TIKIMYBIŲ TEORIJOS PASKAITOS

Mindaugas Bloznelis

Mokymo priemonė

VU Matematinės informatikos katedros aprobuota 2005 m. Spalio 28 d.
Recenzentai: prof. A. Račkauskas, doc. A. Plikusas

Matematikos ir Informatikos fakulteto Tarybos rekomenduota leidybai 2005 m. Lapkričio 15 d.

TURINYS

Įvadas

1. Dažnai atsiduriame situacijose, kuomet turime priimti vienokį ar kitokį sprendimą, o informacijos apie aplinkybes trūksta. Tuomet, norėdami įvertinti sprendimo pasekmes, turime gretinti įvairias galimybes. Atsižvelgę į jų šansus ir svarbą, vienaip ar kitaip nusprendžiame. Taigi, susiduriame su atsitiktinių, ar mums nežinomų, įvykių galimybių analize. Paprastas pavyzdys galėtų būti toks: kišenėje 1 litas, o greta jaunas giminaitis, kuriam labai reikia ledų. Artėjam prie ledų pardavėjo, kuris turi keletą rūšių ir skirtingų kainų ledų. Ar galiu mažajam giminaičiui pažadėti ledų - jam jau dabar, nepriėjus iki pardavėjo, šis klausimas labai svarbus? Taigi, turiu įvertinti šansus, ar pardavėjas turės ledų, kurių kaina neviršija 1 lito. Sprendimą galiu paremti turima patirtimi apie įvarias ledų kainas. Pvz, jei žinau, kad 7 pardavėjai iš 10 turi ledų nebrangesnių už litą, tai galiu pasikliauti laimingu atsitiktinumu (daug šansų, kad pinigų pakaks) ir suteikti daug vilčių savo giminaičiui. Tačiau, tai tik spėjimas. Tuo tarpu ledų pardavėjui kainos yra žinomos, jis turi pilną informaciją ir nėra jokio reikalo spėlioti.

Vertindami ir lygindami įvairių ivykių šansus, mes sakome, kad vieni įvykiai turi daugiau šansų, kiti mažiau. Žodžiai "daugiau" ar "mažiau" yra skirti kiekiams lyginti, t.y., kiekiams, kurie atitinka skaičius. Lygindami įvairių įvykių šansus mes nejučiomis operuojame su jais, kaip su skaičiais: didesnes galimybes atitinka didesni skaičiai. Sakome, vieno įvykio tikimybė yra didesnė nei kito. Susieję įvykių tikimybes su skaičiais, atsiduriame matematikos mokslo srityje, t.y., nuo šiol įvykių tikimybėms tirti galėsime vartoti matematinę kalbą. Pasirodo, kad egzistuoja universalūs dėsningumai, kuriems paklūsta daugelis reiškinių, kuriuos vadiname atsitiktiniais. Šiuos dėsningumus tiria tikimybių teorija, nesvarbu, kur jie atsiskleidžia: demografijoje, draudimo uždaviniuose, genetikoje, dujų kinetinėje teorijoje, kvantų mechanikoje, ekonomikoje, informatikoje ir kt.

2. Tikimybių teorijos gimimas siejamas su dviejų iškilių prancūzų: Blezo Paskalio (1623-1662) ir Pjero Ferma (1601-1665) vardais. Yra išlikę keletas jų laiškų, kuriuose gvildenami lošimo kauliukais (šešios akutės) uždaviniai. Paskalis mini, kad uždavinius jam pateikė ponas De Mere. Mokslo istorijoje šie uždaviniai ir jų sprendimas ženklina naujo mokslo pradžią.

1. Porą kauliukų metame K kartų. Nagrinėjame du galimus variantus: (a) bent vieną kartą iškrito šešetukų pora; (b) nė karto neiškrito šešetukų pora. Kokį mažiausią metimų skaičių K atlikus, variantas (a) turi daugiau šansų nei (b)?

2. Du žaidėjai į žaidimo banką įneša po 32 pistolius. Pirmasis laimėjęs tris partijas pasiima iš banko 64 pistolius. Kaip pasidalinti banką, jei tenka žaidimą nutraukti nespėjus nei vienam išlošti trijų partijų?

Paskalis ir Ferma išsprendė šiuos uždavinius, nesinaudodami tikimybės sąvoka, nes jos dar nebuvo.

