VI SKYRIUS. LOKALIOSIOS TEOREMOS

1. GARDELIŠKŲJŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ LOKALIOSIOS TEOREMOS

Iki šiol nagrinėjome vadinamąsias integralines (dar kitaip globaliąsias) ribines teoremas. Toliau tirsime lokaliąsias teoremas. Apie jas jau buvo kalbama ir pagrindiniame tikimybių teorijos kurse.

Prisiminsime kai kurias sąvokas. Atsitiktinis dydis X yra vadinamas *diskrečiuoju*, jei egzistuoja baigtinė arba skaiti aibė taškų A su sąlyga, kad $P(X \in A) = 1$.

Tas dydis vadinamas *gardeliškuoju*, jei aibė A yra aritmetinė progresija $a+kh$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$; čia a yra bet kuris realusis skaičius, $h > 0$. Skaičius h yra vadinamas *pasiskirstymo žingsniu.* Jei bet kuriems a_1 ir $h_1 > h$

$$P(X \in \{a_1 + kh_1,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}) < 1,$$

tai žingsnis h vadinamas *didžiausiuoju.*

Šias sąvokas galima nusakyti charakteristinių funkcijų terminais.

1 teorema. *Atsitiktinis dydis X su charakteristine funkcija f yra gardeliškas tada ir tik tada, kai kuriam nors $t_0 \neq 0$ turime $|f(t_0)| = 1$. Šiuo atveju $2\pi/|t_0|$ yra pasiskirstymo žingsnis. Pasiskirstymo žingsnis h yra didžiausias tada ir tik tada, kai $|f(t)| < 1$ srityje $0 < |t| < 2\pi/h$, o $|f(2\pi/h)| = 1$.*

P a s t a b a . Plg. I.1.1 teoremos įrodymą ir pastabą prie jo.

Į r o d y m a s . B ū t i n u m a s . Tarkime, kad atsitiktinis dydis su tikimybe 1 įgyja reikšmes iš aritmetinės progresijos $a + kh$ $(k =$

$0 \pm 1, \pm 2, \ldots$). Pažymėkime $P(X = a + kh) = p_k$. Tada atsitiktinio dydžio charakteristinė funkcija

$$f(t) = e^{iat} \sum_k p_k e^{ithk}.$$

Iš čia matome, kad

$$f(2\pi/h) = e^{2\pi ia/h} \sum_k p_k = e^{2\pi ia/h},$$

$$|f(2\pi/h)| = 1.$$

P a k a n k a m u m a s . Lygybė $|f(t_0)| = 1$ reiškia, kad kuriam nors $a \in \mathbb{R}$

$$f(t_0) = e^{it_0 a},$$

tai yra,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_0(x-a)} dF(x) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos t_0(x-a) dF(x) = 1.$$

Čia F yra atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija. Pastaroji lygybė galima tik tada, kai F didėjimo taškai yra pavidalo $a + 2\pi k/t_0$.

Teiginys apie pasiskirstymo žingsnį akivaizdus.

D i d ž i a u s i a s ž i n g s n i s . Tarkime, $0 < |t_0| < 2\pi/h$, bet $|f(t_0)| = 1$. Iš įrodytų teiginių išplaukia, kad $2\pi/|t_0|$ yra pasiskirstymo žingsnis. Tačiau $2\pi/|t_0| > h$, o tai prieštarauja h maksimalumui. $\square$

Nagrinėsime vienodai pasiskirsčiusius nepriklausomus atsitiktinius dydžius $X_1, X_2, \ldots$. Tarkime, kad jie gardeliški ir įgyja reikšmes iš aritmetinės progresijos $a + kh$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Tegul jie turi dispersijas $DX_k = \sigma^2 > 0$. Vidurkius žymėsime $MX_k = A$. Atsitiktinių dydžių suma $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ įgis reikšmes pavidalo $an + kh$. Pažymėkime dar

$$w = w_{nk} = \frac{(a - A)n + hk}{\sigma\sqrt{n}}.$$

1948 m. B. Gnedenka įrodė tokią lokaliąją teoremą.

