V. SKYRIUS. STABILIEJI DĖSNIAI

STABILIŲJŲ DĖSNIŲ SĄVOKA

Sakysime, kad pasiskirstymo dėsnis yra *stabilus*, jei bet kuriems teigiamiems a_1, a_2 ir realiesiems b_1, b_2 galime rasti teigiamą skaičių a ir realųjį skaičių b su sąlyga, kad

$$F(a_1x + b_1) * F(a_2x + b_2) = F(ax + b) \tag{1}$$

visiems realiesiems x. Čia $*$ reiškia funkcijų sąsūką. To dėsnio charakteristinę funkciją taip pat vadinsime taip pat *stabiliaja*. Perrašysime (1) lygybę charakteristinių funkcijų terminais:

$$e^{-itb_1/a_1} f\left(\frac{t}{a_1}\right) \cdot e^{-itb_2/a_2} f\left(\frac{t}{a_2}\right) = e^{-itb/a} f\left(\frac{t}{a}\right).$$

Vadinasi, bet kuriems teigiamiems α_1 ir α_2 egzistuoja realusis skaičius β ir teigiamas skaičius α su sąlyga

$$f(\alpha_1 t) f(\alpha_2 t) = e^{i\beta t} f(\alpha t). \tag{2}$$

Nesunku suvokti, kad iš čia galima gauti (1). Todėl stabilųjį dėsnį galime apibrėžti ir charakteristinių funkcijų terminais, naudodamiesi (2) lygybe.

P a v y z d ž i a i . 1. Išsigimęs dėsnis su charakteristine funkcija

$$e^{iat}.$$

2. Normalusis dėsnis su charakteristine funkcija

$$e^{iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

1 teorema. *Stabilieji dėsniai priklauso klasei* $\mathbf{N}$.

Į r o d y m a s . (2) formulėje imkime

$$\alpha t = u,\ a = \frac{\alpha_1}{\alpha},\ a_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha}.$$

Gausime

$$f(u) = e^{-iu\beta/\alpha} f(au) f(a_1 u) = f(au) f_a(u);$$

čia

$$f_a(u) = e^{-iu\beta/\alpha} f(a_1 u)$$

yra charakteristinė funkcija. Lieka pasinaudoti IV.1.4 lema. □

Iš šios teoremos išplaukia, kad stabilūs desniai yra ir neaprėžtai dalūs, nes tokie yra $\mathbf{N}$ klasės dėsniai.

2 teorema. *Tarkime,* $X_1, X_2, \ldots$ *yra vienodai pasiskirstę, nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai,*

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

Normuotų sumų $(S_n - b_n)/a_n$ *su parinktomis konstantomis* $a_n > 0,\ b_n$ *skirstinių ribinių dėsnių klasė silpno konvergavimo prasme sutampa su stabiliųjų dėsnių klase.*

Į r o d y m a s . 1. Tarkime, kad F yra stabili pasiskirstymo funkcija, f — ją atitinkanti charakteristinė funkcija. Sakykime, dydžiai X_k pasiskirstę pagal F. Tada sumos S_n charakteristinė funkcija yra $f^n(t)$. Pagal stabilumo apibrėžimą egzistuoja teigiami skaičiai a_n ir realieji b_n su sąlyga

$$f^n(t) = e^{ib_n t} f(a_n t).$$

Normuotos sumos $(S_n - b_n)/a_n$ charakteristinė funkcija yra

$$e^{-itb_n/a_n} f^n\left(\frac{t}{a_n}\right) = f(t).$$

Taigi ribinis dėsnis yra stabilus.

2. Tarkime, kad normuotos sumos $(S_n - b_n)/a_n$ ribinė pasiskirstymo funkcija yra F. Ją galime laikyti neišsigimusia, nes išsigimęs dėsnis yra stabilus. Pažymėkime f charakteristinę funkciją, atitinkančią F. Tarkime, g yra kiekvieno iš atsitiktinių dydžių X_k charakteristinė funkcija. Tada

$$e^{-itb_n/a_n} g^n\Big(\frac{t}{a_n}\Big) \to f(t) \tag{3}$$

visiems $t \in \mathbb{R}$.

