VII SKYRIUS. LIEKAMOJO NARIO ĮVERTINIMAS

1. ESENO NELYGYBĖ

Ribinės teoremos praverčia taikymams, kai atsitiktinių dydžių sumų pasiskirstymo dėsniai aproksimuojami ribiniais skirstiniais. Tačiau reikia žinoti paklaidą, kuri tada padaroma. Tam reikia mokėti įvertinti konvergavimo į ribinį dėsnį greitį. Taikomi du metodai: pasiskirstymo funkcijų kompozicijų (sąsūkų) ir charakteristinių funkcijų. Susipažinsime su antruoju.

Iš charakteristinių funkcijų tolydumo išplaukia, kad pasiskirstymo funkcijos mažai skiriasi viena nuo kitos, jei mažai skiriasi jų charakteristinės funkcijos. Mums bus reikalingos kiekybinės šio teiginio išraiškos. Tam pravers G. Eseno (Carl-Gustav Esseen — švedų matematikas) nelygybė, įrodyta 1944 metais. Pateiksime 1965 metų jos patobulintą variantą.

1 lema. *Realiesiems t*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \begin{cases} 0, & |t| > 1, \\ \pi(1-|t|), & |t| \le 1. \end{cases}$$

Į r o d y m a s . Tiriamąjį integralą pažymėkime I. Kadangi pointegralinės funkcijos antras dauginamasis yra lyginė funkcija, tai

$$I = \int_0^{\infty} \left(e^{itx} + e^{-itx}\right)\frac{1-\cos x}{x^2}dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\cos tx dx.$$

Tačiau

$$(1-\cos x)\cos tx = \cos tx - \cos x\cdot\cos tx =$$
$$= \cos tx - \frac{\cos(t-1)x + \cos(t+1)x}{2}.$$

Todėl iš VI.2.2 lemos

$$I = -2\int_0^\infty \frac{1-\cos tx}{x^2}dx + \int_0^\infty \frac{1-\cos(t-1)x}{x^2}dx +$$

$$+\int_0^\infty \frac{1-\cos(t+1)x}{x^2}dx = -\pi|t| + \frac{\pi}{2}|t-1| + \frac{\pi}{2}|t+1|. \quad \square$$

2 lema. Visiems realiesiems x

$$|\sin x| \le |x|.$$

Į r o d y m a s . Visiems realiesiems x

$$\left|e^{ix} - 1\right| \le |x|.$$

Menamosios dalies koeficientas absoliučiuoju didumu neviršija viso kompleksinio skaičiaus modulio. Todėl teisinga įrodomoji nelygybė.

Pateiksime dar vieną paprastą tos nelygybės įrodymą. Turime

$$|\sin x| = \left|\int_0^x \cos y dy\right| \le \int_0^{|x|} dy = |x|. \quad \square$$

Mums prireiks baigtinės variacijos funkcijos sąvokos. Ją galima įvairiai apibrėžti. Vienas iš apibrėžimų yra labai paprastas — tai realiosios funkcijos, kurios yra dviejų nemažėjančių funkcijų skirtumai.

1 (Petrovo) teorema. *Tarkime, kad F yra nemažėjanti aprėžta, o G – baigtinės variacijos funkcija, abi apibrėžtos tiesėje $\mathbb{R}$ ir tenkinančios sąlygą $F(-\infty) = G(-\infty)$. Pažymėkime jų Furjė transformacijas*

$$f(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} dF(x), \quad g(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} dG(x).$$

Tada bet kuriam $T > 0$ ir kiekvienam $b > 1/(2\pi)$

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \le b\varepsilon(T) + bT \sup_x \int_{|y|\le c(b)/T} |G(x+y) - G(x)| dy;$$

čia:

$$\varepsilon(T)=\int_{-T}^{T}\Big|\frac{f(t)-g(t)}{t}\Big|dt,$$

$c(b)$ yra teigiama, priklausanti tik nuo b, konstanta, kurią galima laikyti lygties

$$\int_0^{c(b)/4}\frac{\sin^2 u}{u^2}du=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8b}$$

šaknimi.

Į r o d y m a s . Pagal VI.2.2 lemą kiekvienai realiajai konstantai a

$$p(x):=\frac{T}{\pi}\frac{1-\cos(Tx-a)}{(Tx-a)^2}$$

yra tankio funkcija (kai $Tx-a=0$, funkcija nusakoma iš tolydumo). Apskaičiuosime jos charakteristinę funkciją. Pagal 1 lemą

$$h(t):=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}p(x)dx=e^{iat/T}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ity/T}\frac{1-\cos y}{y^2}dy=$$

$$=\begin{cases}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)e^{iat/T}, & \text{kai } |t|\le T,\\ 0, & \text{kai } |t|>T.\end{cases}$$

Iš 2 lemos

$$p(x)=\frac{T}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{Tx-a}{2}}{\frac{Tx-a}{2}}\right)^2\le\frac{T}{2\pi}. \tag{1}$$

Teigiamiems a pažymėkime

$$\gamma=\gamma(a):=\int_0^{2a/T}p(x)dx=\frac{T}{\pi}\int_0^{2a/T}\frac{1-\cos(Tx-a)}{(Tx-a)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{1-\cos 2y}{2y^2}dy=\frac{2}{\pi}\int_0^{a/2}\frac{\sin^2 y}{y^2}dy.$$

Pastebėsime, kad $\gamma(a) \nearrow 1$, kai $a \to \infty$, nes

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^{2a/T} p(x)dx = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1-\cos 2y}{2y^2} dy = 1.$$

Kadangi F yra nemažėjanti, tai pagal (1)

