DISKREČIOJI MATEMATIKA (2 semestras)

KOMBINATORIKOS IR GRAFŲ TEORIJOS PRADMENYS

PROGRAMA

I. KOMBINATORIKA

1. Matematinės indukcijos principas.
2. Dauginimo taisyklė.
3. Gretiniai, kėliniai ir deriniai.
4. Kartotiniai gretiniai.
5. Binominių koeficientų tapatybės.
6. Rėčio principas.
7. Netvarkų uždavinys.
8. Siurjekcijų skaičius.
9. Stirlingo skaičiai.
10. Skirtumo operatorius.
11. Laipsninė generuojanti funkcija.
12. Katalano skaičiai.
13. Eksponentinė generuojanti funkcija.
14. Rekurentieji sąryšiai. Fibonačio skaičiai.
15. Bendra rekurenčiųjų sąryšių teorija.
16. Sudėtinių funkcijų Tayloro koeficientai.
17. Grandininės trupmenos.

II. GRAFŲ TEORIJA

1. Pagrindinės sąvokos
2. Miškas ir medžiai
3. Viena optimizavimo problema
4. Grafo parametrų ryšiai
5. Grafo planarumas
6. Grafo viršūnių spalvinimo problema
7. Medžių skaičius. Priūferio kodas
8. Grafų teorijos ir algebros sąryšiai

LITERATŪRA

1. M.Bloznelis, *Kombinatorikos paskaitų ciklas*, Vilniaus universiteto leidykla, 1996.
2. P.Tannenbaumas, R.Arnoldas, *Kelionės į šiuolaikinę matemaktiką*, TEV, Vilnius, 1995.
3. P.J.Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, 1996.
4. R.Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Longman, 1985 (yra vertimas į rusų k.).
5. B.Bollobás, *Graph Theory*, Springer, 1979.
6. L.Volkmann, *Fundamente der Graphentheorie.* Springer, 1996.
7. V.N.Sačkov, *Įvadas į kombinatorinius diskrečios matematikos metodus*, Nauka, Maskva, 1982 (rusų k.).

I. KOMBINATORIKA

1. Natūralieji skaičiai. Matematinės indukcijos principas

Sunkiausia apibrėžti kombinatorikos tyrimų objektą. Kombinatorikai reiktų priskirti uždavinius, nagrinėjančius struktūras, t.y. aibes su kažkokiais vidiniais ryšiais. Dažnai pačių struktūrų egzistavimas būna problematiškas. Jei jos egzistuoja, tada ieškoma, kiek jų yra iš viso. Kombinatorikai tradiciškai priskiriami įvairūs algebriniai sąryšiai, formulės, kuriose nenaudojamos tolydžiosios matematikos priemonės – išvestinės, integralai. Kombinatorika yra labiau linkusi siūlyti specifinių matematikos uždavinių sprendimo būdus, nei savintis pačius tyrimo objektus. Ji siūlo principus, metodus, be kurių neišsiverčia šiuolaikinė matematika ar informatika. Iš kombinatorikos išsikristalizavo atskiros šakos ir tapo diskrečiosios matematikos disciplinomis. Taip atsitiko su grafų teorija, kodavimo teorija.

Matematika ir juo labiau informatika nemėgsta dviprasmybių, negriežtų teiginių. Tad ir šiame kurse formaliai įrodinėsime sudėtingesnius ar paprastesnius teiginius. Be išsamesnių komentarų remsimės matematinės logikos kurse sužinotais dalykais bei dėsniais. Štai pora pavyzdžių:

Neprieštaringumo dėsnis. *Du vienas kitam priešingi teiginiai p ir $\bar{p}$ vienu metu negali būti teisingi* $(p \wedge \bar{p} = 0)$.

Trečiojo negalimo dėsnis. *Iš dviejų priešingų teiginių p ir $\bar{p}$ vienas visada yra teisingas* $(p \wedge \bar{p} = 1)$.

Didelę kurso dalį skirsime tam tikrų aibių elementų skaičiui nustatyti. Siekdami universalumo, neišvengsime pasakymų: ,,su visais natūraliaisiais skaičiais n teisinga...“, todėl svarbu prisiminti matematinės indukcijos principus. Jie kyla iš paties natūraliųjų skaičių aibės aksiominio apibrėžimo. Vokiečių matematikui L.Kronekeriui (L...Kronecker, ??) priskiriamas toks pasakymas: ,,Dievas sukūrė skaičius, visa kita yra žmogaus darbas”. Manoma, kad omenyje buvo turėti natūralieji skaičiai. Bet ir juos apibrėžiant žmogus įvedė tvarką. Štai bene populiariausios G.Peano (Giuseppe Peano, 1858–1932) aksiomos:

Apibrėžimas. *Natūraliaisiais skaičiais vadiname netuščios aibės* $\mathbf{N}$ *elementus, jeigu tarp kai kurių iš jų egzistuoja sąryšis „a' eina po a“, tenkinantis aksiomas:*

1) egzistuoja skaičius (vadinamas vienetu), neinantis po jokio kito skaičiaus;

2) po kiekvieno skaičiaus eina tik vienas skaičius;

3) kiekvienas skaičius eina ne daugiau kaip po vieno skaičiaus;

4) aibės $\mathbf{N}$ *poaibis* $\mathbf{M}$ *sutampa su pačia aibe* $\mathbf{N}$*, jei jis turi tokias savybes:*

a) $1 \in \mathbf{M}$*,*

b) jeigu skaičius a *priklauso* $\mathbf{M}$*, tai ir po* a *einantis skaičius* a' *taip pat priklauso aibei* $\mathbf{M}$.

Aibės $\mathbf{N}$ elementus $1, 1', (1')'$... naujai pažymėkime 1, 2, 3,... Paskutinė aksioma vadinama *indukcijos aksioma*, pirmąkart 1988 metais ją kartu su kitomis aibės $\mathbf{N}$ aksiomomis suformulavo vokiečių matematikas R. Dedekindas (R. Dedekind, 1831–1916), nors patį principą jau naudojo B. Paskalis (B. Pascal, 1623–1662).

Mūsų kurse indukcijos principas dažniausiai bus naudojamas tokia forma:

Tegu $p(n)$ *– kažkoks teiginys apie natūralųjį skaičių* n*. Tarkime, kad* $p(1)$ *yra teisingas, ir iš prielaidos, kad* $p(n)$ *yra teisingas, sugebame išvesti, kad* $p(n')$ *irgi yra teisingas. Darome išvadą: teiginys* $p(n)$ *yra teisingas visiems* $n \in \mathbf{N}$.

Žvilgtelėkime, kaip aksiomiškai apibrėžtoje aibėje $\mathbf{N}$ galėtume apibrėžti sudėties operaciją. Apibrėžkime

$$a + 1 = a';$$

toliau, tarę, kad $a + n$ žinoma, apibrėžiame

$$a + (n + 1) = a + n' = (a + n)'.$$

Skaičių aibė $M = \{n\}$ tenkina abu 4) aksiomos reikalavimus, todėl iš jos išplaukia, kad M sutampa su natūraliųjų skaičių aibe. Kitaip tariant, $a + n$ apibrėžta su visais n. Panašiai apibrėžiant daugybą pradedama nuo

$$a \cdot 1 = a, \qquad b' \cdot a = a \cdot b + a.$$

Tęsiant gaunama algebrinė struktūra $\mathbf{N}$, t.y. aibė su joje apibrėžtomis algebrinėmis operacijomis. Aksiomos, žinoma, užsimiršta ir natūraliuosius skaičius naudojame, kaip Dievo duotus.

Pastebėkime, kad $\mathbf{N}$ yra *sutvarkytoji aibė*: $a < b$ apibrėžiama kaip „$\exists d \in \mathbf{N}$ toks, kad $a + d = b$“.

Galimos ir kitos aksiomų sistemos. Kai kuriose iš jų randame tokį teiginį.

Archimedo aksioma. *Bet kuriai natūraliųjų skaičių porai* a, b *galima rasti tokį natūralųjį skaičių* n*, kad* $an > b$.

Šis teiginys išplaukia iš Peano aksiomų, todėl jį reiktų vadinti teorema, tačiau taip ir liko istoriškai susiklostęs pavadinimas. Panašiai prigijo ir toks teiginys.

Mažiausiojo elemento principas. *Kiekvienas netuščias natūraliųjų skaičių aibės poaibis turi mažiausią elementą.*

Dirichlė (P.G.L. Dirichlet, 1805–1859) **principas.** *Jei m rutulių yra sudėti į $n < m$ dėžių, tai bent vienoje dėžėje yra 2 ar daugiau rutulių.*

2. Dauginimo taisyklė

Aibę $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ vadinsime n aibe. Elementų kiekį aibėje A arba jos *galią* galima žymėti $|A|$ arba $\#A$. Vartosime pirmąjį žymenį. Toliau nagrinėsime, kokiais būdais nustatomas įvairių baigtinių aibių elementų skaičius. Atkreipkime dėmesį, kad terminus *aibė, poaibis* vartojame, kai jų elementai yra skirtingi, kitais atvejais – *pora, rinkinys, sistema, visuma.* Aibės elementus kai kada vadinsime *abėcėle*, iš jų sudarytus *sutvarkytuosius* rinkinius – *žodžiais.* Pabrėždami ilgį, žodį $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ vadinsime k *žodžiu.* Jei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ir $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ yra dvi aibės, tai aibė

$$A \times B = \{(a_i, b_j): \ a_i \in A, b_j \in B, \ 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m\}$$

vadinama jų *Dekarto* (René Descartes, 1596–1650) *sandauga.* Tai *sutvarkytųjų* porų aibė.

1 teorema. $|A \times B| = |A| \, |B|$.

$\triangleright$Tarkime, kad A yra n aibė, o B – m aibė. Su fiksuotu elementu a_i iš porų (a_i, b_j) galime sudaryti m poaibį, kai $j = 1, \dots, m$. Dabar keiskime a_i, imdami $i = 1, \dots, n$. Gausime n porų m poaibių. Todėl $|A \times B| = nm$. $\triangleleft$

Taikydami matematinę indukciją, apibendrinkite šį teiginį bet kurio skaičiaus aibių Dekarto sandaugai: $|A_1 \times \cdots \times A_s| = |A_1| \times \cdots \times |A_s|$, $s \ge 1$.

2 teorema. *Jei abėcėlė A turi n raidžių, tai galime sudaryti n^k žodžių, kurių ilgis yra k.*

$\triangleright$Pastebėkime, kad k žodžių aibė sutampa su Dekarto sandauga $A \times \cdots \times A$, turinčia k daugiklių. Todėl teiginys išplaukia iš 1 teoremos apibendrinimo. $\triangleleft$

3 teorema. *Aibės $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ poaibių, įskaitant ir tuščiąjį, skaičius lygus 2^n.*

$\triangleright$Nagrinėkime visų poaibių aibės atvaizdį aibėje, sudarytoje iš n žodžių su „raidėmis“ 0, 1. Šis atvaizdis apibrėžtas taip:

$$A \supset P = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\} \mapsto (0 \dots, 0, 1, 0 \dots, 0, 1, 0, \dots 0);$$

čia „raidė“ 1 įrašyta i_s-oje pozicijoje pabrėžiant, kad i_s-asis aibės A elementas patenka į poaibį P. Atvaizdis yra bijekcija. Pagal 2 teoremą šių žodžių aibės galia lygi 2^n ir sutampa su k poaibių aibės galia. $\triangleleft$

4 teorema. *Jei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ir $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, tai funkcijų $f : X \to Y$ aibės galia lygi m^n.*

$\triangleright$Kiekvieną funkciją $f : X \to Y$ galime vienareikšmiškai išreikšti vektoriumi $(f(x_1), \dots, f(x_n))$. Kadangi dabar „raidė“ $f(x_j)$, $1 \le j \le n$, imama iš abėcėlės Y, turinčios m raidžių, teoremos teiginys išplaukia iš 2 teoremos. $\triangleleft$

Šioje teoremoje išvesta formulė paaiškina dažnai naudojamą žymenį

$$\{f : X \to Y\} =: Y^X.$$

3. Gretiniai, kėliniai ir deriniai

Abėcėlės $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ skirtingų raidžių žodžius vadinsime *gretiniais* iš n elementų. Jei tokio žodžio ilgis yra k, tai jį vadinsime k gretiniu. Jų skaičių pažymėkime A_n^k.

1 teorema. $A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$.

Įrodymas akivaizdus.

Gretinius iš n elementų po n vadinsime *kėliniais*.

Išvada. Iš viso yra $n!$ kėlinių iš n aibės elementų.

Raidžių tvarka k žodyje yra svarbi. Iš visų $k!$ žodžių, sudarytų iš tų pačių raidžių, gautume tą patį k *nesutvarkytąjį* skirtingų raidžių rinkinį (poaibį), vadinamą *deriniu*.

2 teorema. *Derinių iš n po k skaičius lygus*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$\triangleright$Įrodymas išplaukia iš 1 teoremos ir kėlinių skaičiaus formulės.$\triangleleft$

Derinių skaičius C_n^k nurodo, kiek k poaibių galime išrinkti iš n aibės. Kadangi $k = 0, 1, \ldots, n$, tai pagal 2.3 teoremą gauname tapatybę

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n. \tag{1}$$

Čia n bet koks natūralusis skaičius.

Išvedant (1) lygybę, buvo panaudotas labai universalus principas: skaičiuojant kažkokios baigtinės aibės galią keliais būdais rezultatas yra tas pats. Jį sutiksite ir ateityje.

Mokslinėje literatūroje vartojami ir tokie derinių iš n po k žymemys:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}.$$

Pastarąjį lengviau apibendrinti.

Uždavinys. Kiek skirtingų pirkinių iš k prekių sudarytume, jei galėtume rinktis iš n prekių rūšių be apribojimų?

Sprendimas. Sunumeruokime visas n prekių rūšis ir sudarykime pirkinio kodą: rašykime tiek vienetų, kiek imame pirmos rūšies prekių, dėkime vertikalų brūkšnį ir tęskime šį procesą. Baigsime parašę tiek vienetų, kiek imsime n-os rūšies prekių. Taigi kodas atrodys maždaug šitaip:

$$11||111|\ldots|1\ .$$

Matome, kad šiame pirkinyje yra dvi pirmos rūšies prekės, 2-os rūšies prekių nebuvo imta. Kodą sudarys k vienetų ir $n-1$ vertikalus brūkšnys. Jis vienareikšmiškai nusako pirkinį. Todėl pirkinių galėsime sudaryti tiek, kiek bus tokių kodų. Kodai yra $n-1+k$ žodžiai, turintys vieną apribojimą – vienetų skaičių, lygų k. Kadangi vienetų padėtis kode vienareikšmiškai jį nusako, o tokių padėčių galime išrinkti C_{n+k-1}^k būdais, tai šis binominis koeficientas ir yra uždavinio atsakymas.

Paimtas iš n aibės k elementų rinkinys su galimais pasikartojimais vadinamas *kartotiniu* šios aibės k deriniu. Jų skaičius

$$H_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Pastebėkime, kad spręsdami pirkinių uždavinį, surandome lygties

$$x_1 + \cdots + x_n = k$$

sprendinių sveikais neneigiamais skaičiais kiekį. Jis irgi lygus H_n^k.

Apibendrindami jau turimą medžiagą, sudarome k raidžių išrinkimo iš n abėcėlės skaičių lentelę:

	Sutvarkytieji rinkiniai (žodžiai)	Nesutvarkytieji rinkiniai
Skirtingi	gretiniai, A_n^k	deriniai, C_n^k
Galimi pasikartojimai	k žodžiai, n^k	kartotiniai derin., C_{n+k-1}^k

4. Kartotiniai gretiniai

Apibendrinkime Niutono binomo formulę

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p},$$

keldami k nežinomųjų sumą $n \geq 2$ laipsniu. Tegu

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\bar{p}} \binom{n}{p_1, \ldots, p_k} x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k}. \tag{1}$$

Čia sumuojama pagal visus vektorius $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ su sveikomis neneigiamomis koordinatėmis, tenkinančiomis sąlygą $p_1 + \cdots + p_k = n$. (1) formulėje apibrėžtus koeficientus vadinkime *polinominiais* koeficientais. Kai $k = 2$, turime susitarti, kad $\binom{n}{p} = \binom{n}{p, n-p}$.

Teorema. *Polinominių koeficientų formulė yra*

$$\binom{n}{p_1, \ldots, p_k} = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

$\triangleright$Dauginkime panariui n nežinomųjų sumų, imdami x_{i_1} iš pirmosios sumos, x_{i_2} iš antrosios sumos ir t.t., x_{i_n} iš n-osios sumos ir sudėkime visas sandaugas

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n}. \tag{2}$$

Kadangi $i_j \in \{1, \ldots, k\}$, $1 \leq j \leq n$, tai turėsime k^n sandaugų (visus n žodžius iš k raidžių $x_1, \ldots, x_k$). Sudedant (2) sandaugas, reikia sutraukti panašius narius. Jie bus to paties pavidalo, t.y.

$$x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k}, \tag{3}$$

nusakomo vektoriumi $\bar{p}$. Kiek tokių panašių narių kaip (3)? Raidė x_1 (2) sandaugoje galėjo užimti p_1 pozicijų iš n galimų, t.y. buvo $\binom{n}{p_1}$ būdų, x_2 – $\binom{n-p_1}{p_2}$ būdų ir t.t. Tęsdami šį procesą, gautume

$$\binom{n}{p_1} \cdot \binom{n-p_1}{p_2} \cdots \binom{n-p_1-p_2-\cdots-p_{k-1}}{p_k} = \frac{n!}{p_1! \ldots p_k!}.$$

Čia pasinaudojome binominio koeficiento formule. $\triangleleft$

Iš abėcėlės $\{x_1, \ldots, x_k\}$ sudarykime n žodžius, kuriuose x_j pasirodytų p_j, $1 \leq j \leq k$, kartų. Jie vadinami *kartotiniais gretiniais.* Jų kiekį skaičiavome įrodydami teoremą. Iš tiesų (2) žodžių, užrašytų dar ir (3) būdu, skaičius buvo polinominis koeficientas.