Įrodysime, kad $a_n \to \infty$. Tarkime, kad taip nėra. Tada egzistuoja natūraliųjų skaičių seka n_k $(k = 1, 2, \ldots)$ su sąlyga $a_{n_k} \to a$, kai $k \to \infty$, o a yra baigtinis skaičius. Galime rasti tokį $\delta > 0$, kad $f(at) \neq 0$, kai $|t| \leq \delta$. Iš (3) išplaukia

$$|g(t)| = \big|f(at) + \varepsilon_k\big|^{1/n_k};$$

čia $\varepsilon_k \to 0$. Kai $\delta > 0$ yra pakankamai mažas ir $|t| \leq \delta$, gauname

$$|g(t)| \equiv 1.$$

Iš IV.1.3 lemos

$$|g(2t)| \equiv 1,$$

kai $|t| \leq \delta$. Taip samprotaudami ir toliau, gauname

$$|g(t)| \equiv 1$$

visiems $t \in \mathbb{R}$. Tačiau tada ir $|f(t)| \equiv 1$. Tai prieštarauja prielaidai, kad ribinis dėsnis yra neišsigimęs.

Kadangi $a_n \to \infty$, tai iš $g(t)$ tolydumo išplaukia

$$g\Big(\frac{t}{a_n}\Big) \to 1$$

tolygiai visiems t iš bet kurio fiksuoto baigtinio intervalo. Vadinasi, atsitiktiniai dydžiai X_k/a_n $(k = 1, \ldots, n)$ yra nykstami. Todėl f priklauso klasei $\mathbf{N}$. Iš IV.1.2 lemos išplaukia, kad

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1,$$

kai $n \to \infty$.

Tarkime, kad c_1 ir c_2 yra bet kurie teigiami skaičiai, d_1 ir d_2 — bet kurie realieji skaičiai. Egzistuoja tokia sveikųjų teigiamų skaičių seka m_n $(n = 1, 2, \ldots)$, kad

$$\frac{a_{m_n}}{a_n} \to \frac{c_1}{c_2}.$$

Iš tikrųjų kiekvienam natūraliajam skaičiui n pažymėkime m_n didžiausią k su sąlyga

$$\frac{a_k}{a_n} \le \frac{c_1}{c_2}.$$

Tada

$$\frac{a_{m_n}}{a_n} \le \frac{c_1}{c_2} < \frac{a_{m_n+1}}{a_n}.$$

Iš čia išplaukia norimas teiginys.

Pažymėkime

$$\alpha_n = a_n c_1, \quad \beta_n = \frac{1}{\alpha_n}\big(a_n b_n + a_{m_n} b_{m_n} + a_n d_1 + a_{m_n} d_2\big).$$

Tada

$$\frac{a_n}{\alpha_n}\left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n - d_1\right) + \frac{a_{m_n}}{\alpha_n}\left(\frac{1}{a_{m_n}}\sum_{k=n+1}^{n+m_n} X_k - b_{m_n} - d_2\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_n}\sum_{k=1}^{n+m_n} X_k - \beta_n.$$

Pagal I.2.1 teoremą kairiosios pusės pirmo ir antro dėmenų pasiskirstymo funkcijos konverguoja į $F(c_1 x + d_1)$ ir $F(c_2 x + d_2)$. Todėl dešinėje esantis reiškinys turi ribinę pasiskirstymo funkciją

$$F(c_1 x + d_1) * F(c_2 x + d_2).$$

Antra vertus, dešiniosios pusės pasiskirstymo funkcija pagal tą pačią I.2.1 teoremą gali konverguoti tik į $F(ax + b)$ su tam tikrais a ir b. $\square$

2. STABILIŲJŲ DĖSNIŲ CHARAKTERISTINIŲ FUNKCIJŲ KANONINĖ IŠRAIŠKA

Dabar jau esame pasirengę rasti stabiliųjų dėsnių charakteristinių funkcijų kanoninę išraišką. Mums pravers paprastas teiginys iš matematinės analizės.

Lema. *Jei monotoniška funkcija $w(x)$ yra apibrėžta visiems realiesiems x ir tenkina funkcinę lygtį*

$$w(x_1 + x_2) = w(x_1) + w(x_2),$$

tai ji yra pavidalo $w(x) = Ax$ su konstanta A.