(2)
$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \big(F(x) - G(x)\big) \cdot \frac{1}{\gamma} \int_x^{x+2a/T} p(u-x)du \leq \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \int_x^{x+2aT} \big(F(u) - G(x)\big) p(u-x)du = \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_x^{x+2a/T} \big(F(u) - G(u)\big) p(u-x)du + \\ &+ \frac{1}{\gamma} \int_x^{x+2a/T} \big(G(u) - G(x)\big) p(u-x)du \leq \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \int_x^{x+2a/T} \big(F(u) - G(u)\big) p(u-x)du + \\ &+ \frac{T}{2\pi\gamma} \int_0^{2a/T} |G(x+y) - G(x)| dy. \end{aligned}$$

Analogiškai

(3)
$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &\geq \frac{1}{\gamma} \int_{x-2a/T}^{x} \big(F(u) - G(x)\big) p(x-u)du \geq \\ &\geq \frac{1}{\gamma} \int_{x-2a/T}^{x} \big(F(u) - G(u)\big) p(x-u)du - \\ &- \frac{T}{2\pi\gamma} \int_{-2a/T}^{0} |G(x+y) - G(x)| dy. \end{aligned}$$

Įvertinsime (2) ir (3) dešiniųjų pusių pirmuosius narius. Pažymėkime

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-z)p(z)dz, \quad F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+z)p(z)dz$$

ir analogiškai

$$G_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-z)p(z)dz, \quad G_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x+z)p(z)dz.$$

Turime

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)p(x-u)du, \quad F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)p(u-x)du$$

ir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_k(x) = f(t)h_k(t) \quad (k = 1, 2);$$

čia $h_1(t) = h(t), h_2(t) = h(-t)$. Visiškai analogiškai

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG_k(x) = g(t)h_k(t) \quad (k = 1, 2).$$

Kadangi $h(t) = 0$, kai $|t| > T$, pagal apvertimo formulę

$$F_k(x) - F_k(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{-it} f(t)h_k(t)dt$$

ir

$$G_k(x) - G_k(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{-it} g(t)h_k(t)dt$$

bet kuriems x ir y (funkcijos F_k ir G_k yra tolydžios). Pirmoji formulė yra įrodoma tikimybių teorijos kurse. Tačiau tokia formulė yra teisinga ne tik pasiskirstymo funkcijoms, bet ir jų tiesinėms kombinacijoms. Nemažėjanti aprėžta funkcija skiriasi nuo pasiskirstymo funkcijos tik pastoviu dauginamuoju bei adicine konstanta, o baigtinės variacijos funkcijos yra dviejų aprėžtų nemažėjančių funkcijų skirtumas.

Galime laikyti $\varepsilon(T) < \infty$, nes priešingu atveju įrodomoji teorema būtų triviali. Pagal Rymano–Lebego teoremą

$$\lim_{y \to -\infty} \int_{-T}^{T} \frac{f(t) - g(t)}{-it} h_k(t) e^{-ity} dt = 0.$$

Iš lygybės $F(-\infty) = G(-\infty)$ išplaukia, kad $F_k(-\infty) = G_k(-\infty)$ $(k = 1, 2)$. Kai $y \to -\infty$, gauname

$$F_k(x) - G_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{f(t) - g(t)}{-it} h_k(t) e^{-itx} dt \ (k = 1, 2).$$

Kadangi $|h(t)| \le 1$ visiems t, tai

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \big(F(u) - G(u)\big) p(x-u) du \right| \le \frac{\varepsilon(T)}{2\pi}$$

ir

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \big(F(u) - G(u)\big) p(u-x) du \right| \le \frac{\varepsilon(T)}{2\pi}$$

visiems x.

Pažymėkime

$$\Delta = \sup_x |F(x) - G(x)|.$$

Tada

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{x}^{x+2a/T} \big(F(u) - G(u)\big) p(u-x) du \right| \le \\
&\le \left| \int_{-\infty}^{\infty} \big(F(u) - G(u)\big) p(u-x) du \right| + \\
&+ \Delta \int_{-\infty}^{x} p(u-x) du + \Delta \int_{x+2a/T}^{\infty} p(u-x) du \le \\
&\le \frac{\varepsilon(T)}{2\pi} + \Delta \left(1 - \int_{0}^{2a/T} p(u) du \right) = \\
&= \frac{\varepsilon(T)}{2\pi} + \Delta(1-\gamma)
\end{aligned}$$

ir analogiškai

$$\left| \int_{x-2a/T}^{x} \big(F(u) - G(u)\big) p(x-u) du \right| \le \frac{\varepsilon(T)}{2\pi} + \Delta(1-\gamma).$$

Iš (2) ir (3) išplaukia

$$F(x) - G(x) \leq \frac{\varepsilon(T)}{2\pi\gamma} + \Delta\Big(\frac{1}{\gamma} - 1\Big) + \frac{T}{2\pi\gamma}\int_0^{2a/T} |G(x+y) - G(x)|dy$$

ir

$$F(x)-G(x) \geq -\frac{\varepsilon(T)}{2\pi\gamma} - \Delta\Big(\frac{1}{\gamma} - 1\Big) - \frac{T}{2\pi\gamma}\int_{-2a/T}^{0} |G(x+y) - G(x)|dy.$$

Iš pastarųjų dviejų nelygybių gauname

$$\Delta \leq \frac{\varepsilon(T)}{2\pi\gamma} + \Delta\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) + \frac{T}{2\pi\gamma}\Psi\left(\frac{2a}{T}\right);$$

čia

$$\Psi(v) = \sup_x \int_{|y|\leq v} |G(x+y) - G(x)|dy.$$

Kadangi $\gamma(a) \nearrow 1$, kai $a \to \infty$, tai galime rasti tokį pakankamai didelį a, kad būtų $\gamma > \frac{1}{2}$. Spręsdami gautąją nelygybę, randame

$$\Delta \leq \frac{\varepsilon(T)}{2\pi(2\gamma - 1)} + \frac{T}{2\pi(2\gamma-1)}\Psi\Big(\frac{2a}{T}\Big).$$