Uždavinys. Keliais būdais galime suskirstyti n aibę į k nesikertančių poaibių, jei reikalaujame, kad į j-ąją pakliūtų p_j elementų? Čia $p_1 + \cdots + p_k = n$, $p_j \geq 0$, $1 \leq j \leq k$.

Sprendimas. Pritaikykite teoremos įrodyme naudotus samprotavimus. $\triangleleft$

Atkreipkime dėmesį į šią (1) lygybės išvadą:

$$k^n = \sum_{\bar{p}} \binom{n}{p_1, \ldots, p_k},$$

gaunamą įstatant $x_j \equiv 1$. Čia, kaip ir anksčiau sumuojama pagal visus vektorius $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ su neneigiamomis komponentėmis, tenkinančius sąlygą $p_1 + \cdots + p_k = n$.

5. Binominių koeficientų tapatybės

Patogu išplėsti binominio koeficiento apibrėžimą:

$$\binom{z}{k} = \begin{cases} \frac{z(z-1)\ldots(z-k+1)}{k!}, & \text{kai} \quad z \in \mathbf{C}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \\ 0, \quad \text{kai} \quad k < 0. \end{cases}$$

1 teorema.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad 0 \leq k \leq n.$$

2 teorema.

$$H_n^k = \binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-n}{k}, \qquad 0 \leq k \leq n.$$

3 teorema.

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}, \qquad 0 \le m \le k \le n.$$

$\triangleright$Visi šie teiginiai patikrinami panaudojant binominio koeficiento formulę. Pvz., 3 teoremos atveju, kairioji pusė lygi

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{m!(k-m)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{m!(k-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(n-m)!} =$$
$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!((n-m)-(k-m))!} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

$\triangleleft$

4 teorema (Paskalio tapatybė).

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad 0 \le k \le n, \quad \binom{n-1}{n} = 0.$$

$\triangleright$Fiksuokime abėcėlės $\mathcal{A}$ vieną elementą, sakykim, a_1 ir visus k derinius suskirstykim į dvi klases: vienos klasės deriniuose tegu bus a_1, kitos - ne. Pastebėkime, kad išvedamos formulės dešinioji pusė - tų klasių derinių skaičių suma. Turime gauti visus k derinius iš n elementų. $\triangleleft$

5 teorema.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}.$$

$\triangleright$Pritaikykite matematinę indukciją ir Paskalio tapatybę. $\triangleleft$

6 teorema (Ortogonalumo sąryšis) *Tegu δ_{mn} - Kronekerio simbolis, t.y. $\delta_{nn} = 1$ ir $\delta_{mn} = 0$, kai $m \ne n$. Jei $m \le n$, tai*

$$S_{nm} := \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} = (-1)^m \delta_{mn}.$$

$\triangleright$Pagal 3 teoremą

$$S_{nm} = \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} = \binom{n}{m} \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n-m}{k-m}.$$

Pakeiskime sumavimo indeksą $k - m = j$ ir gausime

$$S_{nm} = \binom{n}{m} \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^{j+m} \binom{n-m}{j} = (-1)^m \binom{n}{m} (1-1)^{n-m} = 0,$$

jei $m \neq n$.◁

7 teorema (Apgręžimo sąryšis) *Tegu a_k, b_k, $0 \le k \le n$ - dvi skaičių sekos. Iš vienos iš šių lygybių*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k,$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k$$

išplaukia antroji.

▷Jei teisinga pirmoji lygybė, tai įstatydami patikriname antrąją. Skaičiuojame keisdami sumavimo tvarką

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \Big(\sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} a_m =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_m \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} = a_n \delta_{nn} = a_n.$$

Paskutiniame žingsnyje pritaikėme ortogonalumo sąryšį (6 teoremą). ◁

8 teorema (Harmoninių skaičių savybė).

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k}.$$

▷Dešiniojoje lygybės pusėje esančiam binominiam koeficientui pritaikykime Paskalio lygybę. Gauname

$$(1) \qquad h_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) \frac{1}{k} =$$
$$= h_{n-1} + (-1)^{n+1} \binom{n-1}{n} \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{k}.$$

Antrasis dėmuo lygus nuliui, skaičiuojame trečiąjį. Jis lygus

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = -\frac{1}{n}[(1-1)^n - 1] = \frac{1}{n}.$$

Įstatę į (1) lygybę gauname rekurentųjį sąryšį

$$h_n = h_{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Kadangi $f_1 = 1$, pagal matematinės indukcijos principą iš jo išplaukia

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

$\triangleleft$

Išvada.

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} h_k = \frac{1}{n}.$$

$\triangleright$Papildykite sumas nuliniais dėmenimis ($h_0 = 0$) ir pritaikykite apgręžimo formulę. $\triangleleft$

6. Rėčio principas

Skaičiuosime skaičių elementų, patenkančių į keletos gal būt persikertančių aibių sąjungą. Apibendrinsime nesunkiai suvokiamas formules

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ir

(1) $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Jiems išvesti pakanka grafinės iliustracijos.

Panagrinėkime pavyzdį, pateiktą M.Bloznelio knygutėje, pakeisdami skaičius.

Uždavinys. *Kiek sveikųjų sprendinių (sutvarkytųjų trejetų* (x_1^0, x_2^0, x_3^0)*,* $y_i \geq 0$*,* $i = 1, 2, 3$ *), tenkinančių sąlygas*

$$-4 \leq x_1 \leq 2; \quad 0 < x_2 \leq 8; \quad 4 \leq x_3 \leq 5,$$

turi lygtis

(2) $$x_1 + x_2 + x_3 = 10\ ?$$

Sprendimas. Kadangi esame nagrinėję panašių lygčių sveikųjų neneigiamų sprendinių skaičių, todėl pakeičiame nežinomuosius

$$x_1 + 4 = y_1, \quad x_2 - 1 = y_2, \quad x_3 - 4 = y_3,$$

ir gauname lygtį

(3) $$y_1 + y_2 + y_3 = 9.$$

Jos sprendinių, tenkinančių sąlygas

(4) $$0 \leq y_1 \leq 6; \quad 0 \leq y_2 \leq 7; \quad 0 \leq y_3 \leq 1,$$

bus tiek pat kiek pradinio uždavinio sprendinių. Jei nebūtų (4) apribojimų, (3) lygtis turėtų

$$H_3^9 = \binom{11}{9} = \binom{11}{2} = 55$$

sveikuosius neneigiamus sprendinius. Taigi reikia ,,atsijoti" sprendinius, netenkinančius (4) sąlygų. Raide U pažymėkime (3) lygties sprendinių aibę, A_1 – jos poaibį, netenkinantį sąlygos $0 \leq y_1 \leq 6$, A_2 – poaibį, netenkinantį sąlygos $0 \leq y_2 \leq 7$, ir A_3 – poaibį, netenkinantį sąlygos $0 \leq y_3 \leq 1$. Aibių sąjungos $S := A_1 \cup A_2 \cup A_3$ elementus ir reikia išsijoti iš U. Likusios aibės $U \setminus S$ elementai tenkina visas (4) sąlygas.

Randame sankirtų galias:

$$|A_1 \cap A_2| = 0;$$

$$|A_1 \cap A_3| = 1,$$

nes yra vienas sprendinys (7,0,2);

$$|A_2 \cap A_3| = 0.$$

Panašiai $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$.

Po pakeitimo

$$y_1 - 7 = z_1,\ y_2 = z_2,\ y_3 = z_3$$

$|A_1|$ lygus lygties $z_1 + z_2 + z_3 = 2$ sveikųjų neneigiamų sprendinių skaičiui, t.y. $|A_1| = H_3^2 = 6$; panašiai, $|A_2| = H_3^1 = 3$ ir

$$|A_3| = H_3^7 = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36.$$

Įstatydami gautuosius skaičius į (1) formulę, gauname

$$|U| - |S| = 55 - (6 + 3 + 36 - 1) = 11$$

uždavinio sprendinių. $\triangleleft$

Trumpesnis kelias: ieškodami (3) lygties sveikųjų neneigiamų sprendinių, sudėkime tiek vienetų, kiek jų yra

$$\sum_{\substack{(y_1,y_2,y_3)\\(3),(4)}} 1 = \sum_{\substack{0\leq y_1\leq 6\\0\leq y_2\leq 7\\8\leq y_1+y_2\leq 9}} 1.$$

Įžiūrėkime šios sumos geometrinę prasmę. Tai plokštumos taškų, kurių koordinatės tenkina nurodytas sąlygas, skaičius. Brėžinyje gausime tam tikrą sritį. Joje, įskaitant ir kontūrą, "telpa" 11 taškų su sveikomis koordinatėmis. $\triangleleft$

Grįžkime prie teorinių dalykų ir raskime elementų skaičių sąjungoje

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Pažymėkime

$$a(i) = |A_i|, \quad a(i,j) = |A_i \cap A_j|, \quad \dots \quad , \quad a(i_1, \dots, i_k) = |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Čia $1 \le i < j$, $i_1 < \dots < i_k$, $1 \le k \le n$. Viso yra C_n^2 galimybių parinkti nesutvarkytąją skirtingų indeksų porą (i,j), panašiai, – C_n^k galimybių parinkti k skirtingų indeksų. Trumpumo dėlei apibrėžkime sumas

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} a(i), \quad S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} a(i,j), \quad \dots \quad , \quad S_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} a(i_1, \dots, i_k).$$

čia $1 \le k \le n$. Pabrėžiame, kad S_k sumoje sumuojama pagal visus galimus indeksų k poaibius iš pirmųjų n natūraliųjų skaičių.

1 teorema.

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 + \dots + (-1)^{n+1} S_n.$$

$\triangleright$Pažymėkime $U = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Fukciją $I_A : U \to \{0,1\}$ vadinsime poaibio $A \subset U$ *indikatoriumi*, jeigu $I_A(x) = 1$ tada ir tik tada, kai $x \in A$. Vadinasi,

$$|A| = \sum_{x \in U} I_A(x).$$

Todėl

$$a(i) = \sum_{x \in U} I_{A_i}(x), \quad a(i,j) = \sum_{x \in U} I_{A_i \cap A_j}(x), \dots,$$
$$a(i_1, \dots, i_k) = \sum_{x \in U} I_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}(x), \quad 1 \le i < j, \ i_1 < \dots < i_k.$$

Vadinasi,

$$S_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \sum_{x \in U} I_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}(x), \quad 1 \le k \le n.$$

Pažymėkime

$$Z_k(x) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} I_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}(x).$$

Sukeitę sumavimo tvarką, šių žymėjimų dėka gauname

$$S_1 - S_2 + S_3 + \dots + (-1)^{n+1} S_n = \sum_{x \in U} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} Z_k(x).$$

Reikia įsitikinti, jog ši suma lygi

$$|U| = \sum_{x\in U} I_U(x)$$

arba įrodyti dėmenų lygybę

$$1 = I_U(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} Z_k(x), \tag{5}$$

su kiekvienu $x \in U$.

Tarkime,

$$x \in A_1, \dots, A_m, \qquad \text{bet} \qquad x \notin A_{m+1}, \dots, A_n$$

su kažkokiu $1 \le m \le n$. Šiam x gauname

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} Z_k(x) = Z_1(x) - Z_2(x) + \cdots + (-1)^{m+1} Z_m(x).$$

Sumoje $Z_k(x)$ yra sudedami 1 ir 0. Vienetų skaičius lygus kiekiui tų sankirtų

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k},$$

kurias sudaro aibės iš rinkinio $\{A_1, \dots, A_m\}$. Tokių sankirtų yra C_n^k. Vadinasi,

$$Z_k(x) = \binom{m}{k},$$

o

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} Z_k(x) = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m+1} \binom{m}{m} =$$

$$= \binom{m}{0} - (1-1)^m = 1$$

su kiekvienu $1 \le m \le n$. Gavę (5) lygybę, baigiame 1 teoremos įrodymą.bll

Panaudoję užsieninėje literatūroje dažnai naudojamus žymenis, gauname sekantį įjungimo ir išjungimo principą.

2 teorema. *Tarkime, kad $A_1, \dots, A_n$ – aibės X poaibiai, $X_\emptyset := X$,*

$$X_J := \cap_{i\in J} A_i.$$

Aibės X elementų, nepriklausančių jokiai iš aibių A_i, skaičius lygus

$$\sum_{J\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|} |X_J|.$$

$\triangleright$Jei $\bar{A}_i := X \setminus A_i$, tai nagrinėjamas skaičius lygus

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| = |X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n)| = |X| - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Toliau pakanka pritaikyti 1 teoremą. $\triangleleft$

7. Netvarkų uždavinys

Kiek yra n eilės keitinių, kuriuose bet koks $1 \le i \le n$ pakeičiamas $j \neq i$, $1 \le j \le n$? Tokius kėlinius vadinkime *netvarkingaisiais.* Kai kada ši problema sutinkama *kinų restorano uždavinio* pavadinimu. Tada ji formuluojama buitiškiau. Štai vienas iš galimų variantų.

n džentelmenų būrelis atvyksta pietauti į kinų restoraną. Rūbinėje visi atiduoda savo skrybėles, kurios po pietų grąžinamos atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad m iš šių klientų atgavo savo skrybėles?

Teorema. *Netvarkingųjų keitinių skaičius lygus*

$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

$\triangleright$Bendras keitinio pavidalas

$$\binom{1\,2\,\ldots\,n}{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Tegu A_k – aibė keitinių su savybe $i_k = k$, X – visa keitinių aibė, o $\bar{A}_k = X \setminus A_k$, $1 \le k \le n$. Ieškomasis skaičius pagal 6.2 teoremą lygus

(1)

$$\begin{aligned}|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| &= |X| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^n|A_1 \cap \cdots \cap A_n| = \\ &= |X| - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n.\end{aligned}$$

Čia, kaip ir anksčiau

$$S_k = \sum_{1\le i_1<i_1\cdots<i_k\le n}|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Aibių sankirta šioje sumoje yra sudaryta iš keitinių, kurie palieka vietoje $i_1, \ldots, i_k$. Kitų $n-k$ elementų keitimui jokių apribojimų nėra. Todėl iš viso yra $(n-k)!$ tokių keitinių. Taigi,

$$S_k = \sum_{1\le i_1<i_1\cdots<i_k\le n}(n-k)! = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!},$$

nes sumoje buvo C_n^k vienodų dėmenų. Kadangi $|X| = n!$, tai įstatę gautuosius skaičius į (1), baigiame teoremos įrodymą. $\triangleleft$

Kinų restorano uždavinio sprendimas. Pakanka klasikinio tikimybės apibrėžimo: suradę, kiek yra galimų įvykių, kada m klientų atgauna savo skrybėles, šį skaičių padalijame iš $n!$, visų galimų įvykių. Sunumeruokime džentelmenus bei jų skrybėles nuo 1 iki n. Jei j-asis klientas gavo i_j-ą skrybėlę, tai keitiniai

$$\binom{1\,2\,\ldots\,n}{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

žymi visus įmanomus elementariuosius įvykius. Mums palankius įvykius žyminčiuose keitiniuose sutapimas $i_j = j$ turi pasikartoti lygiai m kartų, o visų likusių $(n-m)$ klientų aibės indeksai turi sudaryti netvarkingąjį keitinį. Pagal teoremą šis skaičius lygus

$$(n-m)!\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Kadangi m poaibių, kurių elementus keitinys palieka vietoje, yra C_n^m, tai gauname

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}\,(n-m)!\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^k}{k!}$$

palankių įvykių. Vadinasi, uždavinio atsakymas yra tikimybė

$$\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

$\triangleleft$

8. Siurjekcijų skaičius

Nagrinėkime atvaizdžius $f : X \to Y$, kai $|X| = n$, o $|Y| = m$. Iš viso jų yra tiek, kiek n žodžių, sudarytų iš m raidžių abėcėlės. O kiek yra *siurjekcijų*, t.y. atvaizdžių, kada kiekvienas $y \in Y$ turi bent vieną pirmvaizdį iš aibės X? Aišku, sąlyga $m \le n$ yra būtina.

Teorema. *n aibės į m aibę, $m \le n$, siurjekcijų skaičius lygus*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n.$$

$\triangleright$Jei U – visų atvaizdžių aibė, tai $|U| = m^n$. Tegu $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, o A_j – atvaizdžiai, neįgyjantys reikšmės y_j, $1 \le j \le m$. Pagal tą pačią atvaizdžių skaičiaus teoremą gauname

$$|A_j| = (m-1)^n, \quad |A_i \cap A_j| = (m-2)^n, \quad \ldots \quad , |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (m-k)^n.$$

Čia $1 \le i < j \le m$, $1 \le i_1 < i_2 \cdots < i_k \le m$.

