IV SKYRIUS. NORMUOTOS SUMOS

KLASĖ N

Grįšime prie atsitiktinių dydžių sumavimo teorijos klasikinių uždavinių — normuotų sumų ribinių pasiskirstymo dėsnių nagrinėjimo.

Sakysime, kad pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathbf{N}$, jei egzistuoja tokia nepriklausomų atsitiktinių dydžių seka X_k ($k = 1, 2, \ldots$), tokia teigiamų skaičių seka a_n ($n = 1, 2, \ldots$) ir tokia realiųjų skaičių seka b_n ($n = 1, 2, \ldots$), kad

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k - b_n \tag{1}$$

ribinė pasiskirstymo funkcija būtų F ir kiekvienam teigiamam ε

$$\max_{1 \le k \le n} P\Big(\frac{1}{a_n} \big|X_k\big| \ge \varepsilon\Big) \to 0. \tag{2}$$

Literatūroje galima rasti ir kitokių tos klasės žymėjimų.

Dydžiai

$$\frac{X_k}{a_n} \quad (k = 1, \ldots, n; \quad n = 1, 2, \ldots)$$

yra nykstami. Todėl klasės $\mathbf{N}$ dėsniai yra neaprėžtai dalūs. Mūsų artimiausias tikslas – rasti tų dėsnių charakteristinių funkcijų kanoninę išraišką. Iš pradžių įrodysime keletą pagalbinių teiginių.

1 lema. *Jei atsitiktinių dydžių sekos X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją F, o kita atsitiktinių dydžių seka Y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ konverguoja pagal tikimybę į 0: $P(|Y_n| \ge \varepsilon) \to 0$, tai sumos $X_n + Y_n$ pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į F.*

Į r o d y m a s . Tai iš esmės yra I.5.3 lema. Pakanka joje paimti $X_n' - X_n = Y_n$. $\square$

2 lema. *Tarkime, kad* $\{a_n\}$ *yra teigiamų,* $\{b_n\}$ *— realiųjų skaičių, o* $\{X_n\}$ *— nepriklausomų atsitiktinių dydžių sekos. Jei yra tenkinama* (2) *sąlyga ir* (1) *sumų pasiskirstymo dėsniai silpnai konverguoja į neišsigimusį dėsnį, tai*

$$a_n \to \infty, \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1.$$

Į r o d y m a s . Pažymėkime atsitiktinių dydžių X_k charakteristines funkcijas f_k. Tada (1) sumos charakteristinė funkcija

$$\phi_n(t) = e^{-ib_n t} \prod_{k=1}^{n} f_k\Big(\frac{t}{a_n}\Big).$$

Jei f yra (1) sumos ribinio dėsnio charakteristinė funkcija, tai

$$\phi_n(t) \to f(t).$$

Tarkime, kad $a_n \nrightarrow \infty$. Tada iš sekos $\{a_n\}$ galima išskirti aprėžtą posekį $\{a_{n_m}\}$, konverguojantį į baigtinę ribą a, kai $m \to \infty$. Imkime fiksuotą t. Pažymėkime $t_m = a_{n_m} t$. Tada $t_m \to at$, kai $m \to \infty$. Iš (2) sąlygos ir III.1.3 lemos

$$\max_{1 \le k \le n} \Big| f_k\Big(\frac{t}{a_n}\Big) - 1 \Big| \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Todėl bet kuriam k

$$\big|f_k(t)\big| = \left| f_k\left(\frac{t_m}{a_{n_m}}\right)\right| \to 1,$$

kai $m \to \infty$. Iš čia išplaukia

$$\big|f_k(t)\big| \equiv 1$$

ir

$$|f(t)| \equiv 1.$$

Vadinasi, ribinė funkcija būtų išsigimusi. Gautume prieštarą. Todėl $a_n \to \infty$.