Tarkime, kad $b > \frac{1}{2\pi}$. Apibrėžkime skaičių γ iš lygybės

$$2\pi(2\gamma - 1) = \frac{1}{b}.$$

Aišku, $\frac{1}{2} < \gamma < 1$. Tada mūsų įrodytoje nelygybėje a galime laikyti lygties

$$2\gamma(a) - 1 = \frac{1}{2\pi b},$$

tai yra

$$\int_0^{a/2} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8b},$$

sprendiniu. $\square$

1 išvada. *Tarkime, kad funkcija G tenkina Lipšico sąlygą*

$$|G(x) - G(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

visiems x ir y, o K ir α yra teigiamos konstantos, be to, $\alpha \leq 1$. Tada

$$\Delta \leq b\varepsilon(T) + 2bK\big(c(b)\big)^{1+\alpha}\frac{1}{(1+\alpha)T^\alpha}.$$

Į r o d y m a s . Šiuo atveju

$$\Psi(v) \leq K\int_{|y|\leq v}|y|^\alpha dy = 2K\frac{v^{1+\alpha}}{1+\alpha}. \quad \square$$

2 išvada. *Tarkime, G yra diferencijuojama funkcija ir*

$$\sup_x |G'(x)| \leq C;$$

čia C yra konstanta. Tada

$$\Delta \leq b\varepsilon(T) + bc^2(b)\frac{C}{T}.$$

Į r o d y m a s išplaukia iš 1 išvados. $\square$

Galima įrodyti dar ir tokią teoremą.

2 teorema. *Tarkime, kad F yra nemažėjanti,o G — baigtinės variacijos funkcijos, apibrėžtos visoje skaičių tiesėje ir turinčios savybes:*

1^o. $F(-\infty) = G(-\infty)$, $F(\infty) = G(\infty)$;

2^o. *F yra grynai trūki funkcija; F ir G gali turėti trūkius tik taškuose x_k $(k = 0, \pm 1, \dots;\ x_{k+1} > x_k)$; egzistuoja konstanta $L > 0$ su sąlyga $\inf(x_{k+1} - x_k) \geq L$;*

3^o. *visur, išskyrus taškus x_k, funkcija G turi išvestinę ir $|G'(x)| \leq A$; A – konstanta;*

4°. $\int_{-\infty}^{\infty} \big|F(x) - G(x)\big| dx < \infty$.

Pažymėkime f ir g funkcijų F ir G Furjė transformacijas. Tada kiekvienam $c > \frac{1}{2\pi}$ galima rasti dvi konstantas c_1 ir c_2, priklausančias tik nuo c, kad

$$\Delta \le c\varepsilon(T) + \frac{c_1 A}{T},$$

jei tik $TL \ge c_2$. Δ ir $\varepsilon(T)$ reikšmės tos pačios kaip ir 1 teoremoje.

2. KONVERGAVIMO Į NORMALŲJĮ DĖSNĮ GREITIS

Jei sumuojami nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai turi trečiuosius momentus ir tenkina Liapunovo sąlygą, tai jų tinkamai normuotos sumos turi asimptotinį normalųjį pasiskirstymą. Galime rasti konvergavimo greičio įvertį. Pradžioje įrodysime keletą pagalbinių teiginių.

1 lema. *Visiems kompleksiniams z*

$$\big|e^z - 1\big| \le |z| e^{|z|}.$$

Į r o d y m a s . Iš laipsninės eilutės

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

gauname

$$\big|e^z - 1\big| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \le |z| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = |z| e^{|z|}. \quad \square$$

2 lema. *Jei atsitiktinis dydis X turi r-ąjį momentą ir $r \ge 1$, tai*

$$|MX|^r \le M|X|^r.$$

Į r o d y m a s . Imkime funkciją $h(x) = x^r$, kai $x \geq 0$. Jos išvestinė $h'(x) = rx^{r-1}$ yra nemažėjanti funkcija. Pagal baigtinių pokyčių teoremą

$$h(x) - h(x_0) = (x - x_0)h'(\xi);$$

čia ξ telpa tarp x_0 ir x. Teisinga nelygybė

$$h(x) - h(x_0) \geq (x - x_0)h'(x_0).$$

Iš tikrųjų, kai $x \geq x_0$, tai imame mažiausią $h'(x)$ reikšmę $h'(x_0)$, o kai $x < x_0$, tai didžiausią $h'(x_0)$. Vadinasi,

$$x^r - x_0^r \geq rx_0^{r-1}(x - x_0),$$

kai x_0 ir x yra neneigiami. Iš čia išplaukia

$$|X(\omega)|^r \geq M^r|X| + rM^{r-1}|X|\big(|X(\omega)| - M|X|\big).$$

Todėl

$$\begin{aligned} &M|X|^r = \int_\Omega |X(\omega)|^r P(d\omega) \geq \\ &\geq M^r|X| + rM^{r-1}|X| \int_\Omega \big(|X(\omega)| - M|X|\big)P(d\omega) = M^r|X|. \quad \square \end{aligned}$$

1 išvada. $M|X| \leq \big(M|X|^r\big)^{1/r}, \ r \geq 1.$

Į r o d y m a s . Taikome 2 lemą dydžiui $|X|$. $\square$

2 išvada. *Jei* $1 \leq m \leq k$, *tai*

$$\big(M|X|^m\big)^{1/m} \leq \big(M|X|^k\big)^{1/k}.$$

Į r o d y m a s . 1 išvadoje vietoje X imame $|X|^m$ ir $r = k/m$. $\square$

3 išvada. *Jei egzistuoja minimi momentai, tai*

$$M|X| \leq \left(M|X|^2\right)^{1/2} \leq \left(M|X|^3\right)^{1/3}.$$

Toliau tirsime nepriklausomus atsitiktinius dydžius $X_1, X_2, \ldots$ Tarkime, kad jie turi trečiuosius momentus. Nesiaurindami bendrumo, jų vidurkius laikysime $MX_k = 0$. Pažymėkime

$$\sigma_k^2 = DX_k = MX_k^2, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

Tegul $B_n > 0$. Tada

$$\beta_k = M|X_k|^3, \quad L_n = \frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^{n} \beta_k.$$

Iš 2 lemos 2 išvados išplaukia

$$\sigma_k \leq \beta_k^{1/3}.$$

Pažymėkime f_k — dydžio X_k charakteristinę funkciją, o Φ_n ir φ_n — normuotos sumos

$$Z_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - MX_k\right) = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

pasiskirstymo bei charakteristines funkcijas. Iš centrinės ribinės teoremos turime: jei $L_n \to 0$, kai $n \to \infty$, tai $\Phi_n(x) \to \Phi(x)$. Įvertinsime konvergavimo greitį.