Siurjekcijų vaizdai yra visi y_j, todėl mus dominanti aibė yra lygi aibių A_j papildinių iki U sankirtai, t.y.,

$$\mathcal{S} := \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n.$$

Pagal praeito skyrelio teoremos išvadą

$$(1) \qquad |\mathcal{S}| = |U| - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^m S_m$$

Čia

$$S_1=\binom{m}{1}(m-1)^n,\quad S_2=\binom{m}{2}(m-2)^n,\dots,S_{m-1}=\binom{m}{m-1}(m-m+1)^n,\quad S_m=0.$$

įstatę į (1) formulę, baigiame įrodymą.◁

Išvada.

$$n!=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^n,\quad n\geq 1.$$

▷Kiekviena n aibės siurjekcija į ją pačią yra ir bijekcija, o bijekcijų skaičius sutampa su n keitinių kiekiu. Toliau pritaikome teoremą, kai $n=m$.◁

9. Stirlingo skaičiai

Aibės A *skaidiniu* (k skaidiniu) vadiname išraišką

$$A=A_1\cup\cdots\cup A_k,\quad A_j\subset A, A_j\neq\emptyset,\quad A_i\cap A_j=\emptyset,\quad 1\leq i<j\leq n. \tag{1}$$

Jungiamų poaibių tvarka čia nesvarbi. Tegu $\mathcal{P}(n,k)$ – visų (1) skaidinių aibė. Jos elementų skaičius $S(n,k):=|\mathcal{P}(n,k)|$ vadinamas *antros rūšies Stirlingo skaičiumi* (James Stirling, 1692-1770, - škotų matematikas).

Pastebėkime, kad (1) skaidinys susijęs su aibės A siurjekcijomis į k aibę, tarkim, į aibę $B:=\{1,\dots,k\}$. Tegu

$$\mathcal{Q}(n,k):=\{f:A\to B,\ f-siurjekcija\}.$$

Iš 8 skyrelio teoremos turime

$$|\mathcal{Q}(n,k)|=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n. \tag{2}$$

Iš (2) išvesime patogią formulę antros rūšies Stirlingo skaičiui $S(n,k)$, $1\leq k\leq n$, nustatyti. Susitarkime, be to, žymėti $S(0,0)=1$.

1 teorema.

$$S(n,k)=\frac{|\mathcal{Q}(n,k)|}{k!}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n.$$

▷Jei $A=\{a_1,\dots,a_n\}$, $f\in\mathcal{Q}(n,k)$, tai pažymėję

$$A_j=\{a_i\in A:\ f(i)=j\},\quad 1\leq j\leq k,$$

gauname vienintelį skaidinį $A = A_1 \cup \dots A_k$. Atvirkščiai, turėdami tokį skaidinį, galėtume apibrėžti daug siurjekcijų. Pakaktų aibės A_j elementus atvaizduoti į vieną skaičių i_j taip, kad skaičiai $i_1, \dots, i_k$ sudarytų k kėlinį. Kadangi tokių kėlinių yra $k!$, iš viso gautume $k!$ siurjekcijų. Taigi $|\mathcal{Q}(n,k)| = k!S(n,k)$. Toliau pakanka pritaikyti (2) formulę.◁

Jei B_n – visų galimų A išraiškų, jungiant netuščius poaibius, skaičius, vadinamas *Belo skaičiumi*, tai

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

Atkreipkime dėmesį į panašumą su anksčiau turėta poaibių skaičiaus formule

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Dabar išvesime vieną rekurentųjį sąryšį.

2 teorema. *Susitarkime, kad* $S(0,0) = 1$. *Tada*

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1), \quad 1 \le k < n.$$

▷Panašiai kaip ir Paskalio teoremos įrodyme, visus aibės A k skaidinius perskirkime į dvi dalis. Vieną dalį sudarykime iš tokių skaidinių, kuriuose vienas iš jungiamų poaibių yra $\{n\}$. Jų pavidalas bus toks:

$$A = A_1 \cup \dots A_{k-1} \cup \{n\}.$$

Čia poaibiuose A_j, $1 \le k-1$, nėra n. Tokių skaidinių bus $S(n-1,k-1)$.

Kitą dalį sudarantys likusieji skaidiniai gali būti gauti tokiu būdu. Imkime aibės $\{1, \dots, n-1\}$ k skaidinius

$$\{1, \dots, n-1\} = A_1' \cup \dots \cup A_k',$$

kurių bus $S(n-1,k)$, ir prijungdami paeiliui n prie A_j', $1 \le j \le k$, iš kiekvieno tokio skaidinio padarytume k pradinės aibės A skaidinių. Todėl antroje skaidinių grupėje yra $kS(n-1,k)$ A skaidinių. Sudėję abiejų klasių skaičius, gauname $S(n,k)$.◁

Išvada. *Jei* $1 \le k \le n$, *tai* $S(n,k) \le k^{n+1}$.

▷Pritaikykite indukciją.◁

Antros rūšies Stirlingo skaičiai yra naudingi polinomų algebroje. Pažymėkime

$$(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1) = \binom{x}{k}k!, \quad (x)_0 = 1.$$

3 teorema. *Jei* $S(n,0) := 0$, *kai* $n \in \mathbf{N}$, *ir* $S(0,0) = 1$, *tai*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k \qquad x \in \mathbf{R}, \quad n \geq 0, \quad 0^0 := 1.$$

$\triangleright$. Atvejis $n = 0$ yra trivialus. Tegu toliau $n \in \mathbf{N}$. Įrodinėjamos lygybės pusėse yra n laipsnio polinomai, todėl pakanka ją patikrinti daugiau negu n taškų. Įrodysime, kad ji teisinga su visais natūraliaisiais $x \geq n$. Tuo tikslu, nagrinėjame atvaizdžius

$$g : A \to X := \{1, 2, \ldots, x\}.$$

Jų yra x^n. Šį kiekį skaičiuojame kitu būdu. Tegu $Y = g(X) \subset X$ – funkcijos g reikšmių aibė. Tada $g : A \to Y$ yra siurjekcija. Poaibiuose Y gali būti $1, 2, \ldots, n$ elementų. Jei $|Y| = k$, tai gausime $|\mathcal{Q}(n,k)|$ skirtingų siurjekcijų, atitinkančių skirtingus atvaizdžius g. Pakeitę $Y \subset X$, vėl gautume skirtingas siurjekcijas bei atvaizdžius. Vadinasi, visas atvaizdžių g skaičius gali būti užrašomas šitaip:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{Y \subset X,\, |Y|=k} |\mathcal{Q}(n,k)|.$$

Pagal 2 teoremą

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{Y \subset X,\, |Y|=k} S(n,k)k! = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)k! \sum_{Y \subset X,\, |Y|=k} 1 = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k,$$

nes aibė X turėjo $\binom{x}{k}$ skirtingų k poaibių. Jei $n \in \mathbf{N}$, pagal susitarimą $S(n,0) = 0$, todėl pastarojoje sumoje galėtume prijungti nulinį dėmenį, atitinkantį $k = 0$. Taip gautume teoremoje nurodytą formulę. $\triangleleft$

Formulė

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k, \quad x \in \mathbf{R},$$

apibrėžia *pirmos rūšies Stirlingo skaičius* $s(n,k)$.

4 teorema (Ortogonalumo sąryšis).

$$\sum_{k=m}^{n} S(n,k)s(k,m) = \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0.$$

$\triangleright$Pasinaudokime aukščiau nagrinėtų polinomų išraiškomis per Stirlingo skaičius. Gauname

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\Big(\sum_{m=0}^{k} s(k,m)x^m\Big) = \sum_{m=0}^{n}\Big(\sum_{k=m}^{n} S(n,k)s(k,m)\Big)x^m.$$

Palyginę polinomų koeficientus prie vienodų x laipsnių, baigiame 4 teoremos įrodymą.$\triangleleft$

Uždavinys. *Išveskite rekurenčiąją Belo skaičių formulę*

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

10. Skirtumo operatorius

Tiesinėje realių funkcijų erdvėje $\mathcal{F}$ apibrėžkime *skirtumo operatorių*, t.y., atvaizdį $\Delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Tai tiesinis atvaizdis, nes iš apibrėžimo išplaukia lygybės $\Delta(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 \Delta f(x) + c_2 \Delta g(x)$ su bet kokiom realiom konstantom c_1, c_2 bei funkcijomis $f(x)$, $g(x)$. Naudojant skirtumo operatorių, galima išvesti nemaža kombinatorinių sąryšių. Pažymėkime $\Delta^m = \Delta(\Delta^{m-1})$, kai $m \geq 0$, $\Delta^1 = \Delta$; $\Delta^0 = I$, čia I tapatusis atvaizdis.

1 teorema. *Bet kokiai funkcijai $f(x)$ ir $m \geq 0$ teisingos tapatybės*

$$\Delta^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x+m-k) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+j), \tag{1}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \Delta^k f(x), \tag{2}$$

$$f(x+m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^k f(x), \tag{3}$$

$\triangleright$Pirmoji iš (1) lygybių įrodoma matematinės indukcijos pagalba, pasinaudojant Paskalio tapatybe. Patikrinę (1) su $m = 0, 1$ ir tarę kad ji ši lygybė yra teisinga dėl $m-1 \geq 1$, skaičiuojame sumą

$$S_m := \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x+m-k) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m-1}{k} f(x+m-k) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m-1}{k-1} f(x+m-k).$$

Gautose sumose atmetę po nulinį dėmenį, o antrojedar ir pakeitę $k-1=j$, gauname

$$S_m = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} f\big((x+1)+(m-1)-k\big) -$$
$$- \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m-1}{j-1} f\big(x+(m-1)-j\big) = \Delta^{m-1} f(x+1) - \Delta^{m-1} f(x) =$$
$$= \Delta^{m-1}\big(f(x+1) - f(x)\big).$$

Taigi, (1) lygybė yra įrodyta.

Antrosios iš (1) išraiškų įrodymui pakanka pakeisti sumavimo indeksą.

Norėdami išvesti (2) formulę, taikome binominių koeficientų apgręžimo formulę ir pirmąją iš (1) lygybių. Mūsų ankstesniuose į skyrelio žymėjimuose imame $a_m = \Delta^m f(x)$ bei $b_k = f(x-m-k)$. Paskutinės (3) formulės išvedimui vėl taikome tą patį principą, bet vietoje pirmosios naudojame antrąją išraišką (1) lygybėje. $\triangleleft$

Išvada. *Jei $n, m \geq 0$, tai*

$$\Delta^m x^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (x+m-k)^n;$$

$$\Delta^m 0^n := \Delta^m x^n|_{x=0} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Dydžiai $\Delta^m 0^n$, $m, n \geq 0$, vadinami *Morgano skaičiais.* Jei $m \leq n$ – tai n aibės siurjekcijų į m aibę skaičius, ir jei $m > n$, tai bet kokiam $x \in \mathbf{R}$, $\Delta^m x^n = 0$. Iš tiesų, kiekvienas operatoriaus Δ pritaikymas sumažina polinomo x^n laipsnį vienetu. Kai $x = 0$, iš čia išplaukia tapatybė

(4) $$\Delta^m 0^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = 0, \quad m > n.$$

Kadangi atveju $m > n$ ir siurjekcijų skaičius lygus nuliui, tai darome išvadą, kad Morgano skaičiai visada išreiškia siurjekcijų kiekį.

Užduotis. Panagrinėkite postūmio operatoriaus $P : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, apibrėžiamo lygybe

$$Pf(x) = f(x+1)$$

arba $P = \Delta + I$, savybes. Iveskite keletą kombinatorinių formulių.

11. Laipsninė generuojanti funkcija

Dažnai kombinatorinius objektų skaičių išreiškiančios sekos yra sudėtingos, todėl jų tyrimui pasitelkiama funkcijų teorija. Sekai

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \quad a_j \in \mathbf{R},$$

priskiriama formali laipsninė eilutė

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots,$$

vadinama sekos *generuojančia funkcija* (l.g.f.). Kai kada šią eilutę pavyksta susumuoti, rasti gana paprastą funkciją, kurios Teiloro eilutė taško $x = o$ aplinkoje sutampa su šia generuojančia funkcija. Kombinatorikoje dažnai net nenagrinėjant šios funkcinės eilutės konvergavimo klausimo, su ja formaliai manipuliuojama, atliekami matematinėje analizėje žinomi veiksmai (Perskaitykite M.Bloznelio knygelės 4.1 skyrelį). Pavyzdžiui, nurodytos viršuje eilutės ir sekos $\{b_m\}$, $m \geq 0$ generuojančios funkcijos sandauga lygi eilutei

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \ldots$$

su

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad n \geq 0.$$

Analizėje prieš dauginant panariui laipsnines eilutes būtų pasidomėta, ar eilutės konverguoja absoliučiai. Daug sekų sąryšių, tapatybių buvo "atspėta" manipuliuojant su generuojančiomis funkcijomis, vėliau griežtai pagrindžiant atliktas operacijas arba įrodant juos kitais būdais.

Pasinaudokime binominių koeficientų

$$\binom{n}{k}, \quad 0 \leq k \leq n; \quad \binom{n}{k} = 0, \quad k > n,$$

generuojančia funkcija

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^n$$

ir išveskime porą formulių.

1 teorema (Vandermondo sąsūka). *Bet kuriems natūraliesiems skaičiams k ir m, $k, m < n$, teisinga lygybė*

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n-m}{k-j}.$$

$\triangleright$Panaudoję laipsninių eilučių (šiuo atveju, polinomų) dauginimo taisykle, gauname

$$(1+x)^n = (1+x)^{n-m}(1+x)^m = \sum_{i \geq 0} \binom{n-m}{i} x^i \sum_{j \geq 0} \binom{m}{j} x^j =$$
$$= \sum_{k \geq 0} \Bigg(\sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=k}} \binom{n-m}{i} \binom{m}{j} \Bigg) x^m.$$

Sulyginę koeficientus prie x^k, baigiame teoremos įrodymą.$\triangleleft$

2 teorema. *Su bet kokiu $n \geq 0$ teisinga lygybė*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = -\frac{1}{n+1}.$$

$\triangleright$Integruodami panariui generuojančią funkciją gauname

$$\int_0^u (1+x)^n\,dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^u x^k\,dx,$$

$$\frac{1}{n+1}\big((1+u)^{n+1}-1\big) = \sum_{k=0}^n \frac{u^{k+1}}{k+1}.$$

Įstatę $u=-1$, baigiame įrodymą.$\triangleleft$

2 teoremos tapatybę palyginkite su anksčiau nagrinėtomis harmoninių skaičių savybėmis. Matematinėje analizėje yra išvedama *apibendrintoji Niutono binomo* formulė

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^\infty \binom{u}{n} x^n, \quad x, u \in \mathbf{R}, |x|<1.$$

Čia, kaip jau buvo minėta,

$$\binom{u}{n} = \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!}, \quad n \in \mathbf{N}\cup\{0\}.$$

Funkcija $(1+x)^u$ yra apibendrintųjų binominių koeficientų generuojanti funkcija.

Matematinėje analizėje išvedamos funkcijų laipsninės eilutės yra jų koeficientų generuojančios funkcijos. Taigi, formulės

$$(1)\qquad -\log(1-x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}, \quad |x|<1,$$

bei

$$(2)\qquad e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbf{R},$$

duoda sekų $\{1/n\}$, $n\ge 1$ ir $\{1/n!\}$, $n \ge 0$ laipsnines generuojančias funkcijas atitinkamai.

Uždavinys. *Įrodykite Koši tapatybę*

$$\sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\ge 0\\ 1k_1+\dots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^{k_j}k_j!} = 1, \quad n \ge 1.$$

Sprendimas. Nagrinėjame vienetų sekos l.g.f.. Naudodami (1) ir (2) formules, gauname

$$\sum_{n\ge 0} x^n = \frac{1}{1-x} = \exp\{-\log(1-x)\} = \exp\left\{\sum_{j\ge 1}\frac{x^j}{j}\right\} =$$

$$= \prod_{j\ge 1}\exp\left\{\frac{x^j}{j}\right\} = \prod_{j\ge 1}\sum_{k\ge 0}\left(\frac{x^j}{j}\right)^k \frac{1}{k!}.$$

Formaliai dauginame eilutes (pagrįskite!). Dešinėje pusėje gauname

$$\sum_{k_1,\dots,k_n,\dots\geq 0} \frac{x^{1k_1}x^{2k_2}\dots}{1^{k_1}2^{k_2}\dots k_1!k_2!\dots} = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\geq 0\\ 1k_1+\dots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{k_j}k_j!}.$$

Paskutiniame žingsnyje grupavome absoliučiai konverguojančios srityje $|x| < 1$ eilutės narius. Taylor'o koeficientai apibrėžiami vienareikšmiškai. Vadinasi, koeficientas prie x^n yra lygus vienetui.$\triangleleft$

Laipsninių generuojančių eilučių nauda ypač išryškėja nagrinėjant rekurenčiąsias sekas. Vėliau šiuos sąryšius panagrinėsime smulkiau, dabar apsistosime ties vienu pavyzdžiu.

12. Katalano skaičiai

Atliekant binariąsias algebrines operacijas, pvz., sudėtį tenka suskliausti ir sudėti po du dėmenis paeiliui. Įsitikinkite, kad yra 5 keturių dėmenų suskliaudimo būdai, nemaišant dėmenų tvarkos. Apibendrinant gauname tokį rezultatą.

1 teorema. *Yra*

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

$n \geq 2$ *dėmenų suskliaudimo būdų.*

$\triangleright$Bet kaip suskliaudžiant paskutiniame žingsnyje suskliaudžiame du dėmenis $E_1 + E_2$. Jei naryje E_1 buvo k dėmenų, tai $1 \leq k \leq n-1$, o E_2 – $n-k$ dėmenų. Pagal skaičiaus C_k apibrėžimą, nesikertančių aibių sąjungos elementų formulę gauname

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}, \quad n \geq 2. \tag{1}$$

Susitarkime, be to, kad $C_0 = 0$, $C_1 = 1$. Raskime sekos $\{C_n\}$, $n \geq 0$, generuojančių funkciją

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n =: F(x).$$

Apskaičiuojame, naudodami (1),

$$F(x)^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}\right)x^n = F(x) - x.$$

Išsprendę kvadratinę lygtį, gauname

$$F(x) = \frac{1}{2}\Big(1 \pm (1-4x)^{1/2}\Big).$$

Kadangi $F(0) = 0$, reikia imti minuso ženklą. Pasinaudodami apibendrintąja Niutono binomo formule, keliame laipsniu $1/2$, ir sulyginame koeficientus prie x^n. Gauname

$$\begin{aligned} C_n &= -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n = \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\,\frac{-3}{2}\cdots\frac{-(2n-3)}{2}\,\frac{(-4)^n}{n!} = \\ &= \frac{(2n-2)}{(n-1)!n!}. \end{aligned}$$

◁

Skaičiai C_n vadinami *Katalano* vardu.