Iš (2) ir 1 lemos išplaukia, kad sumos

$$\frac{1}{a_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} X_k - b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} X_k - b_{n+1} - \frac{X_{n+1}}{a_{n+1}}$$

pasiskirstymo funkcija silpnai konverguoja į F. Pažymėję (1) sumos pasiskirstymo funkciją F_n , gautume

$$P\left(\frac{1}{a_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} X_n - b_{n+1} < x\right) = F_n(\alpha_n x + \beta_n);$$

čia $\alpha_n = a_{n+1}/a_n$, $\beta_n = a_{n+1}/a_n \cdot b_{n+1} - b_n$. Iš I.2.1 teoremos išplaukia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1. \quad \square$$

3 lema. *Kiekvienai charakteristinei funkcijai f*

$$1 - |f(2t)|^2 \leq 4(1 - |f(t)|^2).$$

Į r o d y m a s išplaukia iš I.2.1 lemos, nes $|f|^2$ yra charakteristinė funkcija. $\square$

4 lema. *Pasiskirstymo funkcija F su charakteristine funkcija f priklauso klasei $\mathbf{N}$ tada ir tik tada, kai kiekvienam $\alpha \in (0, 1)$ egzistuoja charakteristinė funkcija f_α su sąlyga*

$$f(t) = f(\alpha t) f_\alpha(t). \tag{3}$$

Be to, f_α yra neaprėžtai dali.

Į r o d y m a s . P a k a n k a m u m a s . Tarkime, kad (3) sąlyga yra tenkinama. Parodysime, kad visoms realiosioms argumento reikšmėms f nevirsta 0. Jei būtų $f(2T) = 0$ ir $f(t) \neq 0$, kai $0 \leq t < 2T$, tai

$$f_\alpha(2T) = 0$$

ir

$$1 = 1 - |f_\alpha(2T)|^2 \le 4(1 - |f_\alpha(T)|^2) \tag{4}$$

pagal 3 lemą. Antra vertus, iš f tolydumo išplaukia

$$f_\alpha(T) = \frac{f(T)}{f(\alpha T)} \to 1,$$

kai $\alpha \to 1$. Todėl (4) nebūtų teisinga visiems α, pakankamai artimiems 1. Vadinasi, f negali virsti 0.

Tarkime, kad (3) sąlyga yra tenkinama. Imkime nepriklausomus atsitiktinius dydžius $X_1, \ldots, X_n$ su charakteristinėmis funkcijomis

$$\phi_k(t) = f_{\frac{k-1}{k}}(kt) = \frac{f(kt)}{f((k-1)t)} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Sumos $(X_1 + \ldots + X_n)/n$ charakteristinė funkcija lygi

$$\prod_{k=1}^{n} \phi_k\Big(\frac{t}{n}\Big) = f(t).$$

Kadangi f yra tolydi, tai

$$\max_k \Big|\phi_k\Big(\frac{t}{n}\Big) - 1\Big| \to 0,$$

kai $n \to \infty$, vadinasi, visiems $\varepsilon > 0$

$$\max_k P\big(|X_k| \ge \varepsilon n\big) \to 0.$$

Todėl F priklauso klasei $\mathbf{N}$.

B ū t i n u m a s . Tarkime, kad $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $a_n > 0$, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — konstantos su sąlyga, kad (1) sumų pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į F ir tenkinama (2) sąlyga. Galime sakyti, kad F yra neišsigimusi pasiskirstymo funkcija, nes tokioms funkcijoms (3) sąlyga yra tenkinama su išsigimusia charakteristine funkcija f_α.

Pažymėkime f_k dydžio X_k charakteristinę funkciją. Tada normuotos sumos charakteristinė funkcija

$$g_n(t) = e^{-ib_n t} \prod_{k=1}^{n} f_k\Big(\frac{t}{a_n}\Big) \to f(t).$$

Be to, f nevirsta 0, nes ji yra neaprėžtai dali. Pagal 2 lemą

$$a_n \to \infty, \quad , \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1.$$

Todėl kiekvienam teigiamam $\alpha < 1$ egzistuoja sveikųjų skaičių seka $\{m_n\}$ su sąlygomis

$$m_n \to \infty, \quad n - m_n \to \infty, \quad \frac{a_{m_n}}{a_n} \to \alpha.$$