Įrodymas. Iš pradžių gauname $w(0) = w(0+0) = 2w(0)$. Iš čia $w(0) = 0$. Iš lygybės $w(x+(-x)) = w(0) = 0$ turime $w(-x) = -w(x)$. Jei p yra sveikasis skaičius, tai, pavartoję matematinę indukciją, gauname $w(px) = pw(x)$. Iš čia turime $qw(x/q) = w(x)$ visiems sveikiesiems q. Pagaliau gauname, kad $w(xp/q) = p/qw(x)$ visiems sveikiesiems p, q. Iš čia visiems racionaliesiems skaičiams r gauname $w(r) = rw(1)$. Pažymėję $A = w(1)$, turime $w(r) = Ar$.

Parodysime, kad ir visiems realiesiems skaičiams teisinga ta lygybė. Jei x yra bet kuris realusis skaičius, visada galime rasti du kiek norima artimus jam racionaliuosius skaičius r_1, r_2 su sąlygomis $r_1 < x < r_2$. Jei funkcija w yra nemažėjanti, tai $w(r_1) \leq w(x) \leq w(r_2)$, t. y. $Ar_1 \leq w(x) \leq Ar_2$; kai w yra nedidėjanti, tai $Ar_1 \geq w(x) \geq Ar_2$. Abiem atvejais leisdami racionaliesiems skaičiams r_1 artėti į x iš kairės, o racionaliesiems r_2 — iš dešinės, pirmuoju atveju gauname $Ax \leq w(x) \leq Ax$, antruoju — $Ax \geq w(x) \geq Ax$. Vadinasi, $w(x) = Ax$. □

1 teorema. *Neaprėžtai dali charakteristinė funkcija yra stabili tada ir tik tada, kai jos Levi spektrinė funkcija $L(x)$ ir neneigiama konstanta σ^2 Levi formulėje tenkina vieną iš tokių sąlygų:*

1^o $L(x) \equiv 0$,

2^o $\sigma^2 = 0$,

$L(x) = \frac{c_1}{|x|^\alpha}$, kai $x < 0$,

$L(x) = -\frac{c_2}{x^\alpha}$, kai $x > 0$,

ir $0 < \alpha < 2, c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, c_1 + c_2 > 0$.

P a s t a b a . Skaičius α yra vadinamas stabiliojo dėsnio *rodikliu*.

Į r o d y m a s . Pagal stabilios charakteristinės funkcijos apibrėžimą bet kuriems teigiamiems a_1 ir a_2 galime rasti tokį teigiamą a ir realų b, kad

$$f(a_1 t) f(a_2 t) = e^{ibt} f(at). \tag{1}$$

Pagal Levi formulę

$$\ln f(t) = i\Gamma t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{\mathbb{R}, x\neq 0} u(x,t)\, dL(x);$$

čia

$$u(x,t) = e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}.$$

Iš čia taip pat

$$\ln f(at) = i\Gamma at - \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 t^2 + \int_{\mathbb{R}, x\neq 0} u(x,at)\, dL(x).$$

Kaip ir įrodydami IV.2 skyrelio teoremą, pakeitę $ax = y$, gauname

$$\ln f(at) = i\Gamma at - \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 t^2 + \int_{\mathbb{R}, y\neq 0} u\Big(\frac{y}{a}, at\Big) dL\Big(\frac{y}{a}\Big) =$$
$$= i\Gamma_a t - \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 t^2 + \int_{\mathbb{R}, y\neq 0} u(y,t)\, dL\Big(\frac{y}{a}\Big);$$

čia dėl trumpumo pažymėjome

$$\Gamma_a = \Gamma a + (1-a^2) \int_{\mathbb{R}, y\neq 0} \frac{y^3}{(a^2+y^2)(1+y^2)} dL\Big(\frac{y}{a}\Big).$$

Lygiai taip pat

$$\ln f(a_1 t) = i\Gamma_{a_1} t - \frac{1}{2}\sigma^2 a_1^2 t^2 + \int_{\mathbb{R}, y\neq 0} u(y,t)\, dL\Big(\frac{y}{a_1}\Big),$$
$$\ln f(a_2 t) = i\Gamma_{a_2} t - \frac{1}{2}\sigma^2 a_2^2 t^2 + \int_{\mathbb{R}, y\neq 0} u(y,t)\, dL\Big(\frac{y}{a_2}\Big).$$