3 lema. *Kai*

$$|t| \leq \frac{1}{2L_n^{1/3}},$$

teisingas įvertis

$$\left|\varphi_n(t) - e^{-t^2/2}\right| \leq L_n |t|^3 e^{-t^2/2}.$$

Į r o d y m a s . Nulinio taško aplinkoje teisinga lygybė

$$f_k(t) = 1 - \frac{1}{2}\sigma_k^2 + \frac{\theta}{6}\beta_k|t|^3, \quad |\theta| \le 1.$$

Iš čia

$$f_k\Big(\frac{t}{B_n}\Big) = 1 - \frac{\sigma_k^2 t^2}{2B_n^2} + \frac{\theta\beta_k|t|^3}{6B_n^3} = 1 + r_k(t).$$

Iš lemos sąlygų

$$\text{(1)} \qquad \frac{\sigma_k|t|}{B_n} \le \frac{\beta_k^{1/3}|t|}{B_n} \le L_n^{1/3}|t| \le \frac{1}{2}.$$

Kadangi

$$|r_k(t)| \le \frac{\beta_k^{2/3}t^2}{2B_n^2} + \frac{\beta_k|t|^3}{6B_n^3} = \frac{1}{2}\bigg(\frac{\beta_k^{1/3}|t|}{B_n}\bigg)^2\bigg(1 + \frac{\beta_k^{1/3}|t|}{3B_n}\bigg),$$

tai pagal (1)

$$\text{(2)} \quad |r_k(t)| \le \frac{1}{2}\bigg(\frac{\beta_k^{1/3}|t|}{B_n}\bigg)^{3/2}\Big(\frac{1}{2}^{1/2}\Big)\Big(1 + \frac{1}{6}\Big) = \frac{7}{12\sqrt{2}}\bigg(\frac{\beta_k^{1/3}|t|}{B_n}\bigg)^{3/2}$$

ir

$$\text{(3)} \qquad |r_k(t)| \le \frac{7}{12\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{3/2} = \frac{7}{48}.$$

Pagal I.3.2 lemą ir (3)

$$\ln f_k\Big(\frac{t}{B_n}\Big) = r_k(t) + \theta|r_k|^2.$$

Todėl pagal (2)

$$\ln f_k\Big(\frac{t}{B_n}\Big) = -\frac{\sigma_k^2}{2B_n^2} + \frac{\theta\beta_k|t|^3}{6B_n^3} + \theta\frac{49\beta_k|t|^3}{288B_n^3} =$$

$$= -\frac{\sigma_k^2 t^2}{2B_n^2} + \frac{2\theta\beta_k|t|^3}{5B_n^3}.$$

Iš čia
$$\ln\varphi_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\ln f_k\Big(\frac{t}{B_n}\Big)=-\frac{t^2}{2}+\theta\frac{2}{5}L_n|t|^3.$$
Pagaliau pagal 1 lemą
$$\Big|\varphi_n(t)-e^{-t^2/2}\Big|=e^{-t^2/2}\Big|e^{2/5\theta L_n|t|^3}-1\Big|\le$$
$$\le e^{-t^2/2}\frac{2}{5}L_n|t|^3e^{2/5L_n|t|^3}\le$$
$$\le e^{-t^2/2}L_n|t|^3\cdot\frac{2}{5}e^{2/5(1/2)^3}\le$$
$$\le L_n|t|^3e^{-t^2/2}.\quad\square$$

4 lema. *Kai*
$$|t|\le\frac{1}{4L_n},$$
tai
$$\Big|\varphi_n(t)-e^{-t^2/2}\Big|\le 2e^{-t^2/3}.$$

Į r o d y m a s . Atsitiktinio dydžio $Z_k=X_k-Y_k$, kai X_k ir Y_k yra nepriklausomi ir turi tą pačią pasiskirstymo funkciją, charakteristinė funkcija yra $|f_k(t)|^2$, o dispersija $2\sigma_k^2$. Be to,
$$M|Z_k|^3=M|X_k-Y_k|^3\le$$
$$\le M|X_k|^3+3MX_k^2\cdot M|Y_k|+3M|X_k|\cdot MY_k^2+M|Y_k|^3\le$$
$$\le\beta_k+3\beta_k^{2/3}\cdot\beta_k^{1/3}+3\beta_k^{1/3}\cdot\beta_k^{2/3}+\beta_k=8\beta_k.$$
Todėl
$$|f_k(t)|^2=1-\sigma_k^2t^2+\frac{\theta}{6}8\beta_k|t|^3\le$$
$$\le 1-\sigma_k^2t^2+\frac{4}{3}\beta_k|t|^3\le$$
$$\le\exp\Big\{-\sigma_k^2t^2+\frac{4}{3}\beta_k|t|^3\Big\}.$$

Kadangi

$$|t| \le \frac{1}{4L_n},$$

tai

$$\Big|\varphi_n(t)\Big|^2 = \prod_{k=1}^{n} \left|f_k\Big(\frac{t}{B_n}\Big)\right|^2 \le \exp\Big\{-t^2 + \frac{4}{3}L_n|t|^3\Big\} \le$$

$$\le \exp\Big\{-t^2 + \frac{4}{3}t^2 \cdot \frac{1}{4}\Big\} = \exp\Big\{-\frac{2t^2}{3}\Big\}.$$

Vadinasi,

$$\left|\varphi_n(t) - e^{-t^2/2}\right| \le e^{-t^2/3} + e^{-t^2/2} \le 2e^{-t^2/3}. \quad \square$$

1 teorema. *Jei nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X_k turi trečiuosius momentus ir $MX_k = 0$, tai*

$$\sup_x \big|\Phi_n(x) - \Phi(x)\big| \le CL_n;$$

čia C yra absoliuti konstanta.