Perrašysime g_n pavidalu

$$g_n(t) = g_n^{(1)}(t) g_n^{(2)}(t);$$

čia

$$g_n^{(1)}(t) = e^{-i\alpha b_{m_n} t} \prod_{k=1}^{m_n} f_k\left(\frac{a_{m_n}}{a_n}\frac{t}{a_{m_n}}\right),$$

$$g_n^{(2)}(t) = e^{-it(b_n - b_{m_n}\alpha)} \prod_{k=m_n+1}^{n} f_k\Big(\frac{t}{a_n}\Big).$$

Kadangi $g_n(t) \to f(t)$, tai iš m_n savybių išplaukia, kad $g_n^{(1)}(t) \to f(\alpha t)$. Todėl $g_n^{(2)}(t)$ konverguoja į tolydžią funkciją

$$f_\alpha(t) = \frac{f(t)}{f(\alpha t)}.$$

Iš charakteristinių funkcijų ribinių teoremų gauname, kad f_α yra charakteristinė funkcija.

Funkcija f_α yra neaprėžtai dali, kadangi ji yra nepriklausomų nykstamų atsitiktinių dydžių sumų ribinė charakteristinė funkcija. $\square$

2. KLASĖS N CHARAKTERISTINIŲ FUNKCIJŲ KANONINĖ IŠRAIŠKA

Dabar **N** klasės charakteristines funkcijas jau galėsime apibūdinti jų Levi spektrinėmis funkcijomis. Mums dar reikia kai ką prisiminti apie iškiląsias funkcijas. Jei kuriame nors intervale funkcija H turi savybę: visiems x ir y

$$\frac{1}{2}\big(H(x)+H(y)\big) \le H\Big(\frac{x+y}{2}\Big),$$

tai sakome, jog ji yra iškila (iš viršaus). Tokia funkcija yra tolydi, kiekviename taške turi išvestines iš kairės ir dešinės, kurios yra nedidėjančios funkcijos.

Teorema. *Neaprėžtai dali pasiskirstymo funkcija priklauso klasei* **N** *tada ir tik tada, kai jos charakteristinės funkcijos Levi spektrinė funkija L kiekviename taške $x \ne 0$ yra tolydi, turi išvestinę iš kairės ir dešinės ir funkcija $xL'(x)$ yra nedidėjanti; čia L' reiškia išvestinę iš kairės arba iš dešinės.*

Į r o d y m a s . 1. Naudosimės 1.4 lema. Tarkime, kad tiriamoji funkcija yra išreikšta Levi kanonine forma

$$f(t) = \exp\left\{i\gamma t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{-\infty, x\ne 0}^{\infty} u(x,t)\,dL(x)\right\};$$

čia

$$u(x,t) = e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}.$$

Kiekvienam $\alpha \in (0,1)$ tirsime santykį $f(t)/f(\alpha t)$. Turime

$$f(\alpha t) = \exp\left\{i\alpha\gamma t - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 t^2 + \int_{-\infty, x\ne 0}^{\infty} u(x,\alpha t)\,dL(x)\right\}.$$

Kintamąjį x keičiame į x/α:

$$f(\alpha t) = \exp\left\{i\alpha\gamma t - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 t^2 + \int_{-\infty, x\ne 0}^{\infty} u\Big(\frac{x}{\alpha},\alpha t\Big)\,dL\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\right\}.$$

