, $\max(a, b)$ ir t. t.. Aibę X su joje apibrėžtu kompozicijos dėsniu $*$ sutarkime žymėti $(X, *)$.

Pavyzdžiai.

1. Anksčiau minėjome, kad skaičių sudėtis $+$ ir skaičių daugyba $\cdot$ yra kompozicijos dėsniai aibėse $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Skaičių daugyba $\cdot$ yra kompozicijos dėsnis ir aibėse $\mathbb{Q}^* =: \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Tarkime, kad $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Atvaizdis

$$\min : X \times X \to X,\ \min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{jei } x \leq y \\ y, & \text{jei } x > y \end{cases},$$

$x, y \in X$, yra kompozicijos dėsnis aibėje X. Atvaizdis

$$\max : X \times X \to X,\ \max = \begin{cases} x, & \text{jei } x \geq y \\ y, & \text{jei } x < y \end{cases},$$

$x, y \in X$, taip pat yra kompozicijos dėsnis aibėje X.

3. Skaičių atimtis $-$ nėra kompozicijos dėsnis aibėje $\mathbb{N}$, bet yra kompozicijos dėsnis aibėse $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

4. Apibrėžkime atvaizdį

$$\sqcup : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (a,b) \mapsto a \sqcup b,\ a, b \in \mathbb{N},$$

$a \sqcup b$ – skaičių a ir b didžiausias bendrasis daliklis. $\sqcup$ yra kompozicijos dėsnis aibėje $\mathbb{N}$.

5. Apibrėžkime atvaizdį

$$\sqcap : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (a,b) \mapsto a \sqcap b,\ a, b \in \mathbb{N},$$

$a \sqcap b$ – skaičių a ir b mažiausias bendrasis kartotinis. $\sqcap$ yra kompozicijos dėsnis aibėje $\mathbb{N}$.

Štai keletas kompozicijos dėsnių, svarbių aibių teorijoje, pavyzdžių. Tarkime, kad X – aibė, $\mathbf{P}(X)$ – aibės X visų poaibių aibė ($\mathbf{P}(X)$ taip pat yra žymima ir 2^X).

6. Aibių sudėtis $\cup$ – kompozicijos dėsnis aibėje $\mathbf{P}(X)$.

7. Aibių daugyba $\cap$ – kompozicijos dėsnis aibėje $\mathbf{P}(X)$.

8. Aibių atimtis $\setminus$ – kompozicijos dėsnis aibėje $\mathbf{P}(X)$.

9. Aibių simetrinė atimtis $\ominus$ – kompozicijos dėsnis aibėje $\mathbf{P}(X)$.

10. Atvaizdžių kompozicija $\circ$ – kompozicijos dėsnis aibėje X^X, čia X^X – visų atvaizdžių $f : X \to X$ aibė.

11. Pavyzdžiui, jei $X = \{a, b\}$, tai visus kompozicijos dėsnius aibėje X apibrėžkime lentelėmis.

$*_1$	a	b
a	a	a
b	a	a

$*_2$	a	b
a	b	a
b	a	a

$*_3$	a	b
a	a	b
b	a	a

$*_4$	a	b
a	a	a
b	b	a

$*_5$	a	b
a	a	a
b	a	b

$*_6$	a	b
a	b	b
b	a	a

$*_7$	a	b
a	b	a
b	b	a

$*_8$	a	b
a	a	b
b	b	a

$*_9$	a	b
a	b	a
b	a	b

$*_{10}$	a	b
a	a	a
b	b	b

$*_{11}$	a	b
a	a	b
b	a	b

$*_{12}$	a	b
a	a	b
b	b	b

$*_{13}$	a	b
a	b	a
b	b	b

$*_{14}$	a	b
a	b	b
b	b	a

$*_{15}$	a	b
a	b	b
b	a	b

$*_{16}$	a	b
a	b	b
b	b	b

Dar sykį atidžiai pažiūrėkime į 16-ką lentelių, kuriomis apibrėžiami kompozicijos dėsniai aibėje $X = \{a, b\}$. Pavyzdžiui, kompozicijos dėsniai $*_1$ ir $*_{16}$, $*_2$ ir $*_{14}$, $*_3$ ir $*_{15}$ ir t. t. tam tikra prasme mažai kuo skiriasi. Aibės X elementai a ir b lygiaverčiai ir jei elementą a pažymėtume raide b, o b – raide a, tai lentelė, kuria yra apibrėžiamas $*_1$, apibrėžtų kompozicijos dėsnį $*_{16}$, o lentelė, kuri apibrėžia $*_{16}$, apibrėžtų kompozicijos dėsnį $*_1$ it t. t..