Į r o d y m a s . Pastebėję, kad

$$\big|\Phi'(x)\big| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

taikysime Eseno nelygybę (Petrovo teoremos 2 išvadą) su

$$b = \frac{1}{\pi}, \quad T = \frac{1}{4L_n}.$$

Gausime

$$\Delta_n := \sup_x \big|\Phi_n(x) - \Phi(x)\big| \le \frac{1}{\pi}\int_{|t|\le(4L_n)^{-1}} \left|\frac{\varphi_n(t) - e^{-t^2/2}}{t}\right| dt + c_1 L_n.$$

Laikysime $L_n < 2^{-3/2}$, nes priešingu atveju teorema yra triviali. Tada

$$\frac{1}{L_n^{1/3}} < \frac{1}{4L_n}$$

ir

$$\Delta_n = \frac{1}{\pi}\big(I_1 + I_2\big) + c_1 L_n;$$

čia

$$I_1 = \int_{|t|\le (2L_n^{1/3})^{-1}} \Big|\varphi_n(t) - e^{-t^2/2}\Big| \frac{dt}{t},$$

$$I_2 = \int_{(2L_n^{1/3})^{-1} < |t| \le (4L_n)^{-1}} \Big|\varphi_n(t) - e^{-t^2/2}\Big| \frac{dt}{t}.$$

Pirmąjį integralą įvertinsime remdamiesi 3 lema

$$I_1 \le L_n \int_{|t|\le (2L_n^{1/3})^{-1}} t^2 e^{-t^2/2} dt \le$$

$$\le L_n \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt \le c_2 L_n,$$

o antrąjį – 4 lema

$$I_2 \le 2 \int_{|t|\ge (2L_n^{1/3})^{-1}} e^{-t^2/3} \frac{dt}{|t|} \le$$

$$\le 2 \int_{|t|\ge (2L_n^{1/3})^{-1}} \left(\frac{|t|}{\frac{1}{2}L_n^{-1/3}}\right)^3 e^{-t^2/3} \frac{dt}{|t|} \le$$

$$\le 16 L_n \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/3} dt \le c_3 L_n. \quad \square$$

Suformuluosime šios teoremos atskirą atvejį, kai sumuojamieji atsitiktiniai dydžiai yra vienodai pasiskirstę.

2 teorema. *Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai* $X_1, X_2, \ldots$ *yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę ir turi trečiuosius momentus. Pažymėkime* $MX_k = a$, $DX_k = \sigma^2$, $\beta = M|X_k - a|^3$. *Tarkime,* $\sigma > 0$. *Tada*

$$\sup_x \bigl|\Phi_n(x) - \Phi(x)\bigr| \le \frac{C_1\beta}{\sigma^3\sqrt{n}};$$

čia C_1 *– absoliuti konstanta.*

Nesunku įsitikinti, kad 1 ir 2 teoremose negalima pagerinti liekamojo nario eilės. Imkime seką nepriklausomų atsitiktinių dydžių $X_1, X_2, \ldots$, kurių kiekvienas įgyja dvi reikšmes: 1 ir -1 su tikimybėmis $1/2$. Tada $MX_k = 0$, $DX_k = 1$, $M|X_k|^3 = 1$. Kai n yra lyginis, tai tikimybė

$$P\Bigl(\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\Bigr) = \binom{n}{\frac{n}{2}}\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)^n.$$

Pasinaudoję Stirlingo formule, galime gauti, kad ši tikimybė yra

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\bigl(1 + o(1)\bigr).$$

Todėl funkcija $\Phi_n(x)$ taške $x = 0$ turi trūkį, kuris lygus tai tikimybei. Nulinio taško aplinkoje funkcijos $\Phi_n(x)$ negalima aproksimuoti jokia tolydžia funkcija su tikslumu, didesniu už pusę to trūkio.

Iš šio pavyzdžio taip pat gauname, kad konstantos

$$C \ge C_1 \ge \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.39894\ldots$$

Kyla klausimas, kokios yra geriausios C ir C_1 reikšmės. G. Esenas rado jų įvertį iš apačios. Jis nagrinėjo seką nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių, kurių kiekvienas įgyja dvi reikšmes:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sqrt{10} - 2 \quad \text{su tikimybe} \quad \frac{1}{2}\sqrt{10} - 1,\\ &\frac{1}{2}\sqrt{10} - 1 \quad \text{su tikimybe} \quad -\frac{1}{2}\sqrt{10} + 2. \end{aligned}$$

Įrodė, kad

$$C \ge C_1 \ge \frac{3 + \sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} = 0.40973\ldots$$

Taikymams svarbesnis yra įvertis iš viršaus. Gana tikslų įvertį 1972 metais gavo P. van Bekas (Paul van Beek) [1]. Po kiek laiko maskvietis M. Šiganovas jį šiek tiek pagerino, parodęs, kad

$$C \leq 0.7915, \qquad C_1 \leq 0.7655.$$

Galimi įvairūs 1 teoremos apibendrinimai. Tarkime, dydžiai X_k turi $2+\delta$ eilės momentus

$$M|X_k - MX_k|^{2+\delta} < \infty, \quad 0 < \delta \leq 1. \tag{4}$$

Pažymėkime

$$L_n(\delta) = B_n^{-2-\delta} \sum_{k=1}^{n} M|X_k - MX_k|^{2+\delta}.$$

Iš Liapunovo teoremos žinome: jei $L_n(\delta) \to 0$, kai $n \to \infty$, tai $\Phi_n(x) \to \Phi(x)$. Ir šiuo atveju galima įvertinti konvergavimo greitį.