13. Eksponentinės generuojančios funkcijos

Naudojant laipsnines generuojančias funkcijas, tenka pagrįsti jų konvergavimą netrivialioje taško $x = 0$ aplinkoje. Kai koeficientų seka didėja palyginti greitai, to padaryti nepavyksta. Tokio sunkumo kai kada pavyksta išvengti normuojant koeficientus. Panagrinėsime labiausiai naudojamą atvejį, kai nagrinėjamos sekos koeficientai dalijami iš indekso faktorialo. Dažnai panašiu normavimu siekiama ir pačių funkcijų paprastumo. Sekos $\{a_n\}$, $n \geq 0$ *eksponentine generuojančia funkcija* (e.g.f.) vadinama formali eilutė

$$f(x) := a_0 + \frac{a_1 x}{1!} + \frac{a_2 x^2}{2!} + \cdots + \frac{a_n x^n}{n!} + \ldots.$$

Taigi vienetų sekos e.g.f. yra e^x, o sekos $\{n!\}$, $n \geq 0$, – funkcija $1/(1-x)$.

Pastebėkime porą savybių, palengvinančių skaičiavimus. Tarkime $g(x)$ – sekos $\{b_n\}$, $n \geq 0$, e.g.f.

Lema. *Jei $f(x)$ - sekos $\{a_n\}$ e.g.f., tai $f'(x)$ - sekos $\{a_{n+1}\}$, $n \geq 0$ e.g.f.. Formali suma $f(x) + g(x)$ atlikta panariui yra sekos $\{a_n + b_n\}$, $n \geq 0$ e.g.f., o sandauga $f(x)g(x)$ – sekos*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

e.g.f.

▷Pirmasis tvirtinimas gaunamas panariui diferencijuojant eilutę $f(x)$. Kiti teiginiai matosi atlikus nurodytus veiksmus◁

Panagrinėkime keletą pavyzdžių. Pradžioje pritaikę e.g.f., raskime netvarkingųjų n eilės keitinių skaičių D_n. Prisimename atsakymą

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}.$$

Pradėkime tapatybe

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k},$$

reiškiančia, kad keitiniai išskaidyti į nesikertančias klases, taip, kad vienoje klasėje esantys keitiniai palieka $k = 0, 1, \ldots, n$ elementų vietoje. Kadangi $\binom{n}{k} = 0$, kai $k > n$, tai pastaroji lygybė ir lema duoda generuojančių funkcijų lygybę

$$\frac{1}{1-x} = e^x D(x), \quad D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n.$$

Radę funkcijos

$$D(x) = e^{-x}/(1-x)$$

n-ą Taylor'o koeficientą, baigiame įrodymą.

1 teorema. *Tegu $S(n,k)$ – antros rūšies Stirlingo skaičiai. Sekos $\{S(n,k)\}$, $n \geq k$ e.g.f. lygi*

$$F_k(x) := \frac{(e^x - 1)^k}{k!}, \quad k \geq 1.$$

▷Naudodamiesi rekurenčiąja Stirlingo skaičių formule, lygybe $S(n,k) = 0$, kai $n < k$, skaičiuojame

$$F_k(x) = \sum_{n \geq k} S(n,k) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq k} \big(kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)\big) \frac{x^n}{n!} =$$

$$= k \sum_{m \geq k} S(m,k) \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{m \geq k-1} S(m,k-1) \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Eilučių konvergavimą užtikrina lengvai patikrinamas įvertis $S(n,k) \leq k^{n+1}$. Diferencijuodami panariui, gauname rekurenčiąją formulę

$$F_k'(x) = kF_k(x) + F_{k-1}(x). \tag{1}$$

Ją naudodami įrodymą baigiame matematinės indukcijos būdu. Kai $k = 1$, $S(n,1) = 1$, todėl norima lygybė išplaukia iš eksponentinės funkcijos skleidinio

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1. \tag{2}$$

Tarę, kad 1 teoremoje užrašyta lygybė yra teisinga su dėl $k - 1$ vietoje k, iš (1) gauname

$$F_k'(x) - kF_k(x) = \frac{(e^x - 1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Diferencialinių lygčių teorijoje yra įrodoma, kad tokios lygtys turi tik vieną sprendinį, patenkinantį sąlygą, $F_k(0) = 0$. Vadinasi, pakanka patikrinti, ar 1 teoremoje nurodyta funkcija tenkina šią lygtį.$\triangleleft$

Išvada. *Belo skaičių sekos* $\{B_n\}$, $n \geq 1$, *e.g.f. lygi*

$$B(x) := \exp\{e^x - 1\}. \tag{3}$$

$\triangleright$Pagal lemą ir Belo skaičių apibrėžimą pakanka sudėti visiems $k \geq$) teoremoje gautas formules ir pasinaudoti (2) išraiška .$\triangleleft$

2 būdas. Iš rekurenčiosios formulės

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

ir Lemos išplaukia sąryšis

$$B'(x) = e^x B(x).$$

Šios diferencialinės lygties sprendinys su sąlyga ir yra (3) funkcija.

2 teorema. *Tegu* $s(n,k)$ *– pirmos rūšies Stirlingo skaičiai. Sekos* $\{s(n,k)\}$, $n \geq k$ *e.g.f. lygi*

$$f_k(x) := \sum_{n \geq k} s(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \big(\log(1+x) \big)^k, \quad |x| < 1, \quad k \geq 0.$$

$\triangleright$Lygybės dešinėje esanti logaritminė funkcija yra apibrėžta srityje $|x| < 1$. Jos Taylor'o koeficientai apibrėžiami vienareikšmiškai. Vadinasi, reikia patikrinti ar skaičiai $a(n,k)$ apibrėžiami lygybe

$$\frac{1}{k!} \big(\log(1+x) \big)^k = \sum_{n \geq k} \frac{a(n,k)}{n!} x^n,$$

sutampa su pirmos rūšies Stirlingo skaičiais. Dauginkime paskutinę lygybę iš m^k ir sudėkime pagal visus $k \geq 0$. Gauname

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \big(m \log(1+x) \big)^k \sum_{k \geq 0} m^k \sum_{n \geq k} \frac{a(n,k)}{n!} x^n.$$

Kairiąją pusę skaičiuojame pagal (2) formulę, dešinėje keičiame sumavimo tvarką. Gauname

$$\exp\{m \log(1+x)\} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{0 \leq k \leq n} a(n,k) m^k.$$

Kadangi kairioji pusė yra polinomas $(1+x)^m$, tai sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, gauname

$$\binom{m}{n} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} a(n,k) m^k,$$

kai $n \leq m$. Palyginę su pirmos rūšies Stirlingo skaičių apibrėžimu, matome, kad $a(n,k) = s(n,k)$. $\triangleleft$

14. Rekurentieji sąryšiai. Pavyzdžiai

Nagrinėsime sekas, kurių n-tasis narys tam tikra formule yra išreiškiamas per jos narius su mažesniais indeksais. Be to, vienetinumui užtikrinti nurodoma pirmųjų sekos narių. Tokios išraiškos vadinamos *rekurenčiosiomis formulėmis.* Labiausiai žinomos yra aritmetinė ir geometrinė progresijos nusakomos formulėmis

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad a_n = qa_{n-1}$$

atitinkamai. Čia d yra bet koks skaičius, o q - skaičius, nelygus nuliui ir vienetui. Paskalio tapatybė binominiams koeficientams yra dviejų indeksų sekos rekurenčiosios formulės pavyzdys. Labai daug uždavinių apie sekas yra sprendžiami dviem etapais. Pradžioje randami rekurentieji jos narių sąryšiai, o vėliau jie yra išnagrinėjami. Antrajamaje žingsnyje pritaikomi kombinatorikos metodai. Taip dažnai elgiamasi n-os eilės determinantų teorijoje. Pradėsime nuo kitokių paprastų pavyzdžių.

1 uždavinys. *Įrodykite, kad n plokštumos tiesių, tarp kurių nėra dviejų lygiagrečių ir bet kurios trys iš jų nesikerta viename taške, dalija plokštumą į*

$$p_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

sričių.

Sprendimas. Akivaizdu, kad $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $p_3 = 7$. Taikome indukcijos principą. Tarkime, kad jau išvedėme k tiesių ir nustatėme plokštumos sričių skaičių p_k. Vedame, $k+1$ tiesę. Keliaukime ja nuo taško, esančio dar iki pirmojo susikirtimo su viena iš pirmųjų tiesių. Šią sritį naujoji tiesė padalijo pusiau, už susikirtimo su pirmaja tiese esančią sritį - irgi pusiau. Pratesę šią kelionę, matome, kad kiekviena nauja sritis dalijama pusiau. Kadangi $k+1$ tiesė kirs $k+1$ sričių, gauname sričių skaičiaus išraišką

$$p_{k+1} = p_k + (k+1).$$

Pritaikę indukcijos prielaidą dėl p_k, gauname

$$p_{k+1} = 1 + \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Vadinasi, viršuje nurodyta p_n formulė yra teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n.

2 uždavinys (Leonardo Fibonacci). *Triušių pora per antrą mėnesį atsivedė naują porelę jauniklių ir vėliau kas mėnesį dar po porelę. Kitos porelės elgėsi taip pat. Pažymėkime F_n - triušių porų skaičių n mėnesio gale. Įrodykite, kad*

$$F_n = \frac{(\sqrt{5}+1)^{k+1} - (1-\sqrt{5})^{k+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}, \quad n \geq 0.$$

Sprendimas. Nesunku matyti, kad seka F_n (vadinama Fibonačio vardu) tenkina rekurentųjį sąryšį

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2. \tag{1}$$

Išnagrinėkime šią lygybę įvairiais būdais.

1 būdas. Ieškome laipsninės generuojančios funkcijos

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Kadangi

$$x\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1} = x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n$$

ir

$$x^2\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n,$$

tai

$$\Phi(x) - x\Phi(x) - x^2\Phi(x) = 1,$$

arba

$$\Phi(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{(1-\alpha_1^{-1}x)(1-\alpha_2^{-1}x)}.$$

Čia α_1, α_2 - lygties

$$x^2 + x - 1 = 0$$

šaknys, t.y.,

$$\alpha_1 = (-1+\sqrt{5})/2, \qquad \alpha_2 = (-1-\sqrt{5})/2.$$

Pastebėkime, kad $\alpha_2 = -\alpha_1^{-1}$. Racionaliąją funkciją išskaidome paprasčiausiųjų trupmenų suma. Gauname

$$\Phi(x) = \frac{A}{1+\alpha_1 x} + \frac{B}{1+\alpha_2 x} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1+\alpha_1 x} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{5}}\frac{1}{1+\alpha_2 x}.$$

Pasinaudoję begalinės geometrinės progresijos sumos formule, kai $|x| < (\sqrt{5}-1)/2$, gauname

$$\Phi(x) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha_1)^n x^n - \frac{\alpha_2}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha_1)^{-n} x^n.$$

Sulyginę koeficientus prie x^n, baigiame F_n formulės išvedimą. $\diamond$

2 būdas. Galima naudoti ir eksponentines generuojančias funkcijas. Perrašę (1) formulę patogesniu būdu, gauname $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$, $m \geq 0$. Pagal 13 skyrelio lemą funkcija

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} x^n$$

tenkina diferencialinę lygtį

$$\Psi''(x) = \Psi'(x) + \Psi(x)$$

ir pradines sąlygas $\Psi(0) = \Psi'(0) = 1$. Diferencialinių lygčių teorijoje įrodoma, kad pastarojo uždavinio sprendinys yra funkcija

$$\Psi(x) = \frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 x} - \alpha_2 e^{\alpha_2 x}}{\sqrt{5}}.$$

Išskleidę eksponentines funkcijas Teiloro eilutėmis, randame n-tą narį. $\diamond$

15. Rekurentieji sąryšiai. Bendra teorija

Dabar išvystysime bendresnę teoriją. Tarkime, kad seka $\{u_n\}$, $n \geq 0$ yra apibrėžta r eilės sąryšiu

(2) $$u_{n+r} + a_1 u_{n+r-1} + \cdots + a_r u_n = 0, \quad n \geq 0,$$

ir pradiniais nariais $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$. (2) pavidalo formules vadiname *tiesiniais homogeniniais rekurenčiaisiais sąryšiais*, o polinomas

$$A(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j, \quad a_0 := 1$$

vadinamas *charakteristiniu polinomu*.

(Galimas ir kitoks šio polinomo apibrėžimas:

$$\tilde{A}(x) = \sum_{j=0}^{r} a_{r-j} x^j, \quad a_0 := 1,$$

bet tada tolesnės formulės komplikuojasi).

Prisilaikydami mūsų apibrėžimo, ištirkime laipsninę generuojančią funkciją

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

1 teorema. *Sandauga $A(x)U(x)$ yra polinomas*

$$D(x) := \sum_{k=0}^{r-1} d_k x^k$$

su

$$d_k = \sum_{j=0}^{k} a_j u_{k-j}, \qquad 0 \le k \le r-1.$$

Įrodymas. Daugindami $A(x)$ ir $U(x)$ panariui, gauname laipsninę eilutę su koeficientais

$$d_k = \sum_{j=0}^{k} a_j u_{k-j}. \tag{3}$$

Čia laikome, kad $a_j = 0$, kai $j \ge r+1$. Jei $k \le r-1$, (3) formulė yra ieškomoji. Imkime paeiliui $k = r, r+1, \dots$ ir naudodami (2), įsitikinkime, kad tada $d_k = 0$. $\diamond$

Išvada. *Generuojanti funkcija $U(x) = D(x)/A(x)$ yra racionalioji funkcija.*

Toliau funkcijai $U(x)$ taikysime racionaliųjų funkcijų teoriją. Tokių funkcijų kūne $\mathbf{C}(x)$ egzistuoja $U(x)$ išraiška paprasčiausiųjų trupmenų suma

$$U(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{l_{ij}}{(1-\lambda_i x)^j}. \tag{4}$$

Čia $\lambda_i^{-1} \in \mathbf{C}$, $1 \le i \le k$, - charakteristinio polinomo $A(x)$ šaknys, r_r - jų kartotinumai, $r_1 + \cdots + r_k = r$, o $l_{ij} \in \mathbf{C}$. (4) išraišką galima rasti, jei pavyksta rasti $A(x)$ šaknis. Jei jau turime skaidinį

$$A(x) = a_r (x - x_1)^{r_1} \dots (x - x_k)^{r_k}, \quad x_i \in \mathbf{C},$$

tai neapibrėžtųjų koeficientų metodu randame koeficientus A_{ij} tenkinančius lygybę racionaliųjų funkcijų kūne

$$U(x) = \frac{D(x)}{A(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_{ij}}{(x - x_i)^j}.$$

Pastebėkime, kad $x_i \neq 0$, nes $a_0 = 1$. Vadinasi, iškėlę x_i prieš skliaustus, gautume (4) formulę.

2 teorema. *Jei $U(x)$ turi (4) išraišką, tai*

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n \sum_{j=1}^{r_i} l_{ij} \binom{j+n-1}{n}. \quad n \ge 0.$$

Įrodymas. Pagal apibendrintąją Niutono binomo formulę

$$\frac{1}{(1-\lambda_i x)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-j}{n} (-1)^n \lambda_i^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n} \lambda_i^n x^n, \quad |\lambda_i x| < 1.$$

Įstatę į (4) formulė ir sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, baigiame 2 teoremos rodymą. $\diamond$

2 eilės tiesinių rekurenčiųjų sąryšių atveju gauname.

Išvadą. *Tarkime, kad seka* $\{u_n\}$, $n \geq 0$, *apibrėžta sąryšiu* $u_{n+2} + a_1u_{n+1} + a_2u_n = 0$ *ir pradinėmis sąlygomis* $u_0 = u_1 = 1$. *Jei* $A(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2)$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda_i = x_1^{-1}$, *tai*

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n,$$

o konstantos c_1, c_2 *randamos iš pradinių sąlygų. Jei* $A(x) = a_2(x - x_1)^2$, $\lambda = x_1^{-1}$, *tai*

$$u_n = c_1\lambda^n + c_2n\lambda^n,$$

o konstantos c_1, c_2 *randamos iš pradinių sąlygų.* $\diamond$

Pavyzdys. *Raskime sekos* $\{u_n\}$, $n \geq 0$, *tenkinančios ketvirtos eilės rekurentųjį sąryšį*

$$u_{n+4} - 2u_{n+2} + u_n = 0,$$

bendrąjį narį, jei $u_0 = u_1 = 1$, *o* $u_2 = u_3 = 2$.