Pointegralinei funkcijai suteiksime reikiamą pavidalą. Kadangi

$$u\Big(\frac{x}{\alpha}, \alpha t\Big) - u(x,t) = (1-\alpha^2)\frac{itx^3}{(1+x^2)(\alpha^2+x^2)},$$

tai

$$\int_{-\infty, x\neq 0}^{\infty} \Big(u\Big(\frac{x}{\alpha}, \alpha t\Big) - u(x,t)\Big) dL\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) =$$
$$= (1-\alpha^2)it\int_{-\infty, x\neq 0}^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)(\alpha^2+x^2)} dL\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) =$$
$$= \alpha(1-\alpha^2)it\int_{-\infty, y\neq 0}^{\infty} \frac{y^3}{(1+y^2)(\alpha^2+y^2)} dL(y) = ic_1 t$$

ir

$$f(\alpha t) = \exp\Big\{i\gamma_1 t - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2 t^2 + \int_{-\infty, x\neq 0}^{\infty} u(x,t) dL\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\Big\};$$

čia $\gamma_1 = \gamma\alpha + c_1$. Gauname

$$\frac{f(t)}{f(\alpha t)} = \exp\Big\{i(\gamma-\gamma_1)t - \frac{1}{2}\sigma^2(1-\alpha^2)t^2 +$$
$$+ \int_{-\infty, x\neq 0}^{\infty} u(x,t) d\Big(L(x) - L\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\Big)\Big\}.$$

Jei f yra **N** klasės funkcija, tai

$$\frac{f(t)}{f(\alpha t)}$$

pagal 1.4 lemą yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija. Todėl iš Levi kanoninės išraiškos išplaukia, kad

$$L(x) - L\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)$$

nemažėja pustiesėse $x < 0$ ir $x > 0$. Vadinasi, bet kuriems x_1 ir x_2, $x_1 < x_2$, $x_1 x_2 > 0$,

$$L(x_1) - L\Big(\frac{x_1}{\alpha}\Big) \leq L(x_2) - L\Big(\frac{x_2}{\alpha}\Big). \tag{5}$$

Atvirkščiai, iš (5) bet kuriems x_1, x_2, $x_1 < x_2, x_1 x_2 > 0$, ir bet kuriems $\alpha \in (0,1)$ išplaukia, kad funkcija $L(x) - L(x/\alpha)$ nemažėja ir todėl $f_\alpha(t) = f(t)/f(\alpha t)$ yra charakteristinė funkcija.

Taigi (5) yra būtina ir pakankama sąlyga, kad funkcija f, kurios spektrinė funkcija L, priklausytų klasei $\mathbf{N}$.

2. Charakterizuosime funkcijas, tenkinančias (5) sąlygą. Pažymėkime

$$J(x) = -\int_{e^x}^{\infty} dL(u) = L\big(e^x\big) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Tarkime, kad (5) nelygybė tenkinama. Paėme joje $x_1 = e^{x-h}$, $x_2 = e^x$, $h > 0$, $\alpha = e^{-h}$, gausime nelygybę

$$J(x-h) - J(x) \leq J(x) - J(x+h),$$

arba

$$J(x) \geq \frac{1}{2}\Big(J(x+h) + J(x-h)\Big).$$

Todėl funkcija J yra iškila į viršų. Iš čia išplaukia, kad J yra tolydi, turi išvestines iš kairės ir dešinės, kurios nedidėja. Kadangi

$$J'(x) = e^x L'\big(e^x\big),$$

tai funkcija $xL'(x)$ nedidėja, kai $x > 0$.

Tirdami funkciją

$$J_1(x) = \int_{-\infty}^{-e^x} dL(u) = L(-e^x), \quad (-\infty < x < \infty),$$

lygiai taip pat gauname, kad $xL'(x)$ nedidėja, kai $x < 0$.

3. Atvirkščiai, jei funkcija L bet kuriame taške $x \neq 0$ turi išvestinę iš kairės ir iš dešinės ir funkcija $xL'(x)$ nedidėja, tai bet kuriam $\alpha \in (0,1)$

$$\frac{x}{\alpha}L'\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) \le xL'(x), \text{ jei } x > 0,$$

$$\frac{x}{\alpha}L'\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) \ge xL'(x), \text{ jei } x < 0.$$