Tikimybės (atsitiktinio įvykio galimybės skaitinės išraiškos) sąvoka gimė po pirmųjų statistinių tyrimų. Tai buvo demografiniai tyrimai, anuo metu vadinti "politine aritmetika". Džonas Grauntas (1620-1675) norėjo nustatyti Londono gyventojų amžiaus struktūrą. Aišku, visų gyventojų suskaičiuoti jam nebūtų pavykę (įsivaizduokite tų laikų didmiestį su rūmais ir lūšnomis, kuomet apie piliečio pasą ar asmens kodą nebuvo sapnuota). Todėl jis griebėsi (gal vienintelio) pasiekiamo informacijos šaltinio: mirčių registro (nusikalstamumą reikia kontroliuoti, o žmogaus mirtis buvo svarbus įvykis). Surinkęs Londono gyventojų mirčių duomenis (229250 per 20 metų) jis skaičiavo įvairių amžiaus grupių dalį. Pavyzdžiui, vaikų (iki 6 metų) mirčių buvo registruota 71124. Jis pateikė skaičių: santykinį dažnį $71124/229250 \approx 1/3$, kuris gali būti panaudotas nustatant kokią dalį Londono gyventojų sudaro tokio amžiaus vaikai. Tiesa, duomenys apie Londono mirusiųjų amžių nebuvo tikslūs (kaip įvertinti amžių žmogaus, kurio artimieji neraštingi ir pan.). Be to, miesto populiacija sparčiai kito ir pritaikytas metodas nebuvo adekvatus. Ieškodamas tikslių duomenų, kuriuos garantuotų griežta registracija, bei miesto su menka gyventojų migracija (kad išvados, paremtos mirčių registru, tikrai atskleistų populiacijos struktūrą), kitas anglų mokslininkas Edmundas Halis (1656-1742) vietoj Londono pasirinko Vokietijos miestą Breslau (dabar Vroclavas). Pasinaudodamas Breslau mirčių registro knygomis, jis galėjo nustatyti populiacijos amžiaus struktūrą ir, pvz., amžių, kurio sulaukti yra lygiai tiek pat šansų, kaip ir mirti nesulaukus (dabar vadiname gyvenimo trukmės mediana). Savo tyrimus Halis naudojo pensijų (rentų) dydžiui nustatyti.

Šveicaras Jakobas Bernulis (1654-1705) jau naudoja įvykio tikimybės sąvoką ir susieja ją su statistiniu dažniu. Pvz. Metame kauliuką N kartų ir suskaičiuojame kiek kartų iškrito šešios akys. Pavadinkime gautą skaičių M. Atlikę daugybę kauliuko metimo eksperimentų, pamatytume, kad santykis (statistinis šešiukės dažnis) $M/N \approx 1/6$. Skaičius 1/6 rodo, kiek šansų turi šešiukė iškristi kiekvieno metimo metu (šešiukės pasirodymo tikimybė). Bernulio nustatytas principas dabar vadinamas didžiųjų skaičių dėsniu (fenomenas atsiskleidžia, kai skaičius N yra pakankamai didelis). Atrodo, jo atskleidimas ir tikimybės savokos susiformavimas vyko kartu.

Iš Bernulio rezultatų išplaukia, kad tikrąją tikimybę nustatyti padeda statistinio dažnio skaičiavimas. Paklaidą, mūsų atvejų, $(M/N) - (1/6)$ tyrė De Muavras (1667-1754), Laplasas (1746-1827), Puasonas (1781-1841) ir Gausas (1777-1855). Jie nustatė, kad daugeliu atveju galima stebėti reiškinį, kai paklaida, mūsų atveju skaičiai $((M/N) - (1/6))\sqrt{N}$, paklūsta tam tikram visiškai naujos prigimties dėsningumui. Šį dėsningumą vadiname Gauso tikimybiniu skirstiniu, o reiškinį - centrine ribine teorema.

Tikimybinius skirstinius pradėta naudoti aprašant biologijos, kvantų mechanikos, genetikos ir kt. reiškinius. Nuo Halio laikų tikimybės taikomos draudos matematikoje ir demografijoje. Tikimybių teorija ir statistikos mokslas gimė kartu ir yra artimiausi mokslai.