1. 2. Izomorfiniai kompozicijos dėsniai. Jei aibė X turi n elementų, tai galime sudaryti iš viso n^{n^2} lentelių, kuriomis yra apibrėžiami visi atvaizdžiai $f : X \times X \to X$, t. y. visi kompozicijos dėsniai aibėje X. Bet ne visi taip apibrėžti kompozicijos dėsniai yra iš esmės skirtingi.

Pateiksime apibrėžimą, kuriuo remiantis skirtingai apibrėžtus kompozicijos dėsnius ir net skirtingose aibėse tam tikra prasme galima neskirti, t. y. sutapatinti.

Apibrėžimas. Aibė X su joje apibrėžtu kompozicijos dėsniu $*$ yra vadinama izomorfine aibei Y su joje apibrėžtu kompozicijos dėsniu $\circ$, jei egzistuoja tokia bijekcija $f : X \to Y$, kad bet kuriems $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1 * x_2) = f(x_1) \circ f(x_2)$.

Bijekcija f yra vadinama izomorfizmu iš aibės $(X, *)$ į aibę $(Y, \circ)$. Jei $(X, *)$ yra izomorfinė $(Y, \circ)$, tai sutarkime žymėti $(X, *) \cong (Y, \circ)$. Tuo atveju, kai $X = Y$ ir $(X, *)$ yra izomorfinė $(X, \circ)$, paprastumo dėlei kompozicijos dėsnius $*$ ir $\circ$ vadinsime izomorfiniais.

Pavyzdžiui, anksčiau aibėje a, b apibrėžti lentelėmis kompozicijos dėsniai $*_1$ ir $*_{16}$, $*_2$ ir $*_{14}$, $*_3$ ir $*_{15}$ yra izomorfiniai.

Jei aibė X turi n elementų, tai, kaip minėjome anksčiau, galima sudaryti iš viso n^{n^2} lentelių, apibrėžiančių visus kompozicijos dėsnius aibėje X. Akivaizdu, kad neizomorfinių kompozicijos dėsnių aibėje X yra mažiau nei n^{n^2}, bet kiek, nėra žinoma.

2. Asociatyvūs kompozicijos dėsniai

2. 1. Pastebėsime, kad aibėje $(X, *)$, remiantis kompozicijos dėsnio apibrėžimu, galima sukomponuoti tik bet kuriuos du aibės X elementus. Norėdami apibrėžti trijų aibės X elementų x_1, x_2, x_3 kompoziciją, privalome nurodyti, kuria tvarka turi būti atliekami kompozicijos veiksmai. Pavyzdžiui, užrašas $x_1 * x_2 * x_3$ neturi prasmės. Užrašui $x_1 * x_2 * x_3$ galime suteikti prasmę, suskliaudę vienaip ar kitaip elementus: $(x_1 * x_2) * x_3$ ar $x_1 * (x_2 * x_3)$. Pavyzdžiui, pirmuoju atveju iš pradžių atliekame kompozicijos veiksmą $x_1 * x_2$ su elementais x_1, x_2, o po to, sukomponuojame elementus $x_1 * x_2$ ir x_3. Antruoju atveju iš pradžių atliekame kompozicijos veiksmą $x_2 * x_3$ su elementais x_2, x_3, o po to, sukomponuojame elementus x_1 ir $x_2 * x_3$. Rezultatai, taip atlikus veiksmus, gali skirtis. Nagrinėkime, pavyzdžiui, atimtį $-$ sveikųjų skaičių aibėje $\mathbb{Z}$. Akivaizdu, kad $(5 - 3) - 4 \neq 5 - (3 - 4)$.