2 teorema. *Tarkime, kad teisingos anksčiau išvardytos sąlygos. Tada*

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}P(S_n = na + hk) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-w_{nk}^2/2} \to 0,$$

kai $n \to \infty$, *tolygiai* k $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ *atžvilgiu tada ir tik tada, kai* h *yra didžiausias pasiskirstymo žingsnis.*

Į r o d y m a s . P a k a n k a m u m a s. Tarkime, kad h yra didžiausias pasiskirstymo žingsnis. Pažymėkime f dydžių X_k charakteristinę funkciją. Jei $P_n(k) = P(S_n = an + kh)$, tai sumos S_n charakteristinę funkciją galime parašyti pavidalu

$$f^n(t) = e^{iant}\sum_k P_n(k)e^{ihkt}.$$

Iš čia Furjė koeficientas

$$P_n(k) = \frac{h}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} f^n(t)e^{-i(an+kh)t}dt =$$

$$= \frac{h}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{-\pi\sigma\sqrt{n}/h}^{\pi\sigma\sqrt{n}/h} f^n(\Big(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\exp\Big(-\frac{(an+kh)u}{\sigma\sqrt{n}}\Big)du.$$

Jei pažymėtume

$$\varphi^n(t) = f\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\exp\Big(-\frac{iAt}{\sigma\sqrt{n}}\Big),$$

tai normuotos sumos

$$\frac{S_n - nA}{\sigma\sqrt{n}} \tag{1}$$

charakteristinė funkcija būtų lygi $\varphi^n(t)$. Todėl

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}P_n(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi\sigma\sqrt{n}/h}^{\pi\sigma\sqrt{n}/h}\varphi^n(t)e^{-itw}dt. \tag{2}$$

Kadangi (1) normuotoji suma yra asimptotiškai pasiskirsčiusi pagal standartinį normalųjį dėsnį, tai

$$\varphi^n(t) \to e^{-t^2/2} \tag{3}$$

tolygiai, kai $|t| \le T$, T— bet kuris fiksuotas skaičius.

Funkcija $f(t)\exp(-iAt)$ yra atsitiktinio dydžio $X_m - A$ charakteristinė funkcija. Šio dydžio vidurkis yra 0, o dispersija σ^2. Todėl

$$f(t)e^{-iAt} = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + o(t^2).$$

Kadangi visiems realiesiems x teisinga nelygybė $1 + x \le e^x$, tai

$$\left|f(t)e^{-iAt}\right| \le 1 - \frac{1}{4}\sigma^2 t^2 \le e^{-\sigma^2 t^2/4},$$

kai $|t| \le \delta$, $\delta > 0$ – pakankamai mažas fiksuotas skaičius. Iš čia

$$\left|\varphi^n(t)\right| \le e^{-t^2/4}, \tag{4}$$

kai $|t| \le \delta\sigma\sqrt{n}$.

Kadangi h yra didžiausias pasiskirstymo žingsnis, tai pagal 1 teoremą galima rasti tokį $c > 0$, kad $|f(t)| < e^{-c}$, kai $\delta \le |t| \le \pi/h$. Vadinasi,

$$\left|\varphi^n(t)\right| < e^{-cn}, \tag{5}$$

kai $\delta\sigma\sqrt{n} \le |t| \le \pi\sigma\sqrt{n}/h$.

Atsižvelgę į (3), (4), (5) įverčius, (2) integralą suskaidysime į kelis

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}P_n(k) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|t|\le T}\left(\varphi^n(t) - e^{-t^2/2}\right)e^{-itw}dw + \right.$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2-itw}dt - \int_{|t|>T} e^{-t^2/2-itw}dt +$$

$$\left. + \int_{T<|t|\le\delta\sigma\sqrt{n}} \varphi^n(t)e^{-itw}dt + \int_{\delta\sigma\sqrt{n}<|t|\le\pi\sigma\sqrt{n}/h} \varphi^n(t)e^{-itw}dt\right) =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

Pirmas integralas pagal (3) konverguoja nulin, kai $n \to \infty$. Antrasis (pakanka prisiminti, kam lygi normaliojo dėsnio charakteristinė funkcija)

$$I_2 = \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Trečiąjį integralą įvertiname

$$|I_3| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>T} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{\pi T} \int_T^{\infty} t e^{-t^2/2} dt = \frac{e^{-T^2/2}}{\pi T}.$$

Pagal (4)

$$|I_4| \leq \frac{1}{\pi T} \int_T^{\infty} t e^{-t^2/4} dt = \frac{2e^{-T^2/4}}{\pi T}.$$

Pagaliau pagal (5)

$$|I_5| < \frac{e^{-cn}}{\pi} \Big(\frac{\pi}{h} - \delta \Big) \sigma \sqrt{n}.$$

Todėl $\sigma\sqrt{n} h^{-1} P_n(k)$ nuo $(2\pi)^{-1/2} \exp(-w^2/2)$ skiriasi kiek norima mažu dydžiu, jei tik T ir n yra pakankamai dideli.