Jei $x_1 < x_2,\ x_1x_2 > 0$, tai

$$L\Big(\frac{x_2}{\alpha}\Big) - L\Big(\frac{x_1}{\alpha}\Big) = \int_{x_1}^{x_2} dL\Big(\frac{u}{\alpha}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_{x_1}^{x_2} L'\Big(\frac{u}{\alpha}\Big)du \le \int_{x_1}^{x_2} L'(u)du = L(x_2) - L(x_1).$$

Todėl (5) sąlyga yra tenkinama. $\square$

Iš įrodytosios teoremos turime, kad normalusis ir išsigimęs dėsniai priklauso klasei **N**, nes $L \equiv 0$. Tuo tarpu Puasono dėsnis tai klasei nepriklauso, nes jo Levi spektrinė funkcija turi trūkio tašką, kuris nėra 0.

3. NORMUOTŲ SUMŲ PASISKIRSTYMŲ KONVERGAVIMAS Į NORMALŲJĮ DĖSNĮ

Iš įvairių galimų teoremų mes įrodysime tik keletą jų apie konvergavimą į normalųjį dėsnį.

Kaip ir anksčiau, $X_1, X_2, \ldots$ laikysime nepriklausomais atsitiktiniais dydžiais. Jų pasiskirstymo funkcijas žymėsime $F_1,\ F_2, \ldots$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n,$$

$$M_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<a} x dF_k(x),$$

$$D_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_{|x|<a} x^2 dF_k(x) - \Big(\int_{|x|<a} x dF_k(x) \Big)^2 \Big).$$

1 teorema. *Tarkime,* a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *yra teigiamų skaičių seka. Kiekvienam fiksuotam* $\varepsilon > 0$

$$\max_{1 \le k \le n} P\big(|X_k| \ge \varepsilon a_n\big) \to 0$$

ir

$$P\left(\frac{S_n}{a_n} < x\right) \to \Phi(x)$$

tada ir tik tada, kai teisingos sąlygos:

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \ge \varepsilon a_n} dF_k(x) \to 0 \text{ kiekvienam fiksuotam } \varepsilon > 0,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{a_n^2} D_n(a_n) \to 1,$$

$$(3) \qquad \frac{1}{a_n} M_n(a_n) \to 0.$$

Į r o d y m a s . Ši teorema yra III.5.1 ir III.5.2 teoremų išvada.□

P a s ta b a . Pastarąsias dvi sąlygas pagal III.5.1 teoremą galime parašyti pavidalu

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{a_n^2} D_n(\varepsilon a_n) \to 1, \\ &\frac{1}{a_n} M_n(\varepsilon a_n) \to 0 \end{aligned}$$

kiekvienam fiksuotam $\varepsilon > 0$.

Lema. *Tarkime, kad* $h_n(x)$ *yra seka realiųjų funkcijų, apibrėžtų nulinio taško aplinkoje. Jei kiekvienam fiksuotam* $\varepsilon > 0$ *seka* $h_n(\varepsilon) \to h$*, kai* $n \to \infty$*, tai egzistuoja seka skaičių* ε_n *su sąlygomis:* $\varepsilon_n \to 0$ *ir* $h_n(\varepsilon_n) \to h$*, kai* $n \to \infty$.

Į r o d y m a s . Galime laikyti, kad $h = 0$, $h_n(\varepsilon_n) \ge 0$, nes priešingu atveju galėtume nagrinėti funkcijų sekos $g_n(\varepsilon) = |h_n(\varepsilon) - h|$ konvergavimą.

Pažymėkime
$$z_n(\varepsilon) = \max_{k\geq n} h_k(\varepsilon).$$
Aišku, kad $z_n(\varepsilon) \to 0$, kai $n \to \infty$. Egzistuoja didėjanti skaičių seka $\{n_m\}$ su sąlyga
$$z_n\bigl(2^{-m}\bigr) < 2^{-m}, \quad \text{kai} \quad n \geq n_m \quad (m = 1, 2, \dots).$$
Imkime
$$\varepsilon_n = 2^{-m+1}, \quad \text{kai} \quad n_{m-1} \leq n < n_m \quad (n_0 = 1).$$
Tada
$$\max_{n_{m-1}\leq n<n_m} z_n(\varepsilon_n) \leq z_{n_{m-1}}\bigl(2^{-m+1}\bigr) \leq 2^{-m+1} \to 0,$$
kai $m \to \infty$. Iš čia ir $z_n(\varepsilon)$ apibrėžimo išplaukia lemos teiginys. □