Kaip minėjome, užrašas $x_1 * x_2 * x_3$ neturi prasmės, jei nenurodyta skliausteliais, kuria tvarka turi būti atlikti kompozicijos veiksmai. Tuo labiau prasmės neturi užrašas $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$. Norėdami apibrėžti n elementų x_1, x_2, …, x_n kompoziciją, tai galime padaryti reiškinyje

$x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ kuriuo nors būdu sudėlioję skliaustelius, pavyzdžiui, $\underbrace{((\ldots(}_{n-1} x_1 * x_2) * x_3) * \ldots * x_{n-1}) * x_n$ ar $x_1 * (x_2 * (\ldots * (x_{n-1} * x_n \underbrace{)) \ldots)}_{n-1}$ ar dar kaip nors kitaip. Taigi nuo skliaustelių sudėliojimo tvarkos reiškinyje $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ priklauso n elementų, $n \geq 3$, kompozicijos apibrėžimas.

Apibrėžimas. Kompozicijos dėsnis $*$ aibėje X yra vadinamas asociatyviu, jei bet kuriems x, y, $z \in X$,

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

2. 2. Jei kompozicijos dėsnis $*$ aibėje X asociatyvus, tai bet kurių trijų elementų x, y, $z \in X$ kompozicija $x * y * z$ vienareikšmiškai apibrėžta ir nuo skliaustelių sudėliojimo tvarkos nepriklauso, t. y. skliausteliai nebūtini veiksmų tvarkai nurodyti. Kalbant apie aibės X n elementų x_1, x_2, ..., x_n kompoziciją, kai $n > 3$, visiškai neakivaizdu, ar rezultatas priklauso, ar ne nuo skliaustelių sudėliojimo tvarkos reiškinyje $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$.

Teorema. Jei kompozicijos dėsnis $*$ aibėje X yra asociatyvus, tai bet kurių n elementų $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, $n \geq 3$, kompozicija $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ vienareikšmiškai apibrėžta, t. y. nuo skliaustelių išdėstymo tvarkos reiškinyje $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ nepriklauso.

Įrodymas. Teoremos teiginį įrodysime matematinės indukcijos metodu pagal komponuojamųjų elementų skaičių n. Kai $n = 3$, teoremos teiginys teisingas (tai asociatyvaus kompozicijos dėsnio apibrėžimas). Tarkime, kad teoremos teiginys yra teisingas, kai komponuojamųjų elementų yra mažiau nei n. Įrodysime, kad teoremos teiginys yra teisingas ir tuo atveju, kai komponuojamųjų elementų yra n.

Apibrėžiant n elementų x_1, x_2, ..., x_n kompoziciją kuriuo nors būdu, skliausteliai reiškinyje $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ yra išdėstomi taip, kad kiekvieno žingsnio metu kompozicijos veiksmą galėtume atlikti tik su dviem gretimais suskliaustais elementais. Po kiekvieno žingsnio komponuojamųjų elementų skaičius sumažėja vienetu. Tarkime, kad pasirinkome kuriuos nors du skirtingus skliaustelių išdėstymo būdus reiškinyje $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ ir paskutiniojo žingsnio metu vienu ir kitu atveju kompozicijos veiksmai yra atliekami taip:

i) $(x_1 * \ldots * x_i) * (x_{i+1} * \ldots * x_n)$ ir

ii) $(x_1 * \ldots * x_j) * (x_{j+1} * \ldots * x_n)$, čia $1 \leq i, j \leq n$. Pagal indukcinę prielaidą elementai

$$x_1 * \ldots * x_i,\ x_{i+1} * \ldots * x_n,\ x_1 * \ldots * x_j,\ x_{j+1} * \ldots * x_n$$

vienareikšmiškai yra apibrėžti. Tarkime, kad $i < j$. Tuomet vienu ir kitu atvejais galime užrašyti:

$$(x_1 * \ldots * x_i) * ((x_{i+1} * \ldots * x_j) * (x_{j+1} * \ldots * x_n))$$

ir

$$((x_1 * \ldots * x_i) * (x_{i+1} * \ldots * x_j)) * (x_{j+1} * \ldots * x_n).$$

Pažymėję $x = x_1 * \ldots * x_i$, $y = x_{i+1} * \ldots * x_j$ ir $z = x_{j+1} * \ldots * x_n$, gauname:

$$(x_1 * \ldots * x_i) * ((x_{i+1} * \ldots * x_j) * (x_{j+1} * \ldots * x_n)) = x * (y * z)$$

ir

$$((x_1 * \ldots * x_i) * (x_{i+1} * \ldots * x_j)) * (x_{j+1} * \ldots * x_n) = (x * y) * z.$$

Kadangi kompozicijos dėsnis $*$ aibėje X yra asociatyvus, tai $x * (y * z) = (x * y) * z$, t. y.

$$(x_1 * \ldots * x_i) * (x_{i+1} * \ldots * x_n) = (x_1 * \ldots * x_j) * (x_{j+1} * \ldots * x_n). \ \triangle$$

Pavyzdžiai.