Įstatę šiuos reiškinius į (1) ir pasinaudoję neaprėžtai dalių dėsnių išraiškos Levi formule vienatimi, gauname

$$\sigma^2(a^2 - a_1^2 - a_2^2) = 0, \tag{2}$$

$$L\Big(\frac{y}{a}\Big) = L\Big(\frac{y}{a_1}\Big) + L\Big(\frac{y}{a_2}\Big). \tag{3}$$

Spręsime (3) funkcinę lygtį. Tirsime ją, kai $y < 0$. Tarkime, $L(y)$ nėra tapatingai lygi nuliui, kai $y < 0$. Imkime

$$m(x) = L\big(-e^x\big),\ -\infty < x < \infty.$$

Iš (3) išplaukia, jog kiekvieniem dviem realiesiems skaičiams λ_1 ir λ_2 galima rasti $\lambda = \lambda(\lambda_1, \lambda_2)$ su sąlyga

$$m(x+\lambda) = m(x+\lambda_1) + m(x+\lambda_2).$$

Iš čia bet kuriems realiesiems $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gauname

$$m(x+\lambda) = m(x+\lambda_1) + \ldots + m(x+\lambda_n)$$

su tam tikru λ. Atskiru atveju, kai $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$,

$$m\big(x+\lambda(n)\big) = nm(x).$$

Perrašykime šią lygybę

$$\frac{1}{n}m(x) = m\big(x - \lambda(n)\big).$$

Pažymėję

$$\lambda\Big(\frac{1}{n}\Big) = -\lambda(n),$$

gausime

$$\frac{1}{n}m(x) = m\Big(x + \lambda\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

Paėmę bet kurį racionalųjį skaičių p/q ir pažymėję

$$\lambda\Big(\frac{p}{q}\Big) = \lambda(p) + \lambda\Big(\frac{1}{q}\Big),$$

gausime

$$\frac{p}{q}m(x) = pm\Big(x + \lambda\Big(\frac{1}{q}\Big)\Big) = m\Big(x + \lambda\Big(\frac{1}{q} + \lambda(p)\Big)\Big) =$$

$$(4) \qquad = m\Big(x + \lambda\Big(\frac{p}{q}\Big)\Big).$$

Kadangi funkcija $L(u)$ nemažėja intervale $(-\infty, 0)$, tai funkcija $m(x)$ nedidėja visoje realiųjų skaičių tiesėje $(-\infty, \infty)$. Todėl funkcija $\lambda(p/q)$, apibrėžta racionaliųjų skaičių aibėje, yra nedidėjanti. Vadinasi, visiems v egzistuoja ribos

$$\lambda(v-0) = \lim_{\frac{p}{q}\to v-0} \lambda\Big(\frac{p}{q}\Big), \quad \lambda(v+0) = \lim_{\frac{p}{q}\to v+0} \lambda\Big(\frac{p}{q}\Big).$$

Iš (4) gauname, kad visiems $v > 0$

$$\lambda(v-0) = \lambda(v+0) = \lambda(v).$$

Kadangi funkcija $m(x)$ yra tolydi iš kairės visiems x, tai iš (4) išplaukia taip pat, kad visiems $v > 0$ funkcija $m(x)$ tenkina lygtį

$$vm(x) = m\big(x + \lambda(v)\big),$$

kurioje $\lambda(v)$ yra nedidėjanti tolydi funkcija. Iš čia lengva gauti, kad $\lambda(v)$ perbėga visą realiųjų skaičių tiesę, kai v kinta nuo 0 iki ∞.

Pagal mūsų prielaidą $L(x)$ nėra tapatingai lygi 0, kai $x < 0$. Todėl ir $m(x)$ nėra tapatingai lygi 0. Nesiaurindami bendrumo, galime laikyti $m(0) \neq 0$ (priešingu atveju galėtume pastumti koordinačių pradžią). Imkime

$$m_1(x) = \frac{m(x)}{m(0)}.$$

Tarkime, x_1 ir x_2 yra bet kurie skaičiai. Parinkime v_1 ir v_2 taip, kad

$$\lambda(v_1) = x_1, \quad \lambda(v_2) = x_2.$$

Tada iš lygybių

$$v_1 m(0) = m(x_1), \quad v_2 m(0) = m(x_2), \quad v_2 m(x_1) = m(x_1 + x_2)$$

funkcijai $m_1(x)$ gausime funkcinę lygtį

$$m_1(x_1 + x_2) = m_1(x_1)\, m_1(x_2).$$

Kadangi $m_1(x)$ yra nedidėjanti funkcija, tapatingai nelygi 0, tai iš funkcinės lygties išplaukia $m_1(x) \neq 0$ visiems x. Imkime $m_2(x) = \ln m_1(x)$. Funkcija $m_2(x)$ yra monotoniška ir tenkina lygtį