2 teorema. *Konstantų sekos* $a_n > 0$, b_n $(n = 1, 2, \dots)$ *su sąlygomis*

(5) $$\max_{1\leq k\leq n} P\bigl(|X_k| \geq \varepsilon a_n\bigr) \to 0$$

kiekvienam fiksuotam $\varepsilon > 0$,

(6) $$\sup_x \left| P\left(\frac{S_n}{a_n} - b_n < x\right) - \Phi(x)\right| \to 0$$

egzistuoja tada ir tik tada, kai egzistuoja konstantų seka c_n $(n = 1, 2, \dots)$ *su sąlygomis*

(7) $$c_n \to \infty,$$

(8) $$\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \geq c_n) \to 0,$$

(9) $$\frac{1}{c_n^2} D_n(c_n) \to \infty.$$

Kai šios sąlygos yra tenkinamos, tai galima imti

$$a_n^2 = D_n(c_n), \qquad (10)$$
$$b_n = \frac{1}{a_n} M_n(c_n).$$

Į r o d y m a s . B ū t i n u m a s . Tarkime, kad egzistuoja sekos $a_n > 0$ ir b_n, tenkinančios (5) ir (6) sąlygas. Iš 1.2 lemos išplaukia

$$a_n \to \infty, \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1.$$

Iš 1 teoremos ir pastabos prie jos išplaukia, kad teisingos (1) ir (4) sąlygos. Parodysime, kad egzistuoja seka teigiamų skaičių ε_n su sąlygomis $\varepsilon_n \to 0, \ \varepsilon_n a_n \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \geq \varepsilon a_n) \to 0,$$
$$\frac{1}{a_n^2 D(\varepsilon_n a_n)} \to 1.$$

Tačiau tai išplaukia iš lemos. Dabar pakanka paimti $c_n = \varepsilon_n a_n$. Gauname, kad $c_n \to \infty$ ir teisingos (7) bei (8) sąlygos.

P a k a n k a m u m a s . Tarkime, kad egzistuoja neaprėžtai didėjanti seka c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ su sąlygomis (8) ir (9). Apibrėžkime a_n (10) lygybe. Iš (9) išplaukia $c_n = o(a_n)$. Todėl kiekvienam fiksuotam $\varepsilon > 0$ ir visiems pakankamai dideliems n teisinga nelygybė

$$\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \geq c_n) \geq \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \geq \varepsilon a_n).$$

Iš (8) gauname

$$\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \geq \varepsilon a_n) \to 0$$

kiekvienam fiksuotam $\varepsilon > 0$.

Kai n yra pakankamai didelis, tai $c_n < \varepsilon a_n$. Tada

$$D_n(\varepsilon a_n) - D_n(c_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{c_n \le |x| < \varepsilon a_n} x^2 dF_k(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon a_n} x dF_k(x) \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{|x|<c_n} x dF_k(x) \right)^2 \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{c_n \le |x| < \varepsilon a_n} x^2 dF_k(x) - \right.$$

$$\left. - \left(\int_{|x|<\varepsilon a_n} x dF_k(x) + \int_{|x|<c_n} x dF_k(x) \right) \cdot \int_{c_n \le |x| < \varepsilon a_n} x dF_k(x) \right\} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left\{ \varepsilon^2 a_n^2 \int_{|x| \ge c_n} dF_k(x) + \right.$$

$$\left. + 2 \int_{|x|<\varepsilon a_n} |x| dF_k(x) \cdot \left| \int_{c_n \le |x| < \varepsilon a_n} x dF_k(x) \right| \right\} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left\{ \varepsilon^2 a_n^2 \int_{|x| \ge c_n} dF_k(x) + 2\varepsilon a_n \cdot \varepsilon a_n \int_{|x| \ge c_n} dF_k(x) \right\} =$$