2. B ū t i n u m a s . Tarkime, kad lokaliosios teoremos teiginys teisingas, o atsitiktinis dydis X_1 įgyja reikšmes iš aritmetinės progresijos $a + kh$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Įrodysime, kad h yra didžiausias pasiskirstymo žingsnis.

Atkreipsime dėmesį, kad pasiskirstymo žingsnis h yra didžiausias tada ir tik tada, kai visoms reikšmėms $a + kh$ ir $a + jh$, kurias atsitiktinis dydis X_1 įgyja su teigiamomis tikimybėnmis, skirtumų $k - j$ didžiausiasis bendrasis daliklis d yra 1. Tarkime, taip nėra, t.y., $d > 1$. Pažymėkime $k - j = r_{kj} d$; čia r_{kj} yra sveikieji skaičiai. Tada

$$(a + kh) - (a + hj) = (k - j)h = r_{kj} dh.$$

Iš čia matome, kad visos X_1 reikšmės, įgyjamos su teigiamomis tikimybėmis, yra aritmetinėje progresijoje

$$a, a \pm dh, a \pm 2dh, \ldots,$$

kurios vardiklis $dh > h$.

Atvirkščiai, jei tas X_1 reikšmes, kurias jis įgyja su teigiamomis tikimybėmis, galėtume parašyti pavidalu $a + r_k h'$, $h' > h$, o r_k būtų sveikieji skaičiai, tai gautume, kad $h' = dh$ su natūraliuoju $d > 1$,

$$(a + r_k h') - (a + r_j)h' = (r_k - r_j)h'$$

ir bendrasis didžiausias daliklis būtų ne mažesnis už $d > 1$.

Todėl, jei h nėra didžiausias pasiskirstymo žingsnis, tai tų X_1 reikšmių $a + kh$, kurias jis įgyja su teigiamomis tikimybėmis, didžiausias bendrasis daliklis $d > 1$. Atstumas tarp dviejų tokių reikšmių, įgyjamų su teigiamomis tikimybėmis,

$$|(an + kh) - (an + jh)| = |k - j|h \geq dh.$$

Tai prieštarauja lokaliajai teoremai, teigiančiai, kad $P_n(k) > 0$ visiems k. $\square$

Esama lokaliųjų teoremų, kai ribinis dėsnis yra stabilusis (žr. [6]).

Kyla klausimas, ar 2 teoremos teiginys teisingas, kai dydžiai X_k nėra vienodai pasikirstę. Esama ir tokių teoremų, tačiau jos nurodo tik pakankamas sąlygas.

2. TANKIŲ LOKALIOJI TEOREMA

Tarkime, kad normuotos atsitiktinių dydžių sumos turi tankį, o jų ribinis pasiskirstymas yra normalusis. Kyla klausimas, ar tų sumų tikimybiniai tankiai konverguoja į normaliojo pasiskirstymo dėsnio tankį. Čia, matyt, reikia papildomų sąlygų. Juk iš F_n konvergavimo į Φ be papildomų sąlygų dar neišplaukia, kad išvestinės F_n', jei jos egzistuoja, konverguoja į Φ'.

Įrodysime vieną iš paprastesnių tokio tipo teoremų. Mums reikės kelių pagalbinių teiginių.

1 lema. *Realiesiems t*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \pi \operatorname{sgn} t.$$

Ši lygybė įrodoma matematinės analizės kursuose.

2 lema. *Visiems realiesiems t*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos tx}{x^2}dx = \pi|t|.$$

Į r o d y m a s. Pakanka įrodyti tą lygybę, kai $t = 1$. Lygybės

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}\Big(\int_0^x \sin u du\Big)dx$$

dešinėje pusėje keičiame integravimo tvarką

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^{\infty} \Big(\int_u^{\infty} \frac{dx}{x^2}\Big) \sin u du = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}$$

pagal 1 lemą. □

3 lema. *Jei g yra aprėžta ir integruojama Lebego prasme funkcija visoje realiųjų skaičių tiesėje,*

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}g(x)dx \tag{1}$$

yra visiems t neneigiama, tai ir ψ yra integruojama Lebego prasme realiųjų skaičių tiesėje.