$$m_2(x_1 + x_2) = m_2(x_1) + m_2(x_2).$$

Iš skyrelio pradžioje įrodytos lemos išplaukia, kad vienintelis monotoniškas tos lygties sprendinys yra $m_2(x) = \alpha x$ su konstanta α. Kadangi $L(-\infty) = 0$, tai iš čia randame

$$m_1(x) = m_1(0)e^{-\alpha x},\ \alpha > 0,$$

$$L(x) = \frac{c_1}{|x|^\alpha},\ c_1 > 0,\ \alpha > 0,\ x < 0.$$

Kadangi integralas

$$\int_{-1}^{0} x^2 dL(x) = c_1\alpha \int_0^1 x^{1-\alpha} dx$$

turi konverguoti, tai $\alpha < 2$. Galutinai gauname

$$L(x) = \frac{c_1}{|x|^\alpha},\ c_1 \geq 0,\ 0 < \alpha < 2. \tag{5}$$

Analogiškai galima gauti

$$L(x) = -\frac{c_2}{x^{\alpha'}},\ c_2 \geq 0,\ 0 < \alpha' < 2,\ x > 0. \tag{6}$$

Paėmę (3) lygybėje $a_1 = a_2 = 1$ ir pasinaudoję (5), (6), gausime

$$a^\alpha = 2,\ a^{\alpha'} = 2. \tag{7}$$

Todėl $\alpha = \alpha'$. Paėmę (2) lygybėje $a_1 = a_2 = 1$, randame, kad

$$\sigma^2(a^2 - 2) = 0.$$

Jei funkcija $L(x)$ bent vienoje pusašėje nelygi nuliui, tai pagal (7) $a^2 \neq 2$. Vadinasi, $\sigma = 0$. Antra vertus, jei $\sigma \neq 0$, tai $a^2 = 2$, taigi $L(x) \equiv 0$.

Taigi Levi formulėje arba

$$L(x) = \frac{c_1}{|x|^\alpha},\ x < 0,\ L(x) = -\frac{c_2}{x^\alpha},\ x > 0,$$
$$c_1 \geq 0,\ c_2 \geq 0,\ c_1 + c_2 > 0, 0 < \alpha < 2,\ \sigma = 0,$$

arba

$$L(x) \equiv 0.$$

Sąlygos pakankamumas yra trivialus. $\square$

Stabiliųjų dėsnių charakteristines funkcijas galima ir kitaip užrašyti. Tam reikės integralus jų kanoninėje išraiškoje išreikšti elementariosiomis funkcijomis.

2 teorema. *Funkcija f yra stabili charakteristinė funkcija tada ir tik tada, kai ji yra pavidalo*

$$f(t) = \exp\left\{i\gamma t - c|t|^\alpha\big(1 - i\beta\omega(t,\alpha)\cdot \mathrm{sign} t\big)\right\};$$

čia α, β, γ, c yra realios konstantos, $c \geq 0,\ 0 < \alpha \leq 2,\ -1 \leq \beta \leq 1$, ir

$$\omega(t,\alpha) = \begin{cases} \tan\frac{\pi}{2}\alpha, & \text{kai } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}\ln|t|, & \text{kai } \alpha = 1. \end{cases}$$

P a s t a b a. Kai $\alpha = 1$ ir $t = 0$, paskutinį f išraiškos narį laikome lygiu 0.

Į r o d y m a s . Naudosimės 1 teoremoje rasta funkcijos $L(x)$ išraiška.