1. Atimtis aibėse $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nėra asociatyvi.

2. Dalyba : aibėse $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nėra asociatyvi.

3. Aibių atimtis $\setminus$ aibėje $\mathbf{P}(X)$, čia X – kuri nors aibė, nėra asociatyvi.

4. Kompozicijos dėsniai min, max aibėse $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ yra asociatyvūs.

5. Kompozicijos dėsniai $\sqcup$, $\sqcap$ aibėje $\mathbb{N}$ yra asociatyvūs.

6. Simetrinė aibių atimtis $\ominus$ aibėje $\mathbf{P}(X)$, čia X – kuri nors aibė, yra asociatyvi. Įsitikinkite!

7. Aibių sudėtis $\cup$ ir daugyba aibėje $\mathbf{P}(X)$, čia X – kuri nors aibė, yra asociatyvūs kompozicijos dėsniai.

8. Apibrėžkime kompozicijos dėsnį aibėje $\mathbb{N}$ taip:

$$* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ (a, b) \mapsto a * b =: a^b, \ a, b \in \mathbb{N}.$$

Šis kompozicijos dėsnis nėra asociatyvus.

9. Atvaizdžių kompozicija $\circ$ aibėje X^X, čia X – kuri nors netuščia aibė, X^X – visų atvaizdžių $f : X \to X$ aibė, yra asociatyvi.

3. Indukuotieji kompozicijos dėsniai

3. 1. Sakykime, Y yra aibės X netuščias poaibis, $*$ – aibės X elementų kompozicijos dėsnis.

Apibrėžimas. Aibės X poaibis Y yra vadinamas stabiliu aibės X elementų kompozicijps dėsnio $*$ atžvilgiu, jei bet kuriems y_1, $y_2 \in Y$, $y_1 * y_2 \in Y$.

Jei aibės X poaibis Y yra stabilus kompozicijos dėsnio $*$ aibėje X atžvilgiu, tai kompozicijos dėsnio $* : X \times X \to X$ siaurinys $*\big|_{Y \times Y} : Y \times Y \to Y$ yra kompozicijos dėsnis aibėje Y, vadinamas kompozicijos dėsnio $*$ indukuotoju dėsniu aibėje Y. Indukuotąjį kompozicijos dėsnį aibėje Y žymėsime taip pat, kaip aibės X elementų kompozicijos dėsnį $*$, t. y. nerašysime atvaizdžio siaurinio ženklo $\big|_{Y \times Y}$. Jei aibės X netuščias poaibis Y yra stabilus aibės X elementų kompozicijos dėsnio $*$ atžvilgiu, tai rašysime $(Y, *) \subset (X, *)$.

Pavyzdžiai.

1. Nagrinėkime skaičių sudėtį $+$ aibėje $\mathbb{Z}$. Poaibis $n\mathbb{Z}$ (priminsime: $n\mathbb{Z} = \{nl \mid l \in \mathbb{Z}\}$), čia n – kuris nors fiksuotas natūralusis skaičius, yra stabilus sudėties $+$ atžvilgiu. Poaibis $1 + 2\mathbb{Z}$ (nelyginių skaičių poaibis) nėra stabilus sudėties $+$ atžvilgiu.

2. Nagrinėkime skaičių daugybą $\cdot$ aibėje $\mathbb{Z}$. Poaibis $n\mathbb{Z}$, čia n – kuris nors fiksuotas natūralusis skaičius, yra stabilus daugybos $\cdot$ atžvilgiu. Poaibis $1 + 2\mathbb{Z}$ taip pat stabilus daugybos $\cdot$ atžvilgiu, tuo tarpu poaibis $2+3\mathbb{Z}$ ($2+3\mathbb{Z} = \{2+3l \mid l \in \mathbb{Z}\}$) nėra stabilus daugybos $\cdot$ atžvilgiu.