Sprendimas. Charakteristinis polinomas turi pavidalą

$$A(x) = x^4 - 2x^2 + 1,$$

todėl generuojanti funkcija lygi

$$U(x) = \frac{D(x)}{(1 - x^2)^2}.$$

Čia kubinio polinomo $D(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3$ koeficientai skaičiuojami pagal 1 teoremoje naudotas formules. Gauname

$$d_0 = a_0u_0 = 1,$$

$$d_1 = a_0u_1 + a_1u_0 = 1,$$
$$d_2 = a_0u_2 + a_1u_1 + a_2u_0 = 0,$$
$$d_3 = a_0u_3 + a_1u_2 + a_2u_1 + a_3u_0 = 0.$$

Vadinasi,

$$U(x) = \frac{1 + x}{(1 - x^2)^2} = \frac{1}{(1 - x)^2(1 + x)} = \frac{A_1}{1 - x} + \frac{A_2}{(1 - x)^2} + \frac{A_3}{1 + x}.$$

Subendravardiklinę ir sulyginę skaitikliuose esančius polinomus, randame neapibrėžtuosius koeficientus A_1, A_2, A_3. Gauname

$$1 = A_1(1 - x^2) + A_2(1 + x) + A_3(1 - 2x + x^2)$$

arba

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \ A_3 &= 1, \\ A_2 - 2A_3 &= 0, \\ -A_1 \qquad + A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vadinasi, $A_1 = 1/4$, $A_2 = 1/2$ ir $A_3 = 1/4$. Dabar galime pasinaudoti 2 teorema.

Atsakymas.

$$u_n = \frac{1+(-1)^n}{4} + \frac{n+1}{2}.$$

◇

Pastebėkime, kad sprendžiant lengviau naudoti 2 teoremos įrodymo metodą, negu išvestąsias formules!

16. Sudėtinių funkcijų Tayloro koeficientų rekurentieji sąryšiai

Praeitame skyrelyje, turėdami rekurentųjį sąryšį, ieškojome bendrojo sekos nario. Pastarasis dažnai būna sudėtingas ir apsunkina skaičiavimus. Programuojant žymiai paprasčiau naudoti rekurenčiąsias formules. Tai ypač gerai atsispindi skaičiuojant sudėtinių funkcijų Tayloro koeficientus. Pradėkime nuo pavyzdžio.

Pavyzdys. *Rasti funkcijos*

$$F(x) = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j}\, x^j \right\}. \tag{1}$$

n-ąjį Tayloro koeficientą, jei a_j yra aprėžta realių skaičių seka.

Sprendimas. Laipsninė eilutė po eksponentės ženklu absoliučiai konverguoja srityje $|x| < 1$. Ja apsiribodami, dauginame žinomus skleidinius

$$\begin{aligned} F(x) &= \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_j x^j}{j} \right)^k \frac{1}{k!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{\substack{k_1,\dots,k_n \ge 0 \\ 1k_1 + \cdots nk_n = n}} \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j^k}{j^{k_j} k_j!} \Bigg) x^n. \end{aligned}$$

Taigi, ieškomi koeficientai lygūs

$$b_n := \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n \ge 0 \\ 1k_1 + \cdots + nk_n = n}} \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j^k}{j^{k_j} k_j!}, \quad n \ge 0. \tag{2}$$

Tokia ir į ją panašios formulės yra labai nepatogios programuotojams.

1 teorema. *Funkcijos $F(x)$ Tayloro koeficientai b_n tenkina rekurentųjį sąryšį*

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} a_{n-j+1} b_j, \quad b_0 := 1,\, n \geq 0.$$

Įrodymas. Diferencijuodami gauname

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} = F(x) \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1} x^l = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} b_j a_{n-j+1} \right) x^n.$$

Kadangi funkcijos, esančios kairėje šios lygybės pusėje, koeficientas prie x^n lygus $(n+1)b_{n+1}$, apskliaustoji suma yra jo išraiška. ⋄

2 teorema. *Funkcijos*

$$G_m(x) := (A(x))^m := \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^m, \quad m \in \mathbf{N},\ a_0 \neq 0$$

su aprėžtais realiais a_j Tayloro koeficientai $g_n := g_n(m)$ tenkina rekurentųjį sąryšį

$$g_{n+1} = a_0^{-1} \sum_{j=0}^{n} \left(m - \frac{(m+1)j}{n+1} \right) a_{n-j+1} g_j, \quad g_0 = a_0^m,\ n \geq 0.$$

Įrodymas. Vėl diferencijuodami gauname

$$G'(x) = m A^{m-1}(x) A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) g_{n+1} x^n.$$

Padauginame abi puses iš $A(x)$ ir panariui sudauginame eilutes. Kairėje pusėje gauname

$$m A^m(x) A'(x) = m G_m(x) A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(m \sum_{l=0}^{n} (n-l+1) g_l a_{n-l+1} \right) x^n.$$

Panašiai dešinėje pusėje gauname eilutę

$$A(x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) g_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} (l+1) g_{l+1} a_{n-l} \right) x^n.$$

Sulyginame koeficientus prie x^n:

$$\sum_{l=0}^{n} (l+1) g_{l+1} a_{n-l} = m \sum_{l=0}^{n} (n-l+1) g_l a_{n-l+1}.$$

Iš čia išsprendžiame g_{n+1}. Gauname

$$(n+1)g_{n+1}a_0 = m\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)a_{n-l+1}g_l - \sum_{l=0}^{n} la_{n-l+1}g_l = \sum_{l=0}^{n}\big(m(n-l+1)-l\big)a_{n-l+1}g_l.$$

Iš čia išplaukia ieškoma lygybė. $\diamond$

Užduotis. *Raskite funkcijos*

$$\log\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right), \quad a_0 = 1,$$

su realiais a_j Tayloro koeficientų rekurenčiąją formulę.

Pastaruoju atveju funkcijos abibrėžimui tektų reikalauti, kad po logaritmo ženklu esanti eilutė ne tik konverguotų, bet ir nebūtų lygi nuliui. Ir ankstesniuose pavyzdžiuose sekos a_j aprėžtumas gali būti pakeistas reikalavimu, kad jos laipsninė generuojanti funkcija turėtų netrivialią konvergavimo sritį. Pačios rekurenčiosios formulės turi prasmę be jokių išankstinių apribojimų.

15. Grandininės trupmenos

Reiškinį

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots \cfrac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k}}}}$$

vadiname *grandinine trupmena.* Trumpesnis žymuo:

$$\alpha = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_k].$$

Čia $q_0 \in \mathbf{Z}$, $q_j \in \mathbf{N}$, $1 \le j \le k$, o $k \ge 0$ - sveikasis skaičius.

1 teorema. *Kiekvieną racionalųjį skaičių galime išreikšti grandinine trupmena, be to, vieninteliu būdu.*

Įrodymas. Tegu $\alpha = a/b$, $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{N}$, - nagrinėjamas racionalusis skaičius. Pritaikykykime Euklido algoritmo formules

$$\begin{aligned}
a &= q_0 b + r_0, \qquad 0 < r_0 < b,\\
b &= q_1 r_0 + r_1, \qquad 0 < r_1 < r_0,\\
r_0 &= q_2 r_1 + r_2, \qquad 0 < r_2 < r_0, \dots\\
r_{k-3} &= q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}, \qquad 0 < r_{k-1} < r_{k-2},\\
r_{k-2} &= q_k r_{k-1}.
\end{aligned}$$

Čia $q_0 \in \mathbf{Z}$, o $g_j \in \mathbf{N}$. Nelygybės $b > r_0 > r_1 > \cdots > r_{k-1}$ rodo, kad šių formulių yra baigtinis skaičius. Dabar išreikšdami paeiliui

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= q_0 + \frac{1}{b/r_0}, \\ \frac{b}{r_0} &= q_1 + \frac{1}{r_0/r_1}, \\ \frac{r_0}{r_1} &= q_2 + \frac{1}{r_1/r_2}, \ldots \\ \frac{r_{k-3}}{r_{k-2}} &= q_{k-1} + \frac{1}{r_{k-2}/r_{k-1}}, \\ \frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} &= q_k \end{aligned}$$

ir įstatydami į aukščiau stovinčias formules, gauname norimą išraišką.

Atkreipę dėmesį į tai, kad q_j yra tam tikrų skaičių sveikosios dalys, kurios apibrėžiamos vienareikšmiškai, gauname ir vienaties pagįstumą. $\diamond$

Trupmenų sekos

$$\delta_0 := \frac{P_0}{Q_0} := [q_0] = q_0, \quad \delta_1 := \frac{P_1}{Q_1} := [q_0, q_1], \quad \delta_2 := \frac{P_2}{Q_2} := [q_0, q_1, q_2], \ldots$$

nariai vadinami *artininiais* (reduktais). Atkreipkime dėmesį į tai, kad δ_k gaunamas iš δ_{k-1} pakeičiant q_{k-1} skaičiumi $q_{k-1} + 1/q_k$.

2 teorema. *Pažymėkime $P_{-1} = 1$ ir $Q_{-1} = 0$. Artinių skaitikliai ir vardikliai tenkina šiuos rekurenčiuosius sąryšius*:

$$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2} \qquad Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \quad k \geq 1.$$

Įrodymas. Pritaikome indukciją. Jei $k = 1$, tai $P_1 = q_0 q_1 + 1 = q_1 P_0 + P_{-1}$ ir $Q_1 = q_1 = q_1 Q_0 + Q_{-1}$. Tarę, jog formulės išvestos dėl visų P_j, Q_j, kai $j \leq k$, imame artinį

$$\delta_{k+1} = P_{k+1}/Q_{k+1}.$$

Kaip pastebėjom anksčiau, jis gaunamas iš

$$\delta_k = P_k/Q_k = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}$$

vietoje q_k įstačius $q_k + 1/q_{k+1}$. Taigi,

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} = P_{k+1}/Q_{k+1} &= \frac{\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) P_{k-1} + P_{k-2}}{\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \\ &= \frac{q_{k+1}(q_k P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1}}{q_{k+1}(q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) + Q_{k-1}} = \frac{q_{k+1} P_k + P_{k-1}}{q_{k+1} Q_k + Q_{k-1}}. \end{aligned}$$

Tą ir reikėjo įrodyti. $\diamond$

Išvada. *Seka Q_k, $k \geq 0$, griežtai monotoniškai didėja.*

3 teorema. *Kai $k \geq 1$, tai*

$$\det\begin{pmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{pmatrix} = P_kQ_{k-1} - P_{k-1}Q_k = (-1)^{k+1}.$$

Be to,

$$\delta_k - \delta_{k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{Q_kQ_{k-1}}.$$

*Įrodymas*Skaičiuodami determinantą pritaikome 2 teoremą. Jis lygus priešingam determinantui, kuriame elementų indeksai vienetu yra mažesni. Po k žingsnių gauname jo reikšmę:

$$(-1)^k(P_0Q_{-1} - P_{-1}Q_0) = (-1)^k(q_0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = (-1)^{k+1}.$$

Išvedant antrąją formulę, pakanka subendravardiklinti ir pritaikyti ką tik gautą lygybę. $\diamond$

Išvada. *Teisingos nelygybės*

$$\delta_0 < \delta_1 < \cdots < \frac{a}{b} < \ldots \delta_3 < \delta_1.$$

Be to,

$$|\frac{a}{b} - \delta_k| \leq \frac{1}{Q_kQ_{k+1}}.$$

*Įrodymas*Pakanka atidžiau įsižiūrėti į gautąsias formules. $\diamond$

Pastaroji nelygybė svarbi apytikriam skaičiavimui. Įracionalieji skaičiai skleidžiami begalinėmis grandinėmis trupmenomis. Jų artiniai turi visas ką tik išvardintas savybes. Apsiribosime pavyzdžiu.

Uždavinys. Ištraukime kvadratinę šaknį iš 5.

Sprerndimas. Kadangi skaičiaus $\sqrt{5}$ sveikoji dalis yra 2, tai

$$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2) = 2 + \frac{1}{1/(\sqrt{5} - 2)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{1} = 4 + (\sqrt{5} - 2) = 4 + \frac{1}{1/(\sqrt{5} - 2)}.$$

Ir vėl vardiklyje atsirado toks pats skaičius. Kartodanmi procesą, skaičių 4 galėtume išskirti norimai ilgai. Vadinasi,

$$\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, \ldots].$$

Pagal rekurenčiąsias 2 teoremos formules gauname artinių seką:

$$2, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{38}{17}, \quad \frac{161}{72}, \quad \frac{682}{305}, \ldots$$

Priešpaskutinė parašyta trupmena aproksimuoja $\sqrt{5}$ tikslumu:

$$|\sqrt{5} - \frac{161}{72}| \leq \frac{1}{72 \cdot 682}.$$

Aprašytasis algoritmas yra labai greitas. Galima būtų įrodyti, kad periodinės grandininės trupmenos ir tik jos yra kvadratinių įracionalybių skleidiniai.

GRAFŲ TEORIJA

1. Pagrindinės sąvokos

Grafas - aibių pora $G = (V, E)$, čia V - **viršūnių** aibė, E - nesutvarkytųjų viršūnių porų $e := (x, y) =: xy = yx$, $x, y \in V$ arba **briaunų** (lankų) aibė. Kai poros xy laikomos sutvarkytomis, G vadinamas **digrafu**. Viršūnės vaizduojamos taškais, briaunos - jas jungiančiais lankais arba atkarpomis. Digrafo atveju papildomai nurodoma ir kryptis. Kada vietoje briaunų aibės E imamas briaunų rinkinys (šeima) su pasikartojimais, pora (V, E) vadinama **multigrafu**. Jį vaizduojant plokštumoje, dvi viršūnės jungiamos atitinkamu kiekiu briaunų. Viršūnės x ir y vadinamos xy briaunos **galais** arba jai **incidenčiomis** viršūnėmis. Viena kitos atžvilgiu jos yra **gretimosios** (kaimyninės) viršūnės.

Geometrinis vaizdavimas dažnai yra klaidinantis, nes skirtingi brėžiniai gali atitikti tą patį grafą (žr. 1 pav. dviem būdais pavaizduotą grafą $K_{3,3}$). Grafai $G = (V, E)$ ir $G' = (V', E')$ vadinami **izomorfiškais**, jei egzistuoja bijekcija $\phi : V \to V'$ tokia, kad su kiekviena briauna $xy \in E$ yra patenkinta sąlyga:

$$xy \in E \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(x)\phi(y) \in E'.$$

Multigrafų atveju pastaroji sąlyga turi būti patenkinta kiekvienai iš kartotinių briaunų, o digrafams – atvaizdis ϕ turi išlaikyti ir briaunos kryptį.

Kai kada grafo (arba digrafo) viršūnių aibėje tenka įvesti numeraciją. Tada grafai (digrafai) vadinami *numeruotaisiais*, o du tokie grafai $G = (V_1, E_1)$ ir $G = (V_2, E_2)$,, čia $V_i = \{v_{i1}, \ldots, v_{in}\}$, vadinami *izomorfiškais*, jeigu grafų anksčiau apibrėžtas izomorfizmas išlaiko dar ir numeraciją, t.y., $\Phi(v_{1j}) = v_{2j}$. Pavyzdžiai: keitinių grafinis vaizdavimas, visų baigtinės aibės atvaizdžių į save grafinis vaizdavimas. Apskritai izomorfiškus grafus galima sutapatinti, laikyti juos lygiais.

Nagrinėsime tik **baigtinius** grafus, t.y. tik poras (V, E) su baigtinėmis aibėmis V ir E. Šių aibių galias žymėkime $|V| = n \geq 1$ ir $|E| = m \geq 0$. Jei nebus pasakyta priešingai, grafas neturės taip vadinamų **kilpų**, t.y. briaunų xx. Kadangi grafas neturi kartotinių briaunų, tai $m \leq C_n^2$. Čia C_n^k - binominis koeficientas. Dažnai tokie grafai vadinami **paprastaisiais**. Skaičius n vadinams grafo G **eile**, o m - grafo G **didumu**. Kai $m = 0$, grafas G vadinamas **tuščiuoju** (tradiciškai žymimas E^n), o kai $m = C_n^2$, - **pilnuoju**. Pilname grafe visos viršūnės yra tarpusavyje sujungtos, jis žymimas K^n.

O kiek iš viso galima sudaryti n eilės grafų? Numeruotųjų grafų atvejis yra paprastesnis.

1 teorema. *Galima sudaryti*

$$2^{n(n-1)/2}$$

skirtingų n eilės numeruotųjų grafų.

*Įrodymas*Skaičiuojamų grafų didumai gali būti $0, 1, \ldots, k, \ldots, N := \binom{n}{2}$. Brėžiant k didumo grafą, jo briaunų aibę galėtume parinkti iš visos galimos briaunų aibės $\binom{N}{k}$ būdų. Taigi, skirtingų n eilės grafų gauname

$$1 + \binom{N}{1} + \cdots + \binom{N}{k} + \cdots + \binom{N}{N} = (1+1)^N = 2^N.$$

$\diamond$

Viršūnės x **laipsniu** (valentingumu) $\delta(x)$ laikomas incidenčių jai briaunų skaičius. Kai $\delta(x) = 0$, x - **izoliuotoji** viršūnė. Skaičiai

$$\delta(G) = \min\{\delta(x) : \ x \in G\}, \qquad \Delta(G) = \max\{\delta(x) : \ x \in G\}$$

atitinkamai vadinami **minimaliuoju** bei **maksimaliuoju** grafo laipsniais. Kai $\delta(G) = \Delta(G) =: k$, grafas G vadinamas k **reguliariuoju** (k-valenčiu). Pvz., **kubinis** bei **Petersen**'o grafai (žr. 2 pav.) yra trivalenčiai.

Grafas $G' = (V', E')$ vadinamas $G = (V, E)$ **pografiu**, jeigu $V' \subset V$ ir $E' \subset E$. Jeigu pografio G' briaunų aibėje E' yra visos E briaunos, jungiančios V' viršūnes, tai G' vadinamas V' **indukuotoju** pografiu, jį žymėsime $G[V']$. Apibrėšime grafų veiksmų. Tarkime, kad $G = (V, E)$ - grafas, $x \in V' \subset V$ ir $xy \in E' \subset E$. Tada

$$G - V' := G[V \setminus V']$$

ir

$$G - E' := (V, E \setminus E').$$

Taigi, grafas $G - x := G - \{x\}$ gaunamas iš G išmetant ne tik viršūnę x, bet ir jai incidenčias briaunas, o $G - xy := G - \{xy\}$ - išmetant tik briauną xy. Kai kada tikslinga, atėmus iš grafo briauną xy, sutapatinti viršūnes x ir y. Ši operacija vadinama grafo **sutraukimu**.