Mūsų universitete tikimybių skaičiavimo kursą įvedė vilnietis Zigmantas Revkovskis 1831 metų rudenį. Tikimybių teorija suklestėjo Lietuvoje XX amžiaus antrojoje pusėje, profesoriaus Jono Kubiliaus ir jo bendradarbių darbuose. Pasaulyje ši mokslininkų grupė (B. Grigelionis, J. Kubilius, V. Statulevičius ir jų mokiniai) žinoma "Vilniaus tikimybių mokyklos" vardu.

I. TIKIMYBĖ IR JOS SAVYBĖS

1. Kombinatorinės tikimybės

PVZ. 1.1 Žaidimų kauliukas turi 6 sieneles. Ant sienelių pažymėti akučių skaičiai: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Metus kauliuką, galimybės bet kuriam akučių skaičiui atsiversti yra lygios. Konkretaus skaičiaus atsivertimą vadiname elementariuoju įvykiu. Juos žymime $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$. Atsivertus 3 akutėms, sakome, kad įvyko elementarusis įvykis ω_3. Visų elementariųjų įvykių aibę $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$ vadiname elementariųjų įvykių erdve ir žymime Ω. Kauliuko metimą vadiname statistiniu eksperimentu. Statistinio eksperimento rezultato - iškritusių akučių skaičiaus - nežinome iš anksto. Statistinio eksperimento rezultatas (baigtis) yra elementarusis įvykis. Keletas elementariųjų įvykių sudaro sudėtinį įvykį. Nagrinėkime sudėtinį įvykį

$$A = \{\text{iškritusių akučių skaičius yra lyginis}\}.$$

Įvykį A sudaro elementarieji įvykiai $\omega_2, \omega_4, \omega_6$. Žymime $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Elementarieji įvykiai $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ yra vadinami palankiais įvykiui A.

Santykis

$$\frac{\text{įvykiui} A \text{palankių elementariųjų įvykių skaičius}}{\text{visų elementariųjų įvykių skaičius}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

atspindi įvykio A galimybę (šansus) įvykti. Juo didesnė santykio $\frac{|A|}{|\Omega|}$ reikšmė, tuo daugiau šansų, kad A įvyks. Šį santykį žymime $P(A)$ ir vadiname įvykio A tikimybe. Mūsų nagrinėto įvykio "iškrito lyginis akučių skaičius" tikimybė $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

APB 1.1. Nagrinėkime eksperimentą, kurį atlikus, galimos n skirtingos baigtys $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Aibę $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ vadiname elementariųjų įvykių erdve, o jos elementus - elementariaisiais įvykiais. Bet kurį poaibį $A \subset \Omega$ vadiname įvykiu. Šį poaibį sudarančius elementariuosius įvykius vadiname palankiais įvykiui A. Aišku, kad bet kurių poaibių $A, B \subset \Omega$ sankirta $C = A \cap B$ ir sąjunga $D = A \cup B$ taip pat yra įvykiai (aibės Ω poaibiai). Jei $A \cap B = \emptyset$, tai įvykius A ir B vadiname nesutaikomais. Aibę Ω vadiname būtinuoju įvykiu, o $\emptyset$ yra vadinama negalimu įvykiu. Įvykis $C = \Omega \setminus A$ yra vadinamas priešingu įvykiui A ir yra žymimas $\overline{A}$.

APB 1.2. Klasikine įvykio A tikimybe vadiname įvykiui A palankių elementariųjų įvykių skaičiaus $|A|$ ir visų elementariųjų įvykių skaičiaus $|\Omega|$ santykį. Žymime

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}\,.$$

Iš šio apibrėžimo išplaukia lygybės $P(\Omega) = 1$ ir $P(\emptyset) = 0$.

Klasikinės tikimybės apibrėžimas taikomas tiems statistiniams eksprimentams modeliuoti, kurių visos baigtys yra vienodai tikėtinos.

PVZ 1.2. Kubelio 5 sienos nudažytos juodai ir viena baltai. Mus domina kokios spalvos siena atsivers mestas kubelis. Galimos dvi baigtys ω_1-"atsivertė juoda siena" ir ω_2-"atsivertė balta siena". Šio statistinio eksperimento rezultatus aprašo elementariųjų įvykių erdvė $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Tačiau klasikinio tikimybės apibrėžimo taikyti negalime, nes elementariųjų įvykių šansai nėra lygūs (juoda sienelė turi 5 kartus daugiau šansų atsiversti, nei balta sienelė).