3. Tarkime, X – netuščia aibė, o X^X – visų atvaizdžių $f : X \to X$ aibė. Pažymėkime $\mathcal{A}ut(X)$ aibės X^X poaibį, sudarytą iš visų bijekcijų $f : X \to X$. Aibės X^X poaibis $\mathcal{A}ut(X)$ yra stabilus atvaizdžių kompozicijos $\circ$ atžvilgiu, t. y., jei $f, g \in \mathcal{A}ut(X)$, tai $f \circ g \in \mathcal{A}ut(X)$.

4. Akivaizdu, jei Y – aibės X netuščias poaibis, tai $\mathbf{P}(Y)$ stabilus aibės $\mathbf{P}(X)$ poaibis aibių sudėties $\cup$ ir daugybos $\cap$ atžvilgiu.

Teiginys. Aibės X elementų asociatyvus kompozicijos dėsnis * stabiliame aibės X $*$ atžvilgiu poaibyje Y indukuoja asociatyvų kompozicijos dėsnį.

Įrodymas. Šio teiginio įrodymas akivaizdus.

4. Faktorkompozicijos dėsniai

4. 1. Sakykime, aibėje X yra apibrėžtas kompozicijos dėsnis $*$ ir ekvivalentumo sąryšis R.

Apibrėžimas. Kompozicijos dėsnis $*$ ir ekvivalentumo sąryšis R, apibrėžti aibėje X yra vadinami suderintais, jei

$$x_1 \equiv x_2(\text{mod } R),\ x_3 \equiv x_4(\text{mod } R) \Longrightarrow x_1 * x_3 \equiv x_2 * x_4(\text{mod } R).$$

Jei kompozicijos dėsnis $*$ ir ekvivalentumo sąryšis R, apibrėžti aibėje X yra suderinti, tai galima apibrėžti kompozicijos dėsnį $*$ aibės X pagal ekvivalentumo sąryšį R faktoraibėje X/R:

$$(x_1(\text{mod}R)) * (x_2(\text{mod}R)) =: x_1 * x_2(\text{mod}R).$$

Šis apibrėžimas nepriklauso nuo atstovų x_1 ir x_2 iš ekviavlentumo klasių

$$x_1(\text{mod}R) \quad \text{ir} \quad x_2(\text{mod}R)$$

išrinkimo. Taip apibrėžtas kompozicijos dėsnis $*$ faktoraibėje X/R yra vadinamas kompozicijos dėsnio $*$, apibrėžto aibėje X, pagal ekvivalentumo sąryšį R faktordėsniu.

Pavyzdžiai.

1. Skaičių sudėtis $+$ ir ekvivalentumo sąryšis $R_n = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a - b \in n\mathbb{Z}\}$, čia n – fiksuotas natūralusis skaičius, aibėje $\mathbb{Z}$ yra suderinti. Sudėtis faktoraibėje

$$Z_n = \mathbb{Z}/R_n = \{n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \ldots, n - 1 + n\mathbb{Z}\}$$

apibrėžiama taip: $(i+n\mathbb{Z})+(j+n\mathbb{Z}) =: i+j+n\mathbb{Z}$, $i, j \in \mathbb{Z}$ (priminsime, kad $a+n\mathbb{Z} = b+n\mathbb{Z}$ tada ir tik tada, kai $n|\ a-b$, t. y. n dalija $a-b$). 2. Skaičių daugyba $\cdot$ ir ekvivalentumo sąryšis R_n, kaip ir pirmajame pavyzdyje, aibėje $\mathbb{Z}$ yra suderinti. Daugyba $\cdot$ faktoraibėje $Z_n = \mathbb{Z}/R_n$ apibrėžiama taip: $(i + n\mathbb{Z}) \cdot (j + n\mathbb{Z}) =: i \cdot j + n\mathbb{Z}$, $i, j \in \mathbb{Z}$.

4. 2.Teiginys. Jei aibės X elementų kompozicijos dėsnis $*$ yra asociatyvus ir yra suderintas su ekvivalentumo sąryšiu R, apibrėžtu aibėje X, tai kompozicijos dėsnio $*$ pagal R faktorkompozicijos dėsnis $*$ faktoraibėje X/R yra asociatyvus.

Įrodymas. Šio teiginio įrodymas akivaizdus ir paliekamas skaitytojui.

5. Neutralus elementas. Simetriniai elementai

5. 1. Neutralus elementas.