1. Tarkime, $0 < \alpha < 1$. Integralas

$$\int_{\mathbb{R}, x\neq 0} \frac{x}{1+x^2}\, dL(x)$$

yra baigtinis. Todėl

$$\ln f(t) = i\gamma' t + \alpha c_1 \int_{-\infty}^{0} \left(e^{itx} - 1\right) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} + \alpha c_2 \int_{0}^{\infty} \left(e^{itx} - 1\right) \frac{dx}{x^{1+\alpha}}.$$

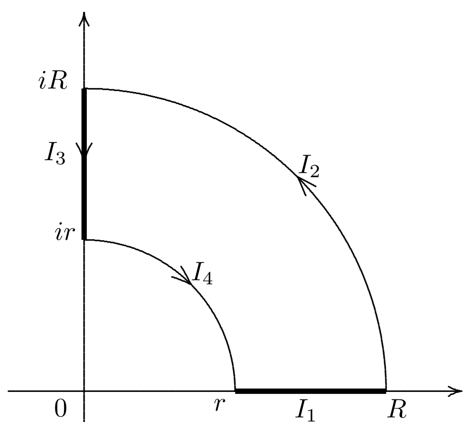
Tegul $t > 0$. Pakeitę kintamuosius, gausime

$$\ln f(t) = i\gamma' t + \alpha t^{\alpha} \left(c_1 \int_{0}^{\infty} \left(e^{-ix} - 1\right) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} + c_2 \int_{0}^{\infty} \left(e^{ix} - 1\right) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \right).$$

Funkcija

$$\frac{e^{ix} - 1}{x^{1+\alpha}} \tag{8}$$

yra analizinė kompleksinėje plokštumoje, perpjautoje pagal neigiamą pusašę. Imkime du integravimo kelius (žr. 1 brėž.). Tarkime, $0 < r < R$. Kontūras K bus



1 br.

realiosios ašies atkarpa nuo r iki R. Kitas kontūras bus sudarytas iš trijų dalių $K_1 \cup K_2 \cup K_3$; čia K_1 — apskritimo su centru koordinačių pradžioje ir spinduliu r lankas nuo realiosios iki menamosios ašies,

K_2 — menamosios ašies atkarpa nuo ir iki iR, K_3 — apskritimo su centru koordinačių pradžioje ir spinduliu R lankas nuo menamosios iki realiosios ašies. Pagal Koši teoremą (8) funkcijos integralas abiem kontūrais bus tas pats. Kai $r \to 0$, integralas kontūru K_2 konverguos į nulį. Kai $R \to \infty$, integralas kontūru K_3 taip pat konverguos į nulį. Atitinkamai pakeitę integravimo kintamąjį, gausime

$$\int_0^\infty \big(e^{ix} - 1\big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \int_0^{i\infty} \big(e^{ix} - 1\big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}} = e^{-i\alpha\pi/2}G(\alpha);$$

čia

$$G(\alpha) = \int_0^\infty \big(e^{-x} - 1\big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}} < 0.$$

Analogiškai

$$\int_0^\infty \big(e^{-ix} - 1\big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}} = e^{i\alpha\pi/2}G(\alpha).$$

Todėl, kai $t > 0$,

$$\begin{aligned}\ln f(t) &= i\gamma' t + \alpha G(\alpha) t^\alpha \big((c_1 + c_2)\cos\frac{\pi}{2}\alpha + i(c_1 - c_2)\sin\frac{\pi}{2}\alpha\big) = \\ &= i\gamma' t - ct^\alpha\big(1 - i\beta\tan\frac{\pi}{2}\alpha\big);\end{aligned}$$

čia

$$\begin{aligned}c &= -\alpha G(\alpha)(c_1 + c_2)\cos\frac{\pi}{2}\alpha \ge 0, \\ \beta &= \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad |\beta| \le 1.\end{aligned}$$

Kai $t < 0$,

$$\begin{aligned}\ln f(t) = \ln\overline{f(-t)} &= -i\gamma'(-t) - c(-t^\alpha)\Big(1 - i\beta\tan\frac{\pi}{2}\alpha\Big) = \\ &= i\gamma' t - c|t|^\alpha\Big(1 - i\beta\tan\frac{\pi}{2}\alpha\Big).\end{aligned}$$

Vadinasi, visiems t

$$\ln f(t) = i\gamma' t - c|t|^\alpha\Big(1 - i\beta\tan\frac{\pi}{2}\alpha\cdot\operatorname{sgn} t\Big).$$