$$= 3\varepsilon^2 a_n^2 \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \ge c_n} dF_k(x) = o(a_n^2),$$

kai $n \to \infty$. Todėl

$$\frac{1}{a_n^2} D_n(\varepsilon a_n) = \frac{1}{a_n^2} D_n(c_n) + \frac{1}{a_n^2} \Big(D_n(\varepsilon a_n) - D_n(c_n) \Big) = 1 + o(1)$$

kiekvienam $\varepsilon > 0$, kai $n \to \infty$. Teoremos teiginys išplaukia iš III.5.4 teoremos, jei $X_{nk} = X_k / a_n$. $\square$

3 teorema. *Tarkime, kad dydžiai X_k turi dispersijas. Pažymėkime $DX_k = \sigma_k^2$, $MX_k = \alpha_k$, $B_n = (\sigma_1^2 + \ldots \sigma_n^2)^{1/2}$. Sakykime, $B_n > 0$ (vadinasi, bent vienas iš X_k, $k \leq n$, yra neišsigimęs). Atsitiktinių dydžių normuotos sumos*

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \alpha_k) \tag{11}$$

pasiskirstymo funkcija konverguoja į standartinį normalųjį dėsnį Φ ir

$$\frac{1}{B_n^2} \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2 \to 0 \tag{12}$$

tada ir tik tada, kai kiekvienam fiksuotam $\varepsilon > 0$

$$\Lambda_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-\alpha_k| \geq \varepsilon B_n} (x - \alpha_k)^2 dF_k(x) \to 0$$

(Lindebergo sąlyga).

P a s t a b a . Palyginkite su I.5.2 teorema.

Į r o d y m a s . Galime laikyti $\alpha_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, nes priešingu atveju galėtume tirti atsitiktinius dydžius $X_k - \alpha_k$.

B ū t i n u m a s . Tarkime, kad (11) normuotų sumų dėsniai konverguoja į standartinį normalųjį dėsnį ir teisinga (12) sąlyga. Iš Čebyšovo-Bjenemė nelygybės gauname

$$\max_{1 \leq k \leq n} P(|X_k| \geq \varepsilon B_n) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\sigma_k^2}{\varepsilon^2 B_n^2} \to 0.$$

Vadinasi, yra tenkinama nykstamumo sąlyga. Iš 1 teoremos ir pastabos prie teoremos įrodymo gauname

$$\frac{D_n(\varepsilon B_n)}{B_n^2} \to 1.$$

Atėmę šį reiškinį iš 1, turime

$$\Lambda_n(\varepsilon) \to 0.$$

P a k a n k a m u m a s . Kai $1 \le k \le n$,

$$\sigma_k^2 = \int_{|x|<\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) + \int_{|x|\ge\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) \le$$

$$\le \varepsilon^2 B_n^2 + \Lambda_n(\varepsilon) B_n^2.$$

Todėl

$$\frac{1}{B_n^2} \max_{1\le k\le n} \sigma_k^2 \le \varepsilon^2 + \Lambda_n(\varepsilon).$$

Iš čia išplaukia (12). Tada

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\ge\varepsilon B_n} dF_k(x) \le \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \sum_{k=1} \int_{|x|\ge\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) = \frac{\Lambda_n(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \to 0,$$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<B_n} x^2 dF_k(x) = \frac{1}{B_n^2}\left(B_n^2 - \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\ge B_n} x^2 dF_k(x) \right) =$$

$$= 1 - \Lambda_n(1) \to 1,$$

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1} \left| \int_{|x|<B_n} x dF_k(x) \right| = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{|x|\ge B_n} x dF_k(x) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\ge B_n} x^2 dF_k(x) = \Lambda_n(1) \to 0.$$

Vadinasi, yra tenkinamos 1 teoremos sąlygos. Todėl (11) sumų pasiskirstymo funkcijos konverguoja į Φ. $\square$