Apibrėžimas. Tarkime, kad $*$ yra aibės X elementų kompozicijos dėsnis. Aibės X elementas e yra vadinamas neutraliuoju kompozicijos dėsnio $*$ atžvilgiu, jei kiekvienam $x \in X$, $e * x = x * e = x$.

Teiginys. Aibėje X šios aibės elementų kompozicijos dėsnio $*$ atžvilgiu gali egzistuoti ne daugiau kaip vienas neutralus elementas.

Įrodymas. Sakykime, e ir e' aibės X elementų kompozicijos dėsnio $*$ atžvilgiu yra neutralūs elementai. Tuomet $e' = e' * e = e$. $\triangle$

Pavyzdžiai.

1. Aibėje $\mathbb{Z}$ (o taip pat ir aibėse $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) skaičių sudėties $+$ atžvilgiu 0 yra neutralus elementas.

2. Aibėje $\mathbb{Z}$ (o taip pat ir aibėse $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$) skaičių daugybos $\cdot$ atžvilgiu 1 yra neutralus elementas.

3. Tuščia aibė yra aibės $\mathbf{P}(X)$ neutralus elementas simetrinės atimties $\ominus$ atžvilgiu.

4. Tapatusis atvaizdis id $\in \mathcal{A}$ut(X), čia X – netuščia aibė, $\mathcal{A}ut(X)$ – visų bijekcijų $f : X \to X$ aibė, yra neutralus elementas atvaizdžių kompozicijos $\circ$ atžvigiu.

Susitarimas. Tuo atveju, kai aibės X elementų kompozicijos dėsnį žymėsime $+$ (arba $\cdot$) ir šio kompozicijos dėsnio atžvilgiu aibėje X egzistuos neutralus elementas, tai šį elementą žymėsime 0 (arba 1) ir vadinsime nuliumi (arba vienetu).

5. 2. Simetrinis elementas.

Apibrėžimas. Tarkime, $*$ yra aibės X elementų kompozicijos dėsnis, e – šio kompozicijos dėsnio atžvilgiu neutralus elementas. Elementas $x' \in X$ yra vadinamas simetriniu elementu elementui $x \in X$, jei $x' * x = x * x' = e$.

Teiginys. Sakykime, aibės X elementų kompozicijos dėsnis $*$ yra asociatyvus ir šio kompozicijos dėsnio atžvilgiu egzistuoja neutralus elementas e. Tuomet kiekvienam aibės X elementui gali egzistuoti ne daugiau kaip vienas simetrinis elementas.

Įrodymas. Tarkime, kad elementui $x \in X$ egzistuoja simetriniai elementai $x', x'' \in X$. Tuomet $x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$. $\triangle$

Pavyzdžiai.

1. Kiekvienam aibės $(\mathbb{Z}, +)$ (o taip pat ir aibių $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$) elementui a egzistuoja simetrinis elementas $-a$.

2. Kiekvienam aibės $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ (o taip pat ir aibės $(\mathbb{R}^*, \cdot)$) elementui a egzistuoja simetrinis elementas a^{-1}.

3. Nagrinėkime aibę $\mathbf{P}(X)$ ir joje simetrinę aibių atimtį $\ominus$. Kiekvienam aibės $\mathbf{P}(X)$ elementui A simetrinis elementas egzistuoja ir yra lygus A. Iš tikrųjų, $A \ominus A = \emptyset$.

4. Nagrinėkime aibę $\mathcal{A}ut(X)$, čia X – netuščia aibė, ir joje apibrėžtą atvaizdžių kompoziciją $\circ$. Kiekvienam aibės $\mathcal{A}ut(X)$ elementui f egzistuoja simetrinis elementas $f^{-1} \in \mathcal{A}ut(X)$. Iš tikrųjų, $f \in \mathcal{A}ut(X)$ tada ir tik tada, kai atvaizdis $f : X \to X$ yra bijekcija. Vadinasi, egzistuoja $f^{-1} \in \mathcal{A}ut(X)$ ir $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$.

Susitarimas. Sakykime, kad aibės X elementų kompozicijos dėsnis yra žymimas $+$ (arba $\cdot$) ir šio kompozicijos dėsnio atžvilgiu egzistuoja neutralus elementas 0 (arba 1). Tuomet elementui $x \in X$ simetrinį elementą, jei jis tik egzistuoja, žymėsime $-x$ (arba x^{-1}) ir vadinsime priešingu (atvirkštiniu) elementu elementui x.

5. 3. Komutatyvūs kompozicijos dėsniai.

Apibrėžimas. Aibės X elementų kompozicijos dėsnis $*$ yra vadinamas komutatyviuoju, bet kuriems elementams $x, y \in X$, $x * y = y * x$.

Pavyzdžiai.

1. Skaičių sudėtis $+$ aibėje $\mathbb{N}$ (o taip pat ir aibėse $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) yra komutatyvus kompozicijos dėsnis.

2. Skaičių daugyba $\cdot$ aibėje $\mathbb{N}$ (o taip pat ir aibėse $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$) yra komutatyvus kompozicijos dėsnis.

3. Simetrinė aibių atimtis $\ominus$ aibėje $\mathbf{P}(X)$, čia X – kuri nors aibė, yra komutatyvus kompozicijos dėsnis.

4. Aibės $\mathcal{A}ut(X)$ elementų kompozicijos dėsnis $\circ$ ($\circ$ – atvaizdžių kompozicijos dėsnis) nėra komutatyvus, kai $|X| \geq 3$. Iš tikrųjų. Imkime tris skirtingus aibės X elementus x_1, x_2, x_3 ir nagrinėkime bijekcijas $f : X \to X$, $g : X \to X$, apibrėžtas taip:

$f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_1$, $f(x) = x$, kai $x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ ir
$g(x_2) = x_3$, $g(x_3) = x_2$, $g(x) = x$, kai $x \in X \setminus \{x_2, x_3\}$.

Tuomet

$$(f \circ g)(x_1) = f(g(x_1)) = f(x_1) = x_2,$$
$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(x_2) = x_3,$$

t. y. $f \circ g \neq g \circ f$.

6. Išoriniai kompozicijos dėsniai

6. 1.Išorinio kompozicijos dėsnio apibrėžimas. Aibės Ω, vadinamos operatorių aibe, elementų ir aibės X elementų išoriniu kompozicijos dėsniu yra vadinamas atvaizdis $f : \Omega \times X \to X$. Aibės Ω elementai yra vadinami operatoriais. Operatoriaus $\alpha \in \Omega$ ir aibės X elemento x kompozicija yra vadinama funkcijos f reikšmė $f(\alpha, x) \in X$.

Kaip ir vidinio kompozicijos dėsnio atveju sakysime, kad išorinis kompozicijos dėsnis f apibrėžtas aibėje X, o Ω – išorinio kompozicijos dėsnio f operatorių aibė.

Tuo atveju, kai $\Omega = X$, išorinis kompozicijos dėsnis f yra vidinis kompozicijos dėsnis, apibrėžtas aibėje X. Taigi vidinio kompozicijos dėsnio sąvoka yra išoronio kompozicijos dėsnio sąvokos atskiras atvejis.

Išorinius kompozicijos dėsnius, kaip ir vidinius, žymėsime $\cdot$, $*$, $\circ$, ar dar kitokiais ženklais ir rašysime (o dažniausiai praleisime) tarp komponuojamųjų elementų: operatoriaus $\alpha \in \Omega$ ir elemento $x \in X$. Kai kuriais atvejais apibrėšime ir kitokius išorinio kompozicijos dėsnio ženklus, patogius konkrečiose situacijose. Pavyzdžiui, elementų $\alpha \in \Omega$ ir $x \in X$ kompoziciją galima žymėti x^α.

6. 2. Stabilus poaibis. Sakykime, $*$ – opratorių aibės Ω ir aibės X elementų išorinis kompozicijos dėsnis, $A \subset \Omega$, $Y \subset X$. Apibrėžkime $A * Y =: \{\alpha y \mid \alpha \in \Omega, y \in Y\}$. Akivaizdu, kad $A * X \subset X$. Šiuo atveju operatorių aibę Ω susiaurinome iki aibės A.

Apibrėžimas. Sakykime, $*$ – operatorių aibės Ω ir aibės X elementų išorinis kompozicijos dėsnis. Aibės X poaibis $Y \neq \emptyset$ yra vadinamas stabiliu išorinio kompozicijos dėsnio $*$ atžvilgiu, jei $\Omega * Y \subset Y$. Jei aibės X netuščias poaibis Y yra stabilus išorinio kompozicijos dėsnio $*$ atžvilgiu, tai išorinis kompozicijos dėsnis $*$ aibėje X apibrėžia išorinį kompozicijos dėsnį aibėje Y, vadinamą indukuotu išoriniu kompozicijos dėsniu aibėje Y.

Tarkime, kad aibėje X apibrėžtas ekvivalentumo sąryšis R, $*$ – išorinis kompozicijos dėsnis tarp Ω ir X elementų.

Apibrėžimas. Išorinis kompozicijos dėsnis $*$ yra vadinamas suderintu su ekvivalentumo sąryšiu R aibėje X, jei kiekvienam $\alpha \in \Omega$,

$$x \equiv y (\mathrm{mod} R) \Longrightarrow \alpha * x \equiv \alpha * y (\mathrm{mod} R).$$

Šiuo atveju galima apibrėžti išorinį kompozicijos dėsnį $*$ tarp operatorių aibės Ω ir faktoraibės X/R elementų:

$$\alpha * (x (\mathrm{mod} R) =: \alpha * x (\mathrm{mod} R), \ \alpha \in \Omega, \ x \in X.$$

Pavyzdžiai.

1. Tarkime, X – netuščia aibė, $\Omega = X^X$. Operatorių aibės Ω ir aibės X elementų išorinį kompozicijos dėsnį $*$ apibrėšime taip:

$$\Omega \times X \to X, \ (f, x) \mapsto f * x =: f(x), \ f \in \Omega, \ x \in X.$$

2. Kaip ir 1-jame pavyzdyje, $\Omega = X^X$, X – netuščia aibė, $A \subset \Omega$, $A \neq \emptyset$. Operatorių $f \in A$ ir aibės X elementų išorinis kompozicijos dėsnis apibrėžiamas kaip ir 1-jame pavyzdyje (kitaip tariant, operatorių aibę Ω susiaurinome iki aibės A). Dažnai sutinkamas svarbus atvejis, kai $A = \mathcal{A}ut(X)$. Vėliau šį atvejį nagrinėsime nuodugniau.

3. Sakykime, S, X – netuščios aibės, $\Omega = X^X$, $\psi : S \to \Omega$ – atvaizdis. Operatorių aibės S ir aibės X elementų išorinį kompozicijos dėsnį $*$ apibrėžkime taip:

$$S \times X \to X, \ (\alpha, x) \mapsto \alpha * x =: \psi(\alpha)(x), \ \alpha \in S, \ x \in X.$$

7. Algebrinės struktūros

7. 1. Pagrindiniai algebros objektai, kurie intensyviai buvo pradėti tirti maždaug nuo XIX a. vidurio, tai algebrinės struktūros. Pusgrupės, grupės, žiedai, kūnai, tiesinės erdvės, algebros, moduliai, – tai tik nedaugelio algebrinių struktūrų pavadinimai. Dabar apibrėšime abstrakčią, bendrą algebrinės struktūros sąvoką, o vėliau apsiribodami kompozicijos dėsniais, kurie ir yra algebrinės struktūros aibėse pagrindas, apibrėšime konkrečias algebrines struktūras ir suteiksime joms jų pavadinimus.

Apibrėžimas. Algebrinę aibės X struktūrą apibrėžia vienas ar keletas aibės X elementų vidinių kompozicijos dėsnių ir vienas ar keletas operatorių aibių Ω_1, Ω_2, ... ir aibės X elementų išorinių kompozicijos dėsnių. Be to, šie kompozicijos dėsniai gali tenkinti vienokią ar kitokią aksiomų sistemą ir gali būti susieti vieni su kitais įvairiais sąryšiais. Dažniausiai X yra vadinama pagrindine aibe, o operatorių aibės $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$, – pagalbinėmis.

Galima nagrinėti aibės X poaibius Y, $Y \neq \emptyset$, stabilius visų kompozicijos dėsnių aibėje X atžvilgiu ir tuose poaibiuose Y apibrėžti indukuotas algebrines struktūras. Panašiai, galima nagrinėti ekvivalentumo sąryšius R aibėje X, suderintus su visais kompozicijos dėsniais, apibrėžtais aibėje X, ir apibrėžti algebrines faktorstruktūras aibėje X/R. Kai nagrinėsime konkrečias algebrines struktūras, išsamiai, kiek tai bus įmanoma, ir aptarsime indukuotas algebrines struktūras ir algebrines faktorstruktūras tais konkrečiais atvejais.