3 teorema. *Jei nepriklausomi atsitiktiniai dysžiai X_k tenkina (4) sąlygą, tai*

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq C_2 L_n(\delta);$$

čia C_2 yra absoliuti konstanta.

Įrodymą žr. [14, 15].

Atskiru atveju, kai dydžiai X_k yra vienodai pasiskirstę, pagal 3 teoremą konvergavimo greičio įvertis $Bn^{-\delta/2}$. Galima nurodyti būtinas ir pakankamas sąlygas, kad būtų teisingas toks įvertis.

4 (Ibragimovo) teorema. *Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, turi dispersijas. Pažymėkime jų pasiskirstymo funkciją F. Įvertis*

$$\Phi_n(x) - \Phi(x) = Bn^{-\delta/2}, \quad 0 < \delta \leq 1,$$

yra teisingas tada ir tik tada, kai

$$\int_{|x|>z} x^2 dF(x) = Bz^{-\delta}.$$

Įrodymą galima rasti [6].

Normuotų sumų pasiskirstymai konverguoja į normalųjį ir tada, kai neegzistuoja aukštesnių už antrąją eilių momentai, tačiau yra tenkinama Lindebergo sąlyga. Ir šiuo atveju galima įvertinti konvergavimo greitį.

5 teorema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_k yra nepriklausomi, $MX_k = 0$, $MX_k^2 < \infty$, F_k yra dydžio X_k pasiskirstymo funkcija,*

$$B_n = \left(\sum_{k=1}^{n} MX_k^2 \right)^{1/2},$$

$$\Lambda_n(\varepsilon) = B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geq \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x),$$

$$l_n(\varepsilon) = B_n^{-3} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| < \varepsilon B_n} |x|^3 dF_k(x).$$

Tada bet kuriam fiksuotam $\varepsilon > 0$

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq C_3 \Big(\Lambda_n(\varepsilon) + l_n(\varepsilon) \Big);$$

čia C_3 yra konstanta.

Įrodymo žr. [14, 15].

3. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIO PATIKSLINIMAS

Kai atsitiktiniai dydžiai X_k yra vienodai pasiskirstę ir turi trečiuosius momentus, 2 skyrelyje gautus įverčius galima patikslinti. Tarkime, kad

$$MX_k = 0,\ DX_k = \sigma^2 > 0,\ MX_k^3 = \alpha_3,\ M|X_k|^3 = \beta.$$

Kiekvieno tų dydžių pasikirstymo funkciją žymėsime F, o charakteristinę funkciją f.

Iš 2.2 teoremos išplaukia

$$\Phi_n(x) - \Phi(x) = \frac{B}{\sqrt{n}}.$$

Iš pradžių tirsime negardeliškus atsitiktinius dydžius.

1 lema. *Kai $|t| \le K\sqrt{n}$, K — pakankamai maža konstanta, teisingas įvertis*

$$\Big|\varphi_n(t) - e^{-t^2/2} - \frac{\alpha_3 (it)^3}{6\sigma^3\sqrt{n}} e^{-t^2/2}\Big| \le K_1 \Big(\frac{|t|^3}{\sqrt{n}} \delta\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) + \frac{t^4}{n}\Big) e^{-t^2/4};$$

čia K_1 — konstanta, $\delta(u) \to 0$, kai $u \to 0$.

Į r o d y m a s . Kadangi egzistuoja trečiasis momentas, tai

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \frac{\theta}{6}\beta|t|^3,\ |\theta| \le 1.$$

Teisingas ir kitas įvertis nulinio taško aplinkoje

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \frac{1}{6}\alpha_3 (it)^3 + |t|^3 \delta_1(t);$$

čia $\delta_1(t) \to 0$, kai $t \to 0$, ir $|\delta_1(t)| \le K_2$, kai $|t| \le K_3$. Toliau turime

$$f\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = 1 + r_n(t),$$

$$r_n(t) = -\frac{t^2}{2n} + \frac{\theta\beta|t|^3}{6\sigma^3 n^{3/2}},$$

$$r_n(t) = -\frac{t^2}{2n} + \frac{\alpha_3 (it)^3}{6\sigma^3 n^{3/2}} + \frac{|t|^3}{\sigma^3 n^{3/2}} \delta_1\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big).$$

Iš pirmosios išraiškos gauname

$$\big|r_n(t)\big| \le \frac{t^2}{2n}\left(1 + \frac{\beta|t|}{3\sigma^3\sqrt{n}}\right) \le \frac{t^2}{2n}\left(1 + \frac{K\beta}{3\sigma^3}\right).$$

Iš čia $|r_n(t)| \le 1/2$, kai K yra pakankamai mažas. Todėl

$$\ln \varphi_n(t) = n \ln f\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = n r_n(t) + \theta n |r_n(t)|^2 =$$

$$= -\frac{t^2}{2} + \frac{\alpha_3 (it)^3}{6\sigma^3\sqrt{n}} + \frac{|t|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}\delta_1\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big) + \theta\frac{t^4}{4n}\left(1 + \frac{K\beta}{3\sigma^3}\right)^2 =$$

$$= -\frac{t^2}{2} + \frac{\alpha_3 (it)^3}{6\sigma^3\sqrt{n}} + t^2 \rho_n(t),$$

$$\rho_n(t) = \frac{|t|}{\sigma^3\sqrt{n}}\delta_1\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big) + \theta\frac{t^2}{4n}\left(1 + \frac{K\beta}{3\sigma^3}\right)^2.$$

Mums pravers funkcijos $\rho_n(t)$ įvertis

$$|\rho_n(t)| \le \frac{K}{\sigma^3}\Big|\delta_1\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\Big| + \frac{K^2}{4}\left(1 + \frac{K\beta}{3\sigma^3}\right)^2 \le \frac{1}{4},$$

kai K yra pakankamai mažas. Todėl

$$\left|\varphi_n(t) - \exp\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{\alpha_3 (it)^3}{6\sigma^3\sqrt{n}}\right)\right| = e^{-t^2/2}\left|e^{t^2\rho_n(t)} - 1\right| \le$$

$$\le t^2 \big|\rho_n(t)\big| e^{-t^2/2 + t^2|\rho_n(t)|} \le t^2 |\rho_n(t)| e^{-t^2/4}.$$