Grafas $(V \cup V', E \cup E')$ vadinamas $G = (V, E)$ ir $G' = (V', E')$ **sąjunga**, žymima $G \cup G$. Dažniausiai grafų sąjungoje viršūnių aibėms dar iškeliamas reikalavimas neturėti bendrų taškų. Mes taip pat prisilaikysime šio reikalavimo. Grafų G ir G' **suma** $G + G'$ apibrėžiama kaip jų sąjunga, papildomai išvedant visas briaunas, jungiančias V ir V' viršūnes.

Grafą vaizdžiai charakterizuoja įvairios "klajojimo" juo galimybės. Viršūnių ir briaunų seką $x_0, e_1, x_1, \ldots, e_k, x_k$ su $e_j = x_{j-1}x_j$, $x_j \in V$, $j = 0, \ldots, k$ vadiname **keliu** ($x_0 - x_k$ keliu), o k - jo **ilgiu**. Kai kelyje visos briaunos yra skirtingos, jį vadiname **trasa**. Uždarą trasą (kai $x_0 = x_k$ ir $k \geq 2$) vadinsime **grandine**. Jeigu kelyje (arba trasoje) visos vidinės viršūnės $x_1, \ldots, x_{k-1}$ yra skirtingos, jį vadiname **taku**, ir uždarą taką, kai $k \geq 2$, - **ciklu** (grandimi). Takus bei ciklus žymėsime pereinamų viršūnių seka, pvz., $P = x_1x_2x_3...x_k$. Akivaizdžią paskutinę briauną x_kx_1 cikle galime ir nenurodyti. Jei grafe egzistuoja grandinė, sudaryta iš visų jo briaunų, tai jis vadinamas **Euler**'io vardu, o jei jame yra ciklas, apimantis visas jo viršūnes, tai jis yra **Hamilton**'o grafas. Šios sąvokos nėra ekvivalenčios. Pateikite pavyzdžių.

Grafas G yra **jungusis**, jei bet kurią porą viršūnių iš E jungia takas. Jei $n \geq 2$, šis grafas neturi izoliuotų viršūnių.

2 teorema. *Grafas yra jungių pografių sąjunga.*

Įrodymas. Dvi viršūnes vadinkime **ekvivalenčiomis**, jeigu grafe yra jas jungiantis takas. Tai ekvivalentumo sąryšis viršūnių aibėje V. Ekvivalenčių viršūnių klasės $V_1, \ldots, V_s$ nesikerta, grafe nėra briaunų, jungiančių skirtingų klasių viršūnes. Indukuotieji pografiai $G[V_1], \ldots, G[V_s]$ ir sudaro ieškomos sąjungos pografius. $\diamond$

Teoremoje apibrėžtus pografius vadinsime grafo **jungumo komponentėmis**. Viršūnė, kurios atėmimas iš grafo keičia komponenčių skaičių, vadinama **iškarpos** viršūne, o briauna, - **tiltu**. **Atstumu** $d(x, y)$ tarp viršūnių x ir y vadinsime trumpiausio tako ilgį, jei toks takas egzistuoja. Priešingu atveju, atstumą laikysime begaliniu.

Grafas $G = (V, E)$ vadinamas **dvidaliu** (bichromačiuoju, dvispalviu), jei $V = V' \cup V''$, $V' \cap V'' = \emptyset$, o bet kokia briauna iš E jungia viršūnę iš V' su viršūne iš V''. Dvidalis grafas neturi nelyginio ilgio grandinių. Įsitikinkite, jog ir priešingas teiginys yra teisingas!

2. Miškas ir medžiai

Grafas, neturintis ciklų (beciklis), vadinamas **mišku**, o jungusis miškas - **medžiu**.

1 teorema. *Grafas yra miškas tada ir tik tada, kada bet kokią viršūnių porą jungia ne daugiau kaip vienas takas.*

Įrodymas. Jei grafas nėra miškas, jame egzistuoja ciklas $x_0 x_1 ... x_l x_0$. Todėl turime du takus $x_0 x_1 ... x_l$ ir $x_0 x_l$.

Atvirkščiai, tarkime, kad $P = x_0 ... x_l$ ir $P' = x_0 y_l ... y_s = x_l$ - du takai, jungiantys x_0 su x_l. Tarkime, kad $i+1$ - mažiausias indeksas, su kuriuo $x_{i+1} \neq y_{i+1}$, o $j \geq i$ mažiausias indeksas su kuriuo y_{j+1} jau priklauso P, t.y. $y_{j+1} = x_k$. Tada $x_i ... x_k y_j ... y_{i+1}$ yra ciklas. Todėl grafas nėra miškas.

2 teorema. *Šie tvirtinimai yra ekvivalentūs:*

a) G yra medis;

b) G yra minimalus jungus grafas, t.y. bet kurios briaunos atėmimas iš grafo padidintų komponenčių skaičių;

c) G yra maksimalus beciklis grafas, t.y. sujungiant bet kokias neincidenčias viršūnes būtų sukuriamas ciklas.

Įrodymas.

Pažymėkime V, E grafo G viršūnių ir briaunų aibes, $xy \in E$ - bet kokią jo briauną, o u, v - bet kokias dvi neincidenčias viršūnes.

Jei G - medis ir grafas $G - xy$ būtų jungus, tai G turėtų du takus $P = x x_1 ... x_k y$ ir $P = xy$, vadinasi, todėl turėtų ciklą $P = x x_1 ... x_k y x$. Tad, iš a) išplaukia b). Briauna, kurios atėmimas didina grafo komponenčių skaičių vadinama *tiltu*.

Jei G - medis, tai jame egzistuoja takas nuo u iki v. Išvestas naujasis takas uv su senuoju sudarytų ciklą, ir grafas $G + uv$ jau turėtų ciklą. Tad, iš a) išplaukia c).

Tarkime, G - minimalus jungus grafas. Jei G nebūtų medis, o turėtų ciklą $xx_1...yx$, tai išmetus briauną xy, jo jungumas nepakistų. Prieštara įrodo, jog iš b) išplaukia a).

Panašiai įrodomi ir likę teiginiai. $\diamond$

Išvada. *Jungiame grafe egzistuoja medis, kurio viršūnių aibė sutampa su visa grafo viršūnių aibe.*

*Įrodymas*Pasimaudokite b) savybe. $\diamond$

Išvadoje gautasis medis vadinams *minimaliu jungiančiuoju medžiu* (karkasu). Nurodysime dar porą karkasinio medžio išvedimo būdų.

1 būdas. Jungiame grafe $G = (V, E)$ fiksuokime viršūnę $x \in V$ ir viršūnių aibę suskaidykime į nepersikertančias aibes

$$V_i = \{y \in V : \ d(x, y) = i\}, \quad i = 0, 1, \ldots, s < \infty.$$

Jei $y_i \in V_i$, tai egzistuoja $x - y_i$ takas $xz_1...z_{i-1}y_i$. Pastebėkime, kad $V_j \neq \emptyset,\ j = 0, 1, ..., i$, kai $i > 0$. Taigi, bet kuriam $y_i \in V_i$ rasime $y'_{i-1} \in V_{i-1}$. Iš, gal būt, kelių galimybių pasirinkime vieną. Kai y perbėgs V, priskirtieji y' (artimesni pradiniam taškui) ir y sudarys jungųjį grafą

$$T = (V, E'), \qquad E' = \{yy' : y \in V, y \neq x\}.$$

Kadangi į y patenkama tik iš vieno taško, jis neturi ciklų. Taigi, T - karkasinis medis.

2 (indukcinis) būdas. Imkime $x \in V$. Tada $T_1 := (\{x\}, \emptyset)$ - medis. Tarkime, kad jau sukonstravome medžių seką

$$T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_k \subset G$$

ir medžio T_i eilė yra i. Jei $k < n = |V|$, tai egzistuoja pora (y, z) tokia, kad $z \in V(T_k)$, $y \in V \setminus V(T_k)$, čia $V(T_k)$ - T_k viršūnių aibė, ir $zy \in E$. Priešingas atvejis prieštarautų grafo G jungumui. Apibrėžkime

$$T_{k+1} = (V(T_k) \cup \{y\}, E(T_k) \cup \{zy\}).$$

Baigtiniame grafe šis procesas baigtinis. Jis baigiasi, kai $k = n$.

Medį galime charakterizuoti ir pagal jo skaitinius parametrus: eilę ir didumą, bet apie tai vėliau.

3. Viena optimizavimo problema

Karkasinių medžių savybėmis tenka naudotis sprendžiant kai kuriuos optimizavimo uždavinius. Sakykime, reikia suprojektuoti pigiausią vandentiekio tinklą, jungiantį visas miestelio sodybas, kada žinomos visų trasų tarp namų kainos. Jeigu gamtinės kliūtys yra neįveikiamos, galima laikyti, kad trasos per šią kliūtį kaina yra begalinė.

Formalizuojant galima įsivaizduoti, kad turime pilnąjį n grafą $G = (V, E)$ ir apibrėžtą funkciją

$$f : E \to \mathbf{R}^+.$$

Reikia išvesti karkasinį medį (vesti kelias linijas į tą pačią sodybą visada bus brangiau) $T = (V, E')$ tokį, kad bendra kaina

$$F(T) = \sum_{xy \in E'} f(xy)$$

būtų mažiausia. Šį medį vadinkime *ekonomišku.* Pradžioje pateiksime tris šio uždavinio sprendimo algoritmus.

1 algoritmas:

a) imame briauną $e = xy \in E$ su mažiausia kaina,

$$f(e) = \min_{xy \in E} f(xy);$$

b) iš likusių briaunų išrenkame pigiausią;

c) procesą kartojame su sąlyga, kad išrenkamos briaunos nesudarytų ciklo.

Procesas baigtinis, o gautasis grafas, kaip maksimalus beciklis grafas, pagal 2.2 teoremos c) punktą bus karkasinis medis. Gautojo medžio ekonomiškumą išnagrinėsime vėliau.

2 algoritmas:

a) imame briauną $e = xy \in E$ su didžiausia kaina,

$$f(e) = \max_{xy \in E} f(xy)$$

ir ją atimame iš grafo G;

b) tą patį kartojame su grafu $G - e$;

c) procesą baigiame, kai kitas briaunos atėmimas padidintų grafo jungumo klasių skaičių.

Gautasis grafas, kaip minimalus jungus grafas, pagal 2.2 teoremos b) punktą bus karkasinis medis.

3 algoritmas:

a) imame bet kokią viršūnę $x_1 \in V$;

b) imame vieną iš pigiausių incidenčių x_1 briauną $x_1x_2 \in E$, $x_2 \in V \setminus \{x_1\}$;

c) radę $x_1, \ldots, x_k$ ir briaunas $x_ix_j)$, $i < j \leq k$ ieškome $x = x_{k+1} \in V \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$, tokios, kad kaina $f(x_{k+1}x_i)$ su kažkokiu $i \leq k$ būtų minimali.

Procesas baigiasi, kai $k = n$, o briaunų skaičius lygus $n - 1$. Taip gavome karkasinį medį.

1 teorema. *Viršuje aprašytieji algoritmai duoda ekonomiškus medžius. Jei kainos funkcija yra injektyvi, tai ekonomiškasis medis yra vienintelis.*

Įrodymas. Tarkime, jog T - ekonomiškas medis, turintis maksimalų skaičių bendrų briaunų su T_1, medžiu, gautu naudojant 1 algoritmą. Jei $E(T) \neq E(T_1)$, imkime pirmą briauną xy iš T_1, bet nepatekusią į T. Medyje T irgi yra $x - y$ takas, sakykim P, kurio bent viena briauna, tegu uv, nepatenka į T_1. Renkant xy, ši briauna uv buvo viena iš kandidačių, todėl $f(xy) \leq f(uv)$. Sudarykime naują karkasinį medį

$$T' = T - uv + xy.$$

Jo kaina

$$F(T') = F(T) - f(uv) + f(xy) \leq F(T),$$

todėl ir naujasis medis yra ekonomiškas. Bet jis turi dar daugiau bendrų briaunų su T_1, nei T. Prieštara įrodo, kad $T = T_1$.

2 bei 3 algoritmais gautų medžių ekonomiškumas įrodomas panašiais samprotavimais.

Nagrinėkime vienatį, kai visos briaunų kainos skirtingos. Taikome matematinę indukciją grafo eilės atžvilgiu. Kai $n = 2, 3$, teiginys trivialus. Padarę prielaidą, jog teorema teisinga visiems $n \geq 4$ eilės grafams, nagrinėdami $(n+1)$ eilės pilnąjį grafą, skelkime viršūnių aibę į dvi dalis $V = V_1 \cap V_2$, su $n_1, n_2 \geq 2$ viršūnių, $n_1 + n_2 = n + 1$ ir nagrinėkime indukuotosius pografius. Juose egzistuoja vieninteliai ekonomiški karkasiniai medžiai T_1, T_2. Raskime

$$\min_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} f(xy).$$

Tarkime, ši minimali kaina įgyjama briaunoje xy, jungiančioje abu pografius. Įsitikinkime, kad medis

$$T_4 := T_1 \cup T_2 + xy$$

yra ekonomiškas.

Tarkime, T - ekonomiškas medis. Jei $T_4 \neq T$, tai vienintelė briauna iš T_4, nepatekusi į T, gali būti tik xy. Medyje T turi būti kita briauna uv, jungianti T_1 su T_2. Bet tada $f(xy) < f(uv)$ ir medžio

$$T - uv + xy$$

kaina būtų griežtai mažesnė, nei T. Prieštara įrodo ekonomiško medžio vienatį.

Pastaba. Vienaties įrodymas duoda dar vieną karkasinio medžio konstravimo būdą: kai briaunų kainos skirtingos, galima grafą skaidyti į mažesnius ir juose ieškoti karkasinių medžių, o vėliau juos sujungti.

4. Grafo parametrų ryšiai

Pradėkime nuo paprastų teiginių.

1 (Euler'io) lema. *Grafo viršūnių laipsnių suma yra lyginis skaičius.*

Įrodymas. Pakanka pastebėti, jog kiekviena briauna, turėdama du galus, įneša 2 vienetus į sumą

$$\sum_{x \in V} \delta(G) = 2|E| \qquad (1)$$

$\diamond$

1 išvada. *Nelyginio laipsnio viršūnių kiekis grafe yra lyginis skaičius.*

2 išvada. *Tarkime*

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} \delta(x) - -$$

vidutinis grafo laipsnis, o $\varepsilon = |E|/|V|$ *– vidutinis briaunų skaičius, tenkantis vienai viršūnei. Tada* $\varepsilon(G) = d(G)/2$.

Įrodymas. (1) suma lygi $|V|d(G)$. $\diamond$

Susitarus, kad kilpos atveju viršūnės laipsnis laikomas lygiu 2, lema išlieka teisinga ir bendresniems grafams.

2 lema. *Tarkime, kad* $G' = (V', E')$ *ir* $G'' = (V'', E')$, $V' \cap V'' = \emptyset$, *- du pilnieji grafai su*

$$|V'| = n_1, \quad |V''| = n_2, \quad n_1 + n_2 = n.$$

Grafo $G' \cup G''$ *didumas didžiausias, kai* $n_1 = n - 1$, *o* $n_2 = 1$.

Įrodymas. Dabar grafe $G' \cup G''$ turime

$$\frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}$$

briaunų. Apskaičiuokime, kaip keičiasi bendras briaunų skaičius, jei viena viršūne didesnį grafą padidintume, o kitą, mažesnįjį, - sumažintume. Tegu $n_1 \geq n_2$. Gautasis briaunų skaičius būtų lygus

$$\frac{n_1(n_1 + 1)}{2} + \frac{(n_2 - 1)(n_2 - 2)}{2},$$

o skirtumas -

$$n_1 + 1 - n_2 \geq 1.$$

Taigi, kartojant panašią procedūrą pasieksime maksimalų bendrą briaunų skaičių, kai $n_1 = n - 1$, $n_2 = 1$. Lema įrodyta.

1 teorema. *Jei* n *- grafo eilė,* m *- didumas, o* k *- jo komponenčių kiekis, tai*

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1). \tag{1.1}$$

Įrodymas. Pirmąją nelygybę įrodysime, taikydami matematinę indukciją $m \geq 0$ atžvilgiu. Kai $m = 0$, turime nulinį grafą su n jungumo klasių. Tad, nelygybė triviali.

Tegu $m_1 < m_2 < \cdots$ - n eilės grafų G, turinčių k jungumo klasių, didumai su savybe: išmetus dar vieną briauną iš G, padidėtų jo jungių komponenčių skaičius. Kai $m_{j-1} \leq m < m_j$, kairioji iš (1.1) nelygybių išplauks iš nelygybės, kai $m = m_{j-1}$. Todėl pakanka nelygybę įrodyti tik šiai sekai.

Tarkime, jog nelygybė įrodyta grafui su m_{j-1} briauna, ir nagrinėkime atvejį $|E| = m_j$. Kadangi dabar kiekviena briauna yra tiltas, išmetus kažkurią iš jų gauname grafą, kuriam galioja indukcijos prielaida. Tegu tai - grafas

$$G' = (V', E'), \quad |V'| = n, \quad |E'| = m_j - 1.$$

Jis turi $k+1$ klasę, todėl

$$n-(k+1) \le m_j - 1.$$

Iš čia išplaukia pirmoji iš (1.1) nelygybių.