Į r o d y m a s. Nesunku įrodyti, kad ψ yra tolydi (įrodymas yra panašus į charakteristinės funkcijos tolydumo įrodymą). Paėmę bet kurį teigiamą y, iš (1), sukeitę integravimo tvarką, gauname

$$\int_{-y}^{y} \psi(t)dt = 2\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{\sin xy}{y}dx.$$

Pasirinkę teigiamą T, dar kartą integruojame ką tik gautą lygybę

$$\int_0^{2T} \Big(\int_{-y}^{y} \psi(t)dt\Big)dy = 2\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{1-\cos 2Tx}{x^2}dx. \tag{2}$$

Kairiojoje pusėje keičiame integravimo tvarką ir remiamės sąlyga, kad ψ yra neneigiama funkcija. Gauname

$$\int_0^{2T}\Big(\int_{-y}^{y}\psi(t)dt\Big)dy = \int_{-2T}^{2T}\psi(t)(2T-|t|)dt \geq T\int_{-T}^{T}\psi(t)dt. \tag{3}$$

Jei K yra konstanta, aprėžianti funkciją g, tai pagal 2 lemą (2) lygybės dešinėje integralas

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{1-\cos 2Tx}{x^2}dx \leq K\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos 2Tx}{x^2}dx = 2\pi TK. \tag{4}$$

Pasinaudoję (3) ir (4) nelygybėmis, iš (2) gauname

$$\int_{-T}^{T}\psi(t)dt \leq 2\pi K.$$

Lieka remtis integralo savybėmis. $\square$

Mums prireiks vadinamosios apvertimo teoremos (žr., pvz., [8], antrąjį leidimą, p. 192). Jei F yra pasiskirstymo funkcija, f — jos charakteristinė funkcja, a ir b — bet kurie realieji skaičiai, tai

$$\frac{F(b+0)+F(b)}{2} - \frac{F(a+0)+F(a)}{2} = \\ = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}f(t)dt.$$

4 lema. *Jei charakteristinė funkcija f yra integruojama Lebego prasme visoje tiesėje $\mathbb{R}$, tai ją atitinkanti pasiskirstymo funkcija F turi aprėžtą ir tolydžią išvestinę ir visiems $x \in \mathbb{R}$*

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}f(t)dt.$$

Į r o d y m a s. Kadangi f yra integruojama funkcija, tai egzistuoja Lebego integralas

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixt}-e^{-i(x+h)t}}{it}f(t)dt,$$

nes pointegralinės funkcijos modulis

$$\Big|\frac{1-e^{-iht}}{it}f(t)\Big|\leq |f(t)|\ |h|.$$

Todėl pagal apvertimo teoremą

$$\frac{F(x+h+0)+F(x+h)}{2}-\frac{F(x+0)-F(x)}{2}= \tag{5}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixt}-e^{-i(x+h)t}}{it}f(t)dt,$$

nes apvertimo formulės dešinės pusės integralą pagal Lebego teoremą galima užrašyti tuo pavidalu. Be to, pagal tą pačią teoremą galima pereiti prie ribos po integralo ženklu, kai $h\to 0$. Gauname, kad $F(x+0)-F(x)=0$. Vadinasi, funkcija F yra tolydi kiekviename taške $x\in\mathbb{R}$. Dabar (5) formulę užrašome pavidalu

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixt}-e^{-i(x+h)t}}{ith}f(t)dt.$$

Tuo pačiu būdu įrodome, kad galime pereiti prie ribos po integralo ženklu, kai $h\to 0$. Gauname

$$F'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}f(t)\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-iht}}{ith}dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}f(t)dt.$$

F' tolydumą įrodome vėl taip pat. Perėję prie ribos, kai $h\to 0$, po integralo ženklu lygybėje

$$F'(x+h)-F'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}(e^{iht}-1)f(t)dt,$$

gauname, kad $F'(x+h) - F'(x) \to 0$, kai $h \to 0$. $\square$

Mums prireiks dar ir tokio teiginio. Tarkime, X ir Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, X – absoliučiai tolydus su tankio funkcija $p(x)$, o Y pasiskirstymo funkcija yra $F(y)$. Tada suma $X+Y$ yra aboliučiai tolydus atsitiktinis dydis ir jo tankio funkcija lygi

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x-y)dF(y).$$

Tačiau gali atsitikti, kad suma yra absoliučiai tolydi ir tada, kai nė vienas iš dėmenų nėra toks. (žr. [8], p. 197).