Toliau

$$\left|\exp\left(\frac{\alpha_3 (it)^3}{6\sigma^3\sqrt{n}}\right) - 1 - \frac{\alpha_3 (it)^3}{6\sigma^3\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3 t^3}{6\sigma^3\sqrt{n}}\right)^2 \le \frac{\beta^2 t^6}{72\sigma^6 n}.$$

Pagaliau gauname

$$\left|\varphi_n(t) - e^{-t^2/2} - \frac{\alpha_3(it)^3}{6\sigma^3\sqrt{n}}e^{-t^2/2}\right| \leq$$

$$\leq t^2|\rho_n(t)|e^{-t^2/4} + \frac{\beta t^6}{72\sigma^6 n}e^{-t^2/2} \leq$$

$$\leq \left(\frac{|t|}{\sigma^3\sqrt{n}}\delta_1\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big) + \frac{t^2}{4n}\Big(1 + \frac{K\beta}{3\sigma^3}\Big)^2\right)t^2 e^{-t^2/4} + \frac{\beta^2 t^6}{72\sigma^6 n}e^{-t^2/2} \leq$$

$$\leq K_1\left(\frac{|t|^3}{\sqrt{n}}\delta\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) + \frac{t^4}{n}\right)e^{-t^2/4}. \quad \square$$

2 lema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_k yra negardeliški, tai kiekvienam $\omega > 0$ galime rasti tokią funkciją $\lambda(n)$, $\lambda(n) \to \infty$, kai $n \to \infty$, kad*

$$\int_\omega^{\lambda(n)} \frac{|f^n(t)|}{t}dt = o\Big(e^{-\sqrt{n}/2}\Big).$$

Į r o d y m a s . Kadangi pasiskirstymas yra negardeliškas, tai $|f(t)| < 1$, kai $t \neq 0$. Pažymėkime įvertinamąjį integralą

$$I(y) = \int_\omega^y \frac{|f^n(t)|}{t}dt$$

ir

$$h(y) = \max_{\omega \leq t \leq y} |f(t)|.$$

Pastaroji funkcija yra nemažėjanti. Trivialiu būdu turime

$$I(y) \leq h^n(y) \ln\frac{y}{\omega}.$$

Jei

$$\limsup_{t\to\infty} |f(t)| < 1$$

(Kramero sąlyga), tai galima rasti tokią teigiamą konstantą c, kad $|f(t)| \leq e^{-c}$, kai $t \geq \omega$. Paėmę $\lambda(n) = n$, gauname

$$I(\lambda(n)) \leq e^{-cn} \ln \frac{n}{\omega} = o(e^{-\sqrt{n}/2}).$$

Tarkime dabar, kad

$$\limsup_{t \to \infty} |f(t)| = 1.$$

Jei $h(n) > 1 - 1/\sqrt{n}$, tai $\lambda(n)$ apibrėžkime iš lygties $h(\lambda(n)) = 1 - 1/\sqrt{n}$. Pastaruoju atveju $\lambda(n) < n$. Ir čia gauname

$$I(\lambda(n)) \leq \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n \ln \frac{n}{\omega}.$$

Abiem atvejais

$$I(\lambda(n)) \leq e^{-\sqrt{n}} \ln \frac{n}{\omega} = o\Big(e^{-\sqrt{n}/2}\Big). \quad \square$$

1 teorema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_k yra negardeliški, tai tolygiai x atžvilgiu*

$$\Phi_n(x) = \Phi(x) + \frac{\alpha_3(1 - x^2)}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}} e^{-x^2/2} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

Į r o d y m a s . Pažymėkime

$$G(x) = \Phi(x) + \frac{\alpha_3(1 - x^2)}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}} e^{-x^2/2}.$$

Lengva patikrinti, kad visiems x funkcijos $G(x)$ išvestinė absoliučiuoju didumu yra aprėžta absoliučios konstantos.

Apskaičiuosime funkcijos $G(x)$ Furjė transformaciją

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2/2} \Big(1 + \frac{\alpha_3(-3x + x^3)}{6\sigma^3\sqrt{n}}\Big) dx.$$

Standartinio normaliojo dėsnio charakteristinė funkcija yra

$$e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2/2} dx.$$

Integralas konverguoja tolygiai t atžvilgiu. Diferencijuojame pagal t

$$-te^{-t^2/2} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx - x^2/2} dx.$$

Ir šis integralas konverguoja tolygiai t atžvilgiu. Diferencijuojame lygybę dar kartą. Gauname

$$(t^2 - 1)e^{-t^2/2} = \frac{i^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{itx - x^2/2} dx.$$

Analogiškai

$$(-t^3 + 3t)e^{-t^2/2} = \frac{i^3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{itx - x^2/2} dx.$$

Todėl

$$g(t) = e^{-t^2/2} - \frac{3\alpha_3}{6i\sigma^3\sqrt{n}}\Big(- te^{-t^2/2}\Big) +$$

$$+ \frac{\alpha_3}{6i\sigma^3\sqrt{n}}\big(- t^3 + 3t\big)e^{-t^2/2} =$$

$$= e^{-t^2/2} + \frac{\alpha_3 (it)^3}{6\sigma^3\sqrt{n}} e^{-t^2/2}.$$

Taikysime Eseno nelygybę. Tam parenkame $T_1 = K\sqrt{n}$ (čia K yra iš 1 lemos) ir $T \geq T_1$ ir gauname

$$\Delta := \sup_x |\Phi_n(x) - G(x)| \leq \frac{C}{T} + C_1 \int_{-T}^{T} |\varphi_n(t) - g(t)| \frac{dt}{|t|}.$$