Vertindami m iš viršaus, nagrinėkime patį "blogiausią" atvejį, kai kiekviena iš jungumo klasių yra pilnieji pografiai. Pritaikę lemą kiekvienai šių klasių porai, gauname, kad bendras briaunų kiekis m bus maksimalus, kai viena iš jų yra labai didelė, o likusios - tušti grafai. Todėl tada n-os eilės grafe su k jungumo klasių, pografių eilės yra

$$n-k+1, \quad ,1,\ldots,1.$$

Taigi, maksimalus briaunų skaičius lygus

$$\frac{(n-k+1)(n-k)}{2}.$$

1 teorema įrodyta.

Išvada. *Jei n eilės grafas turi daugiau nei $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ briaunų, tai jis yra jungusis.*

2 teorema. *n-os eilės jungusis grafas yra medis tada ir tik tada, kada jo didumas lygus $n-1$.*

Įrodymas. Pagal kairiąją (1.1) nelygybę jungiajame n eilės grafe yra ne mažiau, negu $n-1$ briauna. Jeigu jų būtų daugiau, grafas turėtų turėti ciklą. Taigi, teoremos sąlyga yra būtina.

Jos pakankamumas akivaizdus.

1 išvada. *n-os eilės grafo jungiančiojo medžio didumas lygus $n-1$.*

2 išvada. *n-os eilės miško iš k medžių didumas lygus $n-k$.*

5. Grafo planarumas

Vaizduojant grafus plokštumoje ir brėžiant briaunas apsiribojama *Žordano kreivėmis*, t.y. tolydžiomis plokščiomis kreivėmis, kurios neliečia savęs pačios, išskyrus galinius taškus. Grafus, kuriuos galima pavaizduoti plokštumoje, taip, kad skirtingos briaunos neliestų viena kitos ne viršūnių taškuose, vadiname *planariaisiais.* Formaliai kalbant, tai grafai, turintys izomorfišką vaizdą plokštumoje su ką tik minėtu apribojiomu briaunoms. Patį plokštumoje išvestą grafą vadiname *plokščiuoju grafu.*

Plokštumos sritys, apribotos plokščio grafo briaunomis ir viršūnėmis, vadinamos grafo *veidais.* Visi plokštieji grafai turi vieną begalinį veidą. Plokščiasis grafas (dažniausiai priduriama "be tiltų") kartu su savo veidais vadinamas *žemėlapiu.* Tada veidus geriau vadinti *valstybėmis.*

1 teorema (L.Euler, 1752). *Jei G - jungus žemėlapis, n - jo eilė, m - didumas ir f - valstybių skaičius, tai*

$$n-m+f=2.$$

Įrodymas. Indukcija f atžvilgiu. Jei $f=1$, tai grafas neturi ciklų. Vadinasi, jis yra medis. Todėl mūsų teiginys išplaukia iš 3.2 teoremos išvados.

Tariame, kad teorema įrodyta dėl žemėlapių su mažesniu už $f > 1$ skaičiumi valstybių. Pastebėkime, jog grafas turi ciklų. Imkime bet kurią ciklo briauną ir atimkime iš grafo. Dvi valstybės, kurios buvo atskirtos ciklo, susijungia į vieną. Todėl naujasis žemėlapis turės viena valstybe mažiau. Jam pritaikome indukcinę prielaidą. $\diamond$

At egzistuoja neplanarieji grafai? Teigiamas atsakymas išplauks iš plokščiųjų grafų parametrų įverčių. Dabar reikia paminėti mažiausio ilgio ciklus grafe. Susitarkime, mažiausią ciklo ilgį laikyti begaliniu, jei ciklo iš viso nėra.

2 teorema. *Planarusis $n \geq 3$ eilės jungus grafas turi*

$$m \leq 3n - 6 \tag{1}$$

briaunų. Jei toks grafas turi mažiausio ilgio $3 \leq g < \infty$ ciklą, tai

$$m \leq \frac{g(n-2)}{g-2}. \tag{2}$$

Įrodymas. Pradėkime nuo antrojo teiginio. Aišku, jog $n \geq g$. Kadangi kieviena briauna yra ne daugiau dviejų valstybių siena (tilto atveju ji bus vidine vienos valstybės siena), tai $gf \leq 2m$. Įstatome į Eulerio daugiakampio formulę ir gauname (2).

Parametro g atžvilgiu (2) nelygybės pusė yra mažėjanti funkcija. Tai įstatę mažiausią galimą ciklo ilgį $g = 3$, gauname pirmąjį tvirtinimą. Jei jokio ciklo nėra, grafas yra medis. Tada $m = n - 1$ ir (1) vėl yra įrodyta. $\diamond$

Išvada. *Pilnasis grafas K^5 ir dvidalis grafas $K_{3,3}$ yra neplanarieji.*

Įrodymas. Pirmuoju atveju $g = 3$, bet $m = 10$. Vadinasi, K^5 planarumas prieštarautų (2) nelygybei. Dvidalio grafo atveju $g \geq 4$. Ir vėl pakaktų pasinaudoti (2) įverčiu. $\diamond$

Užduotis. Įsitikinkite, jog jungaus plokščio grafo minimalusis laipsnis neviršija 5.

6. Grafo viršūnių spalvinimo problema

Išreiškime grafų teorijos terminais tokį uždavinį. Reikia sudaryti laisvai pasirenkamų paskaitų tvarkaraštį, kuris užimtų mažiausiai laiko, bet kad kiekvienas studentas galėtų išklausyti kiekvieną jį dominančią paskaitą. Paskaitų, skaitymas lygiagrečiose auditorijose ir dėstytojų kiekis yra neribojamas.

Tegu paskaitos žymi grafo viršūnes. Dvi viršūnes junkime briauna, jei atsiras bent du studentai, norintys išklausyti abi šias paskaitas. Aišku, kad tokios paskaitos turi būti skaitomos skirtingu laiku. Vaizdumo dėlei šias viršūnes nuspalvokime skirtingomis spalvomis. Tuo būdu grafo viršūnių aibė išsiskaido į $V_1, ..., V_k$ poaibius viršūnių, turinčių vienodą spalvą. Vieno poaibio paskaitos gali būti skaitomos vienu laiku skirtingose auditorijose, tačiau skirtingų poaibių paskaitos - tik kitu laiku. Skaičius k parodys bendrą visų paskaitų trukmę. Viršuje suformuluota užduotis reikalauja minimizuoti šį skaičių k.

Bendra grafo viršūnių spalvinimo problema formuluojama panašiai. Kiek reikia skirtingų spalvų nudažyti G grafo viršūnėms, kad gretimosios viršūnės būtų skirtingų spalvų? Minimalus spalvų kiekis $\chi(G)$ vadinamas **chromačiuoju grafo skaičiumi**. Jei $\chi(G) \leq k$, tai grafas G vadinamas *k spalviu.* Formalizuojant spalvinimą galėtume išreikšti atvaizdžių terminais. Reiktų spalvas sužymėti skaičiais $1, ..., k$ ir ieškoti atvaizdžio $c : V \to \{1, ..., k\}$ tokio, kad viršūnių aibės $c^{-1}(i)$ poaibis būtų nepriklausomas, t.y., bet kokių dviejų jo viršūnių nejungtų briauna. Chromatusis skaičius $\chi(G)$ priklauso nuo grafo struktūros. Bet kokios eilės tuščiajam grafui jis lygus vienam, n eilės pilnajam grafui jis lygus n, o n eilės T medžiui ar dvidaliam G grafui - $\chi(T)\chi(G) = 2$.

1 teorema. *Jei $\Delta(G)$ - maksimalusis grafo laipsnis, tai $\chi(G) \leq \Delta + 1$.*

Įrodymas. Taikome matematinę indukciją grafo eilės n atžvilgiu. Mažiems n teiginys patikrinams betarpiškai. Tarkime, kad teorema įrodyta visiems $n - 1$ eilės grafams, ir jų viršūnių spalvinimui panaudota ne daugiau $\Delta(G) + 1$ spalvų. Iš n eilės grafo atimkime vieną viršūnę v ir pasinaudokime indukcijos prielaida. Nudažę grafą $G - v$, grįžtame prie G. Viršūnės, gretimos v, yra nudažytos ne daugiau kaip $\Delta(G) + 1$ spalvų. Jų yra ne daugiau kaip $\Delta(G)$. Vadinasi, viena spalva yra nepanaudota. Ja nudažę v, baigiame teoremos įrodymą. $\diamond$

Planariųjų grafų chromatusis skaičius gali būti įvertintas tiksliau. Pradžioje pastebėkime tokią jų savybę.

Lema. *Kiekvienas planarus grafas turi ne didesnio kaip penktojo laipsnio viršūnę.*

Įrodymas. Galime nagrinėti tik jungius planarius $n \geq 3$ eilės grafus. Jei $\delta(v) \geq 6$ kiekvienai viršūnei $v \in V$, tai iš lygybės

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m,$$

čia m - grafo didumas, išplaukia $6n \leq 2m$. Tai prieštarauja 5.2 teoremos išvadai, teigiančiai, kad planariajam jungiam grafui $m \leq 3n - 6$, kai $n \geq 3$. $\diamond$

2 teorema. *Kiekvienas planarusis grafas yra penkiaspalvis.*

Įrodymas. Kaip ir 1 teoremos įrodyme remsimės indukcijos principu. Kai $n \leq 5$, teiginys trivialus. Tarkime, kad jį jau įrodėm kievienam planariajam grafui, kurio eilė mažesnė už n. Pagal lemą galime išskirti viršūnę v su $\delta(v) \leq 5$. Jei $\delta(v) < 5$, Grafui $G - v$ pritaikome indukcijos prielaidą ir nudažome jo viršūnes, panaudodami 5 spalvas. Viršūnei v gretimos viršūnės nuspalvinamos mažiau nei 5 spalvomis. Sutaupytąja spalva nudažome v ir taip baigiame užduotį.

Tegu $\delta(v) = 5$. Nagrinėkime v gretimąsias viršūnes v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Bent dvi iš jų yra negretimos tarpusavyje. Priešingu atveju šios virūnės, v ir jas jungiančios briaunos sudarytų pilnąjį K^6 grafo G pografį. Pagal 5.2 teoremos išvadą planariajame grafe to būti negali.

Tegu v_1 ir v_2 negretimos viršūnės. Nagrinėkime sutrauktąjį grafą $G' = G \setminus \{vv_1, v_2\}$. Pagal indukcijos prilaidą jam nuspalvinti pakako į spalvų. Taip ir nudažykime G'. Dabar išplėtę G' iki G, matome, kad gretimosios v viršūnės sutaupo vieną spalvą, kuria galime nuspalvinti pačią v. $\diamond$

Panaudokime viršūnių spalvinimo savybes žemėlapio (jungaus plokščio grafo be tiltų) valstybių spalvinimui. Žemėlapyje atidėkime valstybių sostines. Valstybių, turinčių bendrą sieną, sostines sujunkime briaunomis, kertančiomis šią sieną vieną kartą. Priskirdami gautojo grafo, vadinamo it dualiuoju žemėlapiui viršūnių spalvas visai valstybei, gautume žemėlapio nuspalvinimą. 1852 metais buvo suformuluota problema, kiek reikia spalvų nuspalvinti žemėlapio valstybėms taip, kad gretimos valstybės būtų skirtingų spalvų. Iš 2 teoremos išplaukia

Išvada. *Kiekvienas žemėlapis yra penkiaspalvis.*

1976 m. K.Appel'is ir K.Haken'as, naudodami kompiuterius, įrodė tokią teoremą.

3 teorema. *Kiekvienas žemėlapis yra keturspalvis.*

Sugalvokite pavyzdį grafo arba žemėlapio, kurio neįmanoma nuspalvinti trimis spalvomis.

7. Medžių skaičius

Prisimename, kad grafai $G = (V, E)$ ir $G' = (V', E')$ vadinami izomorfiškais, jei egzistuoja bijekcija $\phi : V \to V'$ tokia, kad $xy \in E$ tada ir tik tada, kada $\phi(x)\phi(y) \in E'$. Multigrafų atveju dar pridedamas reikalavimas, kad ši atitiktis galiotų visoms kartotinėms briaunoms. Grafą su sunumeruota viršūnių aibe vadinsime **numeruotoju** grafu. Tokių grafų atveju izomorfizmas turi išlaikyti ir numeraciją, t.y., jei x yra i-toji G grafo viršūnė, tai izomorfiškame G' grafe $\phi(x)$ turi būti irgi i-tąja viršūne. 1889 metais Cayley apskaičiavo neizomorfiškų numeruotų n tos eilės medžių kiekį $T(n)$? Įsitinkite, kad yra

$$\frac{4!}{2} + 4 = 16$$

skirtingų 4-os eilės medžių.

1 (Cayley'io) teorema. *Iš viso galime sudaryti n^{n-2} neizomorfiškų numeruotų n eilės medžių.*

1 -sis įrodymas (Prüfer'io). Tarkime $\mathcal{G}$ - nagrinėjamų medžių aibė. Kadangi sekų aibės

$$\{(a_1, \dots, a_{n-2}) : \ 1 \le a_i \le n, \, 1 \le i \le n-2\} =: \mathcal{A}$$

galia yra n^{n-2}, pakaks rasti bijektyvų atvaizdį $\mathcal{A} \to \mathcal{G}$.

Kai $n \le 2$, teiginys akivaizdus.

Tegu toliau $n > 2$. Medžiui $G = (V, E)$, kurios viršūnių aibė sunumeruota, $V = \{x_1, \dots, x_n\}$, vienareikšmiškai priskirsime seką $\alpha = (a_1, \dots, a_{n-2}) \in \mathcal{A}$, vadinamą medžio **Prüfer'io kodu**. Pradėkime nuo medžio galinės viršūnės, kurios laipsnis lygus 1. Tokios viršūnės egzistuoja, nes kiekviena briauna turi dvi viršūnes ir todėl

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(x_i) = 2(n-1).$$

Iš kelių tokių viršūnių išrinkime tą, kurios indeksas yra mažiausias. Tegu tai viršūnė x_{b_1}, o a_1 - indeksas viršūnės, gretimos pirmajai. Grafas $G - x_{b_1}$ yra $n-1$ eilės medis, todėl procesą galima kartoti, kol viršūnių, likusių grafe, skaičius yra didesnis už 2. Kai šis skaičius lygus 2, mes jau esame sudarę vienintelę seką $(a_1, \ldots, a_{n-2})$.

Atvirkščiai, ar bet kokiai sekai $\alpha = (a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \mathcal{A}$ galima vienareikšmiškai priskirti medį? Atidėkime n viršūnių ir brėžkime norimą medį, vadovaudamiesi žemiau nurodytomis taisyklėmis:

a) jei b_1 - mažiausias iš bent dviejų natūraliųjų skaičių (iš $1, ..., n$), nepasirodžiusių sekoje α, tada junkime x_{b_1} su x_{a_1};

b) aibę $\{1, \ldots, n\}$ pakeiskime $\{1, \ldots, n\} \setminus \{b_1\}$, o α - seka $(a_2, \ldots, a_{n-2})$;

c) procesą kartojame, kol išsemiame visą seką (tuo pačiu nubrėžiame $n-2$ grafo briaunas);

d) tarpusavyje sujungiame dvi likusias viršūnes.

Taip vienareikšmiškai gautasis grafas yra medis, nes jis jungia visas n viršūnių, o jo didumas yra $n-1$.

Kadangi abu nagrinėti atvaizdžiai yra vienas kito atžvilgiu yra atvirkštiniai, teorema įrodyta.

Grafų teorijai artimesnis kitas Cayley'io teoremos įrodymo būdas.

Antrasis teoremos įrodymas. Tarkime $T(n,k)$ - kiekis n tos eilės medžių, kuriuose fiksuota viršūnė $x \in V$ yra k-ojo laipsnio, $2 \le k \le n-1$. Viršūnės numeris nesvarbus, jo neminėsime. Išvesime sąryšį tarp $T(n,k)$ ir $T(n,k-1)$.

Imame medį G, kuriame $d(x) = k-1$. Jame išmeskime briauną uv, neincidenčią su x. Grafas skilo į du pomedžius, viename iš jų yra viršūnės x ir u arba x ir v. Tarkime, yra pirmasis atvejis. Sujungę dabar x su v, gauname vėl medį G', kuriame $d(x) = k$. Porą (G, G') pavadinkime **junginiu** ir suskaičiuokime jų kiekį dviem būdais. Kadangi grafui G mes galime sudaryti tiek G', kiek yra briaunų su aukščiau minėtomis savybėmis, tai vienam G mes turime $n-1-(k-1) = n-k$ partnerių. Taigi, iš viso yra $(n-k)T(n,k-1)$ junginių.

Skaičiuokime tą patį skaičių kitu būdu, pradėdami nuo G', kuriame $d(x) = k,\ k \ge 2$. Tarkime $x_1, \ldots, x_k$ - gretimos x viršūnės. Paeiliui išmesdami briaunas $xx_i,\ i = 1, \ldots k$, mes "atskeltume" pomedžius $T_1, \ldots, T_k$, kurių eilės tegu bus $n_1, \ldots, n_k$,

$$n_1 + \cdots + n_k = n-1. \tag{1}$$

Grafo G' partnerį junginyje dabar konstruojame tokiu būdu:

a) išmetame xx_1, o vėliau viršūnę x_1 sujungiame su bet kokia iš viršūnių, nepriklausančių T_1 (turime $n-1-n_1$ galimybių);

b) tą patį kartojame su $T_2, \ldots, T_k$.