PVZ 1.3. Maiše 40 vienodų rutulių, ant kurių užrašyti skaičiai $1, 2, \ldots, 40$. Nežiūrėdami į skaičius, atsitiktinai traukiame rutulį. Kokia tikimybė, kad ištraukto rutulio skaičius dalosi iš 3?

Statistinio eksperimento modelis yra elementariųjų įvykių erdvė $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{40}\}$. Įvykių tikimybėms skaičiuoti galime taikyti klasikinį tikimybės apibrėžimą, nes visi rutuliai turi vienodus šansus būti ištraukti. Įvykiui A - "rutulio skaičius dalosi iš 3" palankūs yra elementarieji įvykiai $\omega_3, \omega_6, \omega_9, \ldots, \omega_{39}$, t.y., $A = \{\omega_3, \omega_6, \omega_9, \ldots, \omega_{39}\}$. Palankių įvykių skaičius $|A| = 13$. Todėl $P(A) = \dfrac{13}{40}$.

PVZ 1.4. Du kartus metame kauliuką. Kokia tikimybė, kad iškritusių akučių suma yra 8?

Eksperimento rezultatą, kai pirmuoju metimu iškrito $i-$akučių, o antruoju metimu iškrito $j-$akučių, patogu žymėti (i, j). Turime 36 skirtingas poras (i, j), $1 \le i, j \le 6$, kurias vadinsime elementariaisiais įvykiais. Elementariųjų įvykių aibė $\Omega = \{(i, j),\ 1 \le i, j \le 6\}$. Mus dominantį įvykį A-"iškritusių akučių suma yra 8" sudaro elementarieji įvykiai

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}.$$

Todėl $P(A) = \dfrac{5}{36}$.

PVZ 1.5. Tris kartus metame kauliuką. Kuri akučių suma labiau tikėtina: 9 ar 10? Šio uždavinio atsakymą žinojo italas Galilėjus dar prieš 1642 m.

Šį kartą eksperimento rezultatas (elementarusis įvykis) yra skaičių trejetas (i, j, k), kur $1 \le i, j, k \le 6$. Elementariųjų įvykių erdvė (visų tokių skaičių trejetų aibė) turi $6^3 = 216$ narių. Nesunkiai suskaičiuojame, kad įvykiui A-"iškritusių akučių suma yra 9"- palankių elementariųjų įvykių yra 25. Įvykiui B-"iškritusių akučių suma yra 10"- palankių elementariųjų įvykių yra 27. Įvykio A tikimybė $P(A) = \dfrac{25}{216}$ yra mažesnė už įvykio B tikimybę $P(B) = \dfrac{27}{216}$.

APB 1.3. Tikimybių sudėties taisyklė. Nagrinėkime kokį nors statistinio eksperimento modelį su elementariųjų įvykių erdve $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Tarsime, kad visų elementariųjų įvykių šansai yra vienodi, t.y., galime taikyti klasikinį tikimybės apibrėžimą. Nagrinėkime nesutaikomų įvykių $A, B \subset \Omega$ sąjungos tikimybę. Kadangi $A \cap B = \emptyset$, tai sąjungos elementų skaičius $|A \cup B| = |A| + |B|$. Todėl

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B). \tag{1.1}$$

Įvykius $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset \Omega$ vadiname poromis nesutaikomais, jei $A_i \cap A_j = \emptyset$ visiems $i \ne j$. Nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybė

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) &= \frac{|A_1 \cup \cdots \cup A_k|}{|\Omega|} = \frac{|A_1| + \cdots + |A_k|}{|\Omega|} \\ &= \frac{|A_1|}{|\Omega|} + \cdots + \frac{|A_k|}{|\Omega|} = P(A_1) + \cdots + P(A_k). \end{aligned} \tag{1.2}$$

PVZ 1.6. Iš 36 kortų malkos atsitiktinai traukiame 3 kortas. Kokia tikimybė, kad tarp ištrauktų kortų bus tik vienas tūzas?

Galime sudaryti statistinio eksperimento modelį tokiu būdu. Laikome, kad kiekvienas kortų trejetas turi vienodas galimybes buti ištrauktas ir todėl yra taikytinas klasikinis tikimybės apibrėžimas. Registruojame ištrauktų 3 kortų aibę. Kiekviena tokia aibė yra elementarusis įvykis. Elementariųjų įvykių skaičius n yra skaičius būdų sudaryti 3 kortų aibę. Tai derinių skaičius $n = \