Integralą skaidome į du

$$\Delta \leq \frac{C}{T} + C_1 \bigg(\int_{|t| \leq T_1} + \int_{T_1 < |t| \leq T} |\varphi_n(t) - g(t)| \frac{dt}{|t|} \bigg) =$$

$$= \frac{C}{T} + C_1 (I_1 + I_2).$$

Iš 1 lemos

$$I_1 \le K_1 \int_{|t|\le T_1} \left(\frac{t^2}{\sqrt{n}}\delta\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) + \frac{|t|^3}{n}\right) e^{-t^2/4} dt =$$

$$= \frac{B}{\sqrt{n}}\left(\int_{|t|\le n^{1/4}} t^2\delta\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) e^{-t^2/4} dt + \int_{n^{1/4}}^{\infty} t^2 e^{-t^2/4} dt\right) +$$

$$+ \frac{B}{n}\int_0^{\infty} t^3 e^{-t^2/4} dt =$$

$$= \frac{B}{\sqrt{n}}\left(o(1)\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2/4} dt + \frac{1}{n^{1/4}}\int_0^{\infty} t^3 e^{-t^2/4} dt + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{B}{\sqrt{n}} \cdot o(1).$$

Lieka įvertinti I_2:

$$I_2 \le \int_{T_1<|t|\le T} \Big|\frac{\varphi_n(t)}{t}\Big| dt + \int_{T_1<|t|\le T} \Big|\frac{g(t)}{t}\Big| dt =$$

$$= B\int_{T_1}^{T} \Big|f^n\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\Big|\frac{dt}{t} + B\int_{T_1}^{T} |g(t)|\frac{dt}{t} =$$

$$= B\int_{\frac{T_1}{\sigma\sqrt{n}}}^{\frac{T}{\sigma\sqrt{n}}} \big|f^n(t)\big|\frac{dt}{t} + B\int_{T_1}^{\infty}\left(1+\frac{Bt^3}{\sqrt{n}}\right)\frac{e^{-t^2/2}}{t} dt.$$

Pasinaudosime 2 lema. Paėmę $\omega = K/\sigma$, randame $\lambda(n)$ ir parenkame $T = \sigma\lambda(n)\sqrt{n}$. Jei pasirodytų, kad pastarasis reiškinys yra mažesnis už T_1, tai imtume $T = T_1$. Tada iš karto teorema būtų įrodyta. Todėl to atvejo galime nenagrinėti. Priešingu atveju gauname

$$I_2 = B\int_{K/\sigma}^{\lambda(n)} \big|f^n(t)\big|\frac{dt}{t} + Be^{-T_1^2/4}\int_{T_1}^{\infty} t^2 e^{-t^2/4} dt =$$

$$= o\Big(e^{-\sqrt{n}/2}\Big) + Be^{-T_1^2/4} = \frac{o(1)}{\sqrt{n}}. \quad \square$$

Jei dydžiai yra gardeliški, 1 teorema nėra teisinga. Kaip matėme iš pavyzdžio 2 skyrelyje, tada liekamasis narys negali būti $o(n^{-1/2})$, nes Φ_n turi eilės $1/\sqrt{n}$ trūkius. Todėl 1 teoremos rezultatą reikės modifikuoti. Pažymėkime $\varkappa(x)$ periodinę su periodu 1 funkciją, kuri intervale (0,1] yra lygi $1/2 - x$, t.y

$$\varkappa(x) = -x - [-x] - \frac{1}{2}.$$

Teisinga tokia teorema.

2 teorema. *Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, gardeliški, įgyja reikšmes iš aritmetinės progresijos $a + kh$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ su didžiausiu pasiskirstymo žingsniu h. Jei jie turi baigtinius trečiuosius momentus, tai tolygiai x atžvilgiu*

$$\Phi_n(x) = \Phi(x) + \\ + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{\alpha_3(1-x^2)}{6\sigma^3} + h\varkappa\Big(\frac{\sigma x\sqrt{n} - an}{h}\Big)\right)e^{-x^2/2} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

Pagal iki šiol nagrinėtas teoremas konvergavimo greičio įverčiai yra tolygūs argumento x atžvilgiu. Juos galima patikslinti atsižvelgus į x. Jei atsitiktinis dydis X_1 turi trečiąjį momentą, tai jo pasiskirstymo funkcija, kaip nesunku įrodyti, yra $B|x|^{-3}$, kai $x \to -\infty$, ir $1 - F(x) = Bx^{-3}$, kai $x \to \infty$. Vadinasi, dideliems x galime gauti geresnius konvergavimo įverčius.

3 teorema. *Jei $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turį trečiuosius absoliučius momentus β, ir $DX_1 = \sigma^2 > 0$, tai*

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{A\beta}{\sigma^3\sqrt{n}(1 + |x|^3)};$$

čia A yra absoliuti konstanta.

Jei tiriamieji atsitiktiniai dydžiai turi daugiau momentų, tai galime rasti dar tikslesnių formulių.

4 teorema. *Jei atsitiktiniai dydžiai* $X_1, X_2, \ldots$ *yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, turi* $r \geq 3$ *momentų, jų charakteristinė funkcija* $f(t)$ *turi savybę*

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t)| < 1,$$

tai egzistuoja tokie polinomai $Q_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r-2)$, *kad*

$$\Phi_n(x) = \Phi(x) + \sum_{\nu=1}^{r-2} \frac{Q_\nu(x)}{n^{\nu/2}} e^{-x^2/2} + o\bigg(\frac{1}{n^{r/2-1}(1+|x|)^k}\bigg)$$

tolygiai x *atžvilgiu.*

Esama ir dar bendresnių teoremų, kurias galima gauti ir tuo atveju, kai dydžiai nėra vienodai pasiskirstę. Panašūs įverčiai įrodomi ir lokaliosioms teoremoms. Visų šių teoremų įrodymus galima rasti [6,14,15].