2. Tarkime $1 < \alpha < 2$. Levi formulę dabar perrašysime pavidalu

$$\ln f(t) = i\gamma'' t + c_1 \alpha \int_{-\infty}^{0} \bigl(e^{itx} - 1 - itx\bigr) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} + \\ + c_2 \alpha \int_0^{\infty} \bigl(e^{itx} - 1 - itx\bigr) \frac{dx}{x^{1+\alpha}}.$$

Kai $t > 0$, randame

$$\ln f(t) = i\gamma'' t + \alpha t^{\alpha} \biggl(\int_0^{\infty} \bigl(e^{-ix} - 1 + ix\bigr) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} + \\ + c_2 \int_0^{\infty} \bigl(e^{ix} - 1 - ix\bigr) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \biggr).$$

Integruodami funkciją

$$\frac{e^{-ix} - 1 + ix}{x^{1+\alpha}}$$

tuo pačiu kontūru kaip ir anksčiau, gausime

$$\int_0^{\infty} \bigl(e^{-ix} - 1 + ix\bigr) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = e^{-i\alpha\pi/2} H(\alpha),$$

$$\int_0^{\infty} \bigl(e^{ix} - 1 - ix\bigr) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = e^{i\alpha\pi/2} H(\alpha);$$

čia

$$H(\alpha) = \int_0^{\infty} \bigl(e^{-x} - 1 + x\bigr) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} > 0.$$

Samprotaudami taip pat kaip ir anksčiau, gausime visiems t

$$\ln f(t) = i\gamma'' t - c|t|^{\alpha} \bigl(1 - i\beta \tan \frac{\pi}{2}\alpha \cdot \mathrm{sgn} t\bigr),$$

$$c = -\alpha H(\alpha)(c_1 + c_2) \cos \frac{\pi}{2}\alpha \geq 0,$$

$$\beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad |\beta| \leq 1.$$

3. Dabar tirsime atvejį $\alpha = 1$. Iš pradžių imsime $t > 0$. Kadangi

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2},$$

tai

$$\int_0^\infty \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\cos tx - 1}{x^2}dx + i\int_0^\infty \left(\sin tx - \frac{xt}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x^2} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}t + it\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{\sin tx}{x^2}dx - t\int_\varepsilon^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{2}t + it\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-t\int_\varepsilon^{\varepsilon t}\frac{\sin x}{x^2}dx + \right.$$

$$\left. + t\int_\varepsilon^\infty \left(\frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{x(1+x^2)}\right)\right)dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2}t + it\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{x(1+x^2)}\right)dx - it\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\varepsilon t}\frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}t - it\ln t + it\Gamma,$$

kai

$$\Gamma = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{x(1+x^2)}\right)dx.$$

Samprotaudami kaip ir anksčiau, galutinai gausime visiems t

$$\ln f(t) = i\gamma' t - c|t|\Big(1 - i\beta\frac{2}{\pi}\ln|t|\cdot \mathrm{sgn} t\Big);$$

čia

$$c = (c_1 + c_2)\frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad |\beta| \le 1. \quad \square$$

3. NORMAVIMO KONSTANTOS. TRAUKOS SRITYS

Priminsime lėtai kintančių funkcijų sąvokas.

Apibrėžta visiems $x \geq 0$ teigiama funkcija $h(x)$ yra vadinama *lėtai kintančia*, jei visiems $t > 0$

$$\frac{h(tx)}{h(x)} \to 1,$$

kai $x \to \infty$.

P a v y z d ž i a i. 1. $h(x) = |\ln x|^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

2. $h(x) = \exp\left\{\sqrt{\ln x}\right\}$.

Analogiškai apibrėžiamos ir natūraliojo argumento lėtai kintančios funkcijos. Funkcija $h(n) > 0$ vadinama *lėtai kintančia*, jei visiems natūraliesiems k

$$\frac{h(kn)}{h(n)} \to 1,$$

kai $n \to \infty$.

Tegul $X_1, X_2, \ldots$ yra vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $F-$ dydžių X_k pasiskirstymo funkcija, f — jų charakteristinė funkcija.