1 (Gnedenkos) teorema. *Jei nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots$ turi vidurkius a, dispersijas $\sigma^2 > 0$ ir, pradedant kuriuo nors n_0, normuotos sumos*

$$Z_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

turi tankį $p_n(x)$, tai

$$p_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

kai $n \to \infty$, tolygiai x atžvilgiu tada ir tik tada, jei egzistuoja natūralusis n_1, kuriam $p_{n_1}(x)$ yra aprėžtas.

P a s t a b a. Iš mūsų pastabos išplaukia: jei egzistuoja tankis p_{n_0}, tai egzistuoja ir tankis p_n, kai $n > n_0$.

Į r o d y m a s. Sąlygos būtinumas yra akivaizdus. Įrodinėsime jos pakankamumą. Pirmiausia įrodysime, kad atsitiktinio dydžio Z_n charakteristinė funkcija yra integruojama visoje tiesėje $\mathbb{R}$, kai $n \geq 2n_1$.

Pažymėkime f dydžių X_k charakteristines funkcijas ir

$$\varphi(t) = f\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big) \exp\Big(-\frac{iat}{\sigma\sqrt{n}}\Big).$$

Tada sumos Z_n charakteristinė funkcija yra $\varphi^n(t)$. Imkime kitą atsitiktinį dydį Z'_n, nepriklausomą nuo Z_n, bet taip pat pasiskirsčiusį.

Atsitiktinio dydžio $Z_n - Z_n'$ charakteristinė funkcija yra $|\varphi^n(t)|^2$, o tankis g_{n_1} yra aprėžtas. Kadangi

$$|\varphi^{2n_1}(t)| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} q_{n_1}(x)dx,$$

tai pagal 3 lemą $|\varphi^{2n_1}|$, taigi ir $|f|^{2n_1}$, yra integruojamos tiesėje $\mathbb{R}$. Iš nelygybės $|f(t)| \leq 1$ išplaukia, kad $|f|^n$, vadinasi, ir φ^n, yra integruojamos, kai $n \geq 2n_1$.

Kai $n \geq 2n_1$, pagal 4 lemą

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi^n(t)dt.$$

Kaip ir 1.2 teoremos įrodyme, suskaidysime šį integralą į kelis:

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \Bigg(\int_{|t| \leq T} \Big(\varphi^n(t) - e^{-t^2/2} \Big) e^{-itx} dt + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2 - itx} dt - \int_{|t|>T} e^{-t^2/2-itx} dt + \\
&+ \int_{T<|t|\leq \delta\sigma\sqrt{n}} \varphi^n(t) e^{-itx} dt + \int_{\delta\sigma\sqrt{n}<|t|} \varphi^n(t) e^{-itx} dt \Bigg) = \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5;
\end{aligned} \tag{6}$$

čia: T yra teigiamas fiksuotas skaičius, δ – pakankamai mažas teigiamas skaičius, kurį parinksime vėliau.

Samprotaudami visai taip pat kaip ir 1.1 teoremos įrodyme, gauname, kad $I_1 \to 0$, kai $n \to \infty$, tolygiai x atžvilgiu,

$$I_2 = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \ |I_3| \leq \frac{e^{-T^2/2}}{\pi T}, \ |I_4| \leq \frac{2e^{-T^2/4}}{\pi T}.$$

Lieka įvertinti I_5.

Iš funkcijos $|f|^{2n_1}$ integruojamumo išplaukia, kad egzistuoja $\delta > 0$ su sąlyga $|f(t)| \leq \eta < 1$, kai $|t| \geq \delta$. Todėl

$$|I_5| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>\delta\sigma\sqrt{n}} \left| f\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\right|^n dt \le$$

$$\le \eta^{n-2n_1} \sigma\sqrt{n}/(2\pi) \int_{|t|>\delta} |f(t)|^{2n_1} dt \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Iš (6) išplaukia, kad $p_n(x)$ ir $(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$ kiek norima mažai skiriasi, kai T ir n pakankamai dideli. $\square$

Buvo nagrinėtos tankių lokaliosios teoremos, kai ribinis dėsnis yra stabilusis (žr. [6]).

Esama teoremų ir nevienodai pasiskirsčiusiems atsitiktiniams dydžiams.