Atsižvelgę į grafų G' kiekį $T(n,k)$ ir (1) iš viso gauname junginių

$$\sum_{i=1}^{n} T(n,k)(n-1-n_i) = (n-1)(k-1)T(n,k).$$

Sulyginę abi junginių skaičiaus formules, gauname

$$(n-1)(k-1)T(n,k) = (n-k)T(n,k-1).$$

Kai $k = 1$, ši rekurenčioji formulė irgi teisinga. Jos nagrinėjimui galime panaudoti akivaizdų faktą, kad $T(n, n-1) = 1$ (**žvaigždinio** grafo atvejis). Gauname

$$T(n,k) = \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}.$$

Sudėdami šias lygybes, išvedame medžių kiekio $T(n)$ formulę

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n,k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1} = ((n-1)+1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

1 teorema įrodyta.

Numeruotą medį su viena išskirta viršūne, *šaknimi*, vadinsime *šakniniu* medžiu.

Išvada. *Yra n^{n-1} šakninių n eilės medžių.*

Įrodymas. Kiekvieno medžio, kurių kiekį nusako Cayley'io teorema, šaknimi gali būti bet kuri viršūnė.

Sprendžiant n duomenų sutvarkymo pagal kokio nors požymio (rakto) didėjimą uždavinį, naudojami **binarieji medžiai**. Jais vadiname medžius, kurie turi vieną 2-ojo laipsnio viršūnę, vadinamą **šaknimi**, o kitų viršūnių laipsniai yra 3 (jos vadinamos **vidinėmis** viršūnėmis) arba 1 (šios viršūnės vadinamos **lapais**). Takas nuo šaknies iki lapo atitiktų kažkokio pradinio duomenų kėlinio surūšiavimą (požymio didėjimo tvarkos atpažinimą). Todėl algoritmą aprašantis binarusis medis turi turėti $n!$ lapų. Susitarkime dar, kad briaunos išvedimas iš vidinės viršūnės į kairę ar į dešinę duoda skirtingus binariuosius medžius. Todėl grafus, pavaizduotus (...) brėžinyje, laikysime skirtingais. Išvesime binariųjų medžių, turinčių N lapų, kiekio C_N, formulę.

2 teorema. *Teisingas rekurentusis sąryšis*

$$C_N = \sum_{k=1}^{N-1} C_k C_{N-k}, \qquad C_1 = 1. \tag{2}$$

Be to,

$$C_N = \frac{1}{N}\binom{2N-2}{N-1}. \tag{3}$$

Įrodymas. Susitarkime, jog atveju $N = 1$, lapas sutampa su šaknimi, ir medį sudaro tik viena viršūnė. Kai $N > 1$, nagrinėkime grafą $G - v$, kai v - binariojo medžio G šaknis. Jis sudarytas iš dviejų binarių medžių - kairiojo, tarkime turinčio k lapų, ir dešiniojo, turinčio eilę $N - k$ lapų. Čia $1 \leq k \leq N-1$ gali būti bet kuris. Kairėje pusėje gali būti bet koks iš C_k binariųjų medžių, o dešinėje – bet koks iš C_{N-k} medžių. Sudėję pagal k šių kiekių sandaugas, gauname visą galimą binariųjų medžių C_N kiekį. (2) formulė įrodyta.

Prisiminkime, jog seka, apibrėžta (2) formule, jau buvo nagrinėta kombinatorikoje (žr .. skyrelį). Tai yra Katalano skaičių seka, todėl (3) formulės išvedimo nebekartosime.

Teorema įrodyta.

Vidutinis tako nuo šaknies iki lapo ilgis išreiškia algoritmo, pavaizduoto binariu medžiu, efektyvumą.

8. Grafų teorijos ir algebros sąryšiai

Visą informaciją apie grafus galime užrašyti matricomis. Tuo tikslu reikia skaičiais $\{1, 2, ..., n\}$ sunumeruoti grafo viršūnes. Pažymėkime a_{ij} kiekį briaunų, jungiančių i-ąją ir j-ąją viršūnes multigrafe G, kai $i \neq j$, ir a_{ii} - dvigubą kilpų, išvestų iš i viršūnės, skaičių. Kvadratinė matrica $A = ((a_{ij}))$, $1 \leq i, j \leq n$, vadiname multigrafo **gretimumo matrica**. Jei multigrafas neturi kilpų, tai matricos pagrindinėje įstrižainėje yra nuliai. Gretimumo matrica yra simetrinė.

Norėdami užfiksuoti, kurios briaunos jungia kurias viršūnes, įvedame dar vieną matricą. Dabar skaičiais $\{1, 2, ..., m\}$ sunumeruojame ir briaunas. Multigrafų atveju, žinoma, numeruojamos visos briaunos bei kilpos.

Matricą $B_G = B = (b_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, vadiname **multigrafo (grafo) incidentumo matrica**, jei

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i \text{ viršūnė yra incidenti } j \text{ briaunai, kuri nėra kilpa,} \\ 2, & \text{jei } i \text{ viršūnė yra incidenti } j \text{ briaunai, kuri yra kilpa,} \\ 0, & \text{jei } i \text{ viršūnė nėra incidenti } j \text{ briaunai.} \end{cases}$$

Apibrėžiant **digrafo** gretimumo bei incidentumo matricas, atsižvelgiama į briaunos kryptį. Gretimumo matricos elementai a_{ij} lygūs skaičiui briaunų, išvestų iš i-tos į j-1 viršūnę. Kilpos atveju skaičius nebedvigubinamas. Digrafo gretimumo matrica nebūtinai simetrinė.

Bekilpiam digrafui incidentumo matricos elementai

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i \text{ yra pradinė } j \text{ briaunos viršūnė,} \\ -1, & \text{jei } i \text{ yra galinė } j \text{ briaunos viršūnė,} \\ 0, & \ i \text{ viršūnė nėra incidenti } j \text{ briaunai.} \end{cases}$$

Jei i viršūnė yra incidenti kilpai, pažymėtai j numeriu, tai dažnai vartojamas žymuo $b_{ij} = -0$.

Pateiksime vieną įvestųjų matricų sąryšį.

1 teorema. *Tarkime G - numeruotas multidigrafas be kilpų, A ir B – jo gretimumo ir incidentumo matricos atitinkamai. Tada*

$$BB' = D - A.$$

Čia $'$ žymi matricos transponavimą, o D – diagonali matrica, kurios įstrižainėje yra iš eilės surašyti viršūnių laipsniai.

Įrodymas. Jei c_{ij} – matricos BB' bendrasis narys, tai

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{m} b_{il} b_{jl}. \tag{1}$$

Todėl, kai $i \neq j$, sandauga $b_{il}b_{jl}$ lygi 0 arba -1. Pastaroji lygybė yra teisinga tik tuo atveju, kai $x_i x_j = e_l$. Sudedant pagal l, -1 dauginsis iš tokio skaičiaus, kiek yra briaunų, jungiančių x_i ir x_j.

Kai $i = j$, c_{ii} yra matricos įstrižainės narys. Matrica A turi nulinę įstrižainę. (1) suma lygi briaunų, išvestų iš x_i skaičiui.

Teorema įrodyta.

Tarkime $G = (V, E)$ - n eilės ir m didumo grafas. Nagrinėkime funkcijų erdvę

$$\mathcal{F}_0(G) := \{f : V \to \mathbf{R}\}$$

funkcijų sudėties kiekviename taške bei daugybos iš skaliaro atžvilgiu. Funkciją f nusako jos reikšmės viršūnėse $f(x_j) =: c_j,\ 1 \leq j \leq n$. Todėl $\mathcal{F}_0(G)$ izomorfiška $\mathbf{R}^n$, o jos dimensija lygi n. Jos **standartinė** bazė bus funkcijų rinkinys $f_1, \ldots, f_n$, kai funkcija f_j apibrėžiama lygybėmis

$$f_j(x_i) = \delta_{ij}.$$

Čia δ_{ij} - Kronekerio simbolis. Dabar lygybė

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x) -$$

funkcijos f išraiška standartine baze. Įvedus skaliarinę daugybą

$$< f', f'' > := \sum_{j=1}^{n} c'_j c''_j$$

erdvė tampa Euklido erdve, šios daugybos atžvilgiu standartinė bazė yra ortonormuota.

Panašiai įvedama ir m - matė erdvė funkcijų, apibrėžtų grafo briaunų aibėje:

$$\mathcal{F}_1(G) := \{g : E \to \mathbf{R}\}.$$

Ji yra izomorfiška erdvei $\mathbf{R}^m$.

Įdomesnis ir svarbesnis digrafų atvejis. Tegu toliau briaunos sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki m ir joms priskirtos kryptys. Turėdami ciklą L, sudarytą iš briaunų $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$, kur e_{i_1} vienas galas sutampa su e_{i_k} galu, ir fiksuodami ciklo kryptį (pavyzdžiui, prieš laikrodžio rodyklę plokščiajame digrafe), ciklui galime priskirti **ciklo** vektorių $\bar{z}_L = (z_1, \ldots, z_m)$, iš 1,-1 arba 0:

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } e_j \text{ priklauso ciklui ir eina ciklo kryptimi;} \\ -1, & \text{jeigu } e_j \text{ priklauso ciklui, bet jo kryptis priešinga;} \\ 0, & \text{jeigu } e_j \text{ nepriklauso ciklui.} \end{cases}$$

Naudojamas ir kitas vaizdus vektoriaus $\bar{z}_L$ užrašas

$$\bar{z}_L = \sum_{j=1}^{m} z_j e_j,$$

neteikiant šioje sumoje jokios geometrinės prasmės, įprastos vektoriams, briaunoms e_j, nors jos turi ir kryptis.

Kai L perbėgs visus grafo ciklus, gausime aibę funkcijų $\{g_L\}$, jų tiesinis apvalkas $Z(G)$ erdvėje $\mathcal{F}_1(G)$ vadinamas **ciklų poerdviu**. Jo dimensija $dimZ(G)$ vadinama grafo G **ciklomačiuoju skaičiumi**.

Sudarykime dar vieną erdvės $\mathcal{F}_1(G)$ poerdvį. Imkime viršūnių aibės skaidinį P:

$$V = V_1 \cup V_2,\ V_1 \cup V_2 = \emptyset.$$

Nagrinėkime tik tas briaunas, kurios eina iš V_1 į V_2 arba atvirkščiai. Ši briaunų aibė vadinama **pjūvio aibe**. Sudarykime vektorių $\bar{u}_P = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbf{R}^m$

$$u_j = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } e_j \text{ eina iš } V_1 \text{ į } V_2; \\ -1, & \text{jeigu } e_j \text{ eina iš } V_2 \text{ į } V_1; \\ 0, & \text{jeigu } e_j \text{ nejungia } V_1 \text{ su } V_2. \end{cases}$$

dažnai užrašomą suma

$$\bar{u}_P = \sum_{j=1}^{m} u_j e_j$$

arba funkcija

$$g_P(e) = \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(e), \quad e \in E,$$

čia - $g_j,\ 1 \le j \le m$, standartinė funkcijų bazė. Imant visus įmanomus skaidinius P , gaunama funkcijų g_P sistema, jos tiesinis apvalkas $U(G)$ erdvėje $C_1(G)$ vadinamas **pjūvių poerdviu** (kociklų poerdviu).

2 teorema. *Briaunų funkcijų erdvė - tiesioginė tarpysavyje ortogonalių poerdvių $Z(G)$ ir $U(G)$ suma. Jei grafas G turi n viršūnių, m briaunų ir k jungumo klasių, tai*

$$dimZ(G) = m - n + k, \qquad dimU(G) = n - k.$$

Įrodymas. Tikriname teoremoje nurodytų poerdvių ortogonalumą. Imame bet kokį ciklą L ir bet kokį skaidinį P bei funkcijų koordinačių vektorius $\bar{z}_L$ ir $\bar{u}_P$ ir skaičiuojame

$< \bar{z}_L, \bar{u}_P >$. Nenuliniai šios skaliarinės sandaugos dėmenys atitiks tik L ciklo briaunoms, priklausančioms ir P pjūviui. Jų skaičius yra lyginis. Susitarkime laikyti, kad briauna $-e_j$, eina ciklo kryptimi, jei e_j kryptis buvo priešinga ciklo krypčiai. Tada nagrinėjama skaliarinė sandauga lygi kiekiui L ciklo briaunų, einančių iš V_1 į V_2 minus kiekiui ciklo briaunų, einančių iš V_2 į V_1. Vadinasi, ji yra lygi nuliui. Tuo pačiu poerdvių ortogonalumas įrodytas.

Teoremoje nurodytos dimensijų formulės išplauks iš nelygybių

$$dimZ(G) \geq m - n + k, \qquad dimU(G) \geq n - k. \tag{1}$$

Tarkime pradžioje, kad G - jungus grafas, $k = 1$. Imkime karkasinį medį T. Tarkime, kad medyje panaudotos $e_1, \ldots, e_{n-1}$ briaunos, o likusios $e_n, \ldots, e_m$ buvo nepanaudotos. Prijungimas bet kurios iš šių briaunų sukuria 1 ciklą. Jį vadinsime **fundamentaliuoju** ciklu. Tegu L_j, $n \leq j \leq m$, vienas iš šių fundamentalių ciklų, o $\bar{z}_j$ - jo vektorius. Atkreipkime dėmesį į paskutines $m - (n-1)$ koordinačių. Kai $j = n$, pirmoji iš šių koordinačių lygi 1 ar -1, o kitos lygios nuliui. Panašiai, kai $j = m$, visos minėtos koordinatės , išskyrus paskutinę, lygios nuliui, o paskutinioji lygi 1 arba -1. Iš čia išplaukia vektorių sistemos $\bar{z}_j$, $n \leq j \leq m$ nepriklausomumas. Pirmoji iš (1) nelygybių įrodyta.

Nagrinėdami pjūvius irgi panaudokime karkasinį medį. Pastebėkime, kad bet kokios T briaunos e_j, $1 \leq j \leq n-1$, išmetimas duotų pjūvį P_j, $(V = V_j' \cup V_j''$, $V_j' \cap V_j'' = \emptyset)$, o pati briauna e_j jungtų vieną viršūnių aibę su kita. Tarkime, kad e_j pradžios viršūnė yra aibėje V_j'. Dabar šio pjūvio vektorius

$$\bar{u}_j = (u_{1j}, \ldots, u_{ij}, \ldots, u_{n-1,j})$$

turės $u_{jj} = 1$, o $u_{ij} = 0$, kai $i \neq j$, nes nejungia V_j' su V_j''. Akivaizdu, jog tiesiškai nepriklausomų tokių vektorių sudarytume ne mažiau, negu $n - 1$. Taigi jungaus grafo atveju (1) lygybės įrodytos.

Kai G grafas turi jungumo klases $G_1 \ldots, G_k$, funkcijų erdvė $\mathcal{F}_1(G)$ yra tiesioginė suma ortogonalių tarpusavyje funkcijų erdvių $\mathcal{F}_1(G_j), 1 \leq j \leq k$, kurios pagal įrodytą dalį išsiskaido dviejų ortogonalių poerdvių sumomis. Be to, $Z(G) \cap \mathcal{F}_1(G_j) = Z(G_j)$ bei $U(G) \cap \mathcal{F}_1(G_j) = U(G_j)$,

$$\dim U(G) = \dim U(G_1) + \cdots + \dim U(G_k) = (n_1 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = n - k.$$

Čia $|V_i| = n_i$ ir $n_1 + \cdots + n_k = n$.

2 teorema įrodyta.

Pritaikykime įgytas žinias elektros grandinių uždaviniuose. Elektros grandinės, kaip žinoma, tenkina Kirchhofo srovės dėsnį kiekvienoje viršūnėje. Jis teigia, kad srovės, įėjusios į viršūnę, didumas lygus išėjusios iš jos srovės didumui. Šį dėsnį galime užrašyti naudojant incidentumo matricą B. Tarkime $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_m)'$ – srovės vektorius stulpelis, sudarytas iš srovių, tekančių visomis briaunomis, tai matricų lygybė

$$B\mathbf{w} = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)'$$

apima srovės dėsnius visose viršūnėse iš karto. Ieškant srovių didumų, tektų spręsti šią homogeninę lygčių sistemą. Todėl imtume tik tiesiškai nepriklausomos incidentumo matricos eilutes.

Panašiai elgiamasi ir potencialų atveju. Jei $\bar{z}_L$ - L ciklo vektorius, o $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ - potencialų skirtumų vektorius, tai Kirchhoff'o potencialų dėsnis teigia, jog potencialų skirtumų uždaroje grandinėje (viename cikle) suma lygi nuliui, t.y.

$$< \bar{z}_L, \bar{p} >= 0.$$

Kadangi grandinėje gali būti daug tarpusavyje priklausomų ciklų, nebūtina juos visus naudoti. Iš tiesų, vektoriai $\bar{z}_L$ priklauso ciklų poerdviui $Z(G)$, kurio dimensija lygi $m-n+1$ (grandinė yra jungi, $k = 1$), todėl pakanka naudoti tik fundamentaliuosius ciklų vektorius. Suradę karkasinį medį T, išvestą sakykim, per briaunas $e_1, ..., e_{n-1}$ imkime paeiliui likusias briaunas $e_n, ..., e_m$. Tarkime gautųjų ciklų vektoriai $\bar{z}_j,\ n \leq j \leq m$ surašyti eilutėmis, sudaro matricą C, $(m - n + 1) \times m$, tada visa informacija apie potencialus užrašoma matricine lygybe.

Kirchhoff'o potencialų dėsnis. *Jei C fundamentaliųjų ciklo vektorių sudaryta matrica, o $\bar{p}$ - potencialų skirtumų vektorius stulpelis, tai*

$$C\bar{p} = 0.$$

Grafų teorijoje nagrinėjami ir bendresni srautai.