1 teorema. *Jei normuotos sumos*

$$\frac{S_n - b_n}{a_n},$$

$a_n > 0$*, pasiskirstymo funkcija konverguoja į neišsigimusį stabilųjį dėsnį su rodikliu* α*, tai*

$$a_n = n^{1/\alpha} h(n);$$

čia $h(n)$ *yra lėtai kintanti funkcija.*

Į r o d y m a s . Normuotos sumos charakteristinė funkcija yra

$$f^n\left(\frac{t}{a_n}\right) e^{-itb_n/a_n}.$$

Iš teoremos sąlygų

$$\left| f^n\left(\frac{t}{a_n}\right)\right| = e^{-c|t|^\alpha}\big(1+o(1)\big); \tag{1}$$

čia liekamasis narys konverguoja nulin tolygiai, kai t priklauso bet kuriam fiksuotam baigtiniam intervalui. Tarkime, kad k yra bet kuris natūralusis skaičius. Tada

$$\left| f^{kn}\left(\frac{t}{a_{kn}}\right)\right| = \left| f^n\left(\frac{t}{a_n}\frac{a_n}{a_{kn}}\right)\right|^k = e^{-c|t|^\alpha}\big(1+o(1)\big) \tag{2}$$

Parodysime dabar, kad seka a_n/a_{kn} $(n=1,2,\dots)$ yra aprėžta. Tarkime, kad yra ne taip. Tada būtų galima rasti seką $\{n_j\}$ su sąlyga

$$\frac{a_{kn_j}}{a_{n_j}} \to 0,$$

kai $n_j \to \infty$. Įstatę į (2) $n=n_j,\ t=a_{kn_j}/a_{n_j}$, gautume

$$\left| f^{kn_j}\left(\frac{1}{a_{n_j}}\right)\right| = \left| f^{n_j}\left(\frac{a_{kn_j}}{a_{n_j}}\frac{1}{a_{kn_j}}\right)\right|^k.$$

Kairėje reiškinys konverguotų pagal (1) į e^{-kc}, o dešinėje — į 1. Gautume neteisingą lygybę $e^{-kc}=1$. Vadinasi, seka $\big\{a_n/a_{kn}\big\}$ yra aprėžta.

Iš (1) ir (2) gauname

$$e^{-c|t|^\alpha}\big(1+o(1)\big) = e^{-ck|t|^\alpha (a_n/a_{kn})^\alpha}\big(1+o(1)\big).$$

Pastaroji lygybė yra teisinga tik tada, kai

$$\lim_{n\to\infty} k\Big(\frac{a_n}{a_{kn}}\Big)^\alpha = 1,$$

tai yra,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{kn}}{a_n} = k^{1/\alpha}.$$

Pažymėję
$$a_n = n^{1/\alpha} h(n),$$
gauname
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(kn)^{1/\alpha} h(kn)}{n^{1/\alpha} h(n)} = k^{1/\alpha}.$$
Iš čia
$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(kn)}{h(n)} = 1. \quad \square$$

Baigdami kalbėti apie stabiliuosius dėsnius, paminėsime, kad egzistuoja atskirų dėmenų ir ribinės pasiskirstymo funkcijos ryšys. Nusakysime jį. Mums pravers naujas terminas.

Jei, parinkus normuojančias konstantas a_n ir b_n, normuotų sumų $(S_n - b_n)/a_n$ pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją G, tai sakome, kad funkcija F priklauso funkcijos G *traukos sričiai.* Iš 1.2 teoremos išplaukia, kad tik stabilūs dėsniai turi traukos sritis.

2 teorema. *Pasiskirstymo dėsnis F priklauso stabilaus dėsnio su rodikliu $\alpha, 0 < \alpha < 2$, traukos sričiai tada ir tik tada, kai*
$$F(x) = \begin{cases} \frac{c_1 + o(1)}{|x|^\alpha} h(|x|), & x < 0, \\ 1 - \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} h(x), & x > 0 \end{cases}$$
ir $|x| \to \infty$. Čia $h(x)$ yra lėtai kintanti funkcija, o c_1 ir c_2 — neneigiamos konstantos, $c_1 + c_2 > 0$.

Ši teorema neapima normaliojo dėsnio. Suformuluosime atskirą teoremą.

3 teorema. *Pasiskirstymo funkcija F priklauso normaliojo dėsnio traukos sričiai tada ir tik tada, kai tenkinama viena iš sąlygų:*

1^o *F turi baigtinę dispersiją;*

2^o *kai $x > 0$,*
$$1 - F(x) + F(-x) = \frac{h(x)}{x^2};$$
čia h yra lėtai kintanti funkcija.

Šių teoremų įrodymus galima rasti knygose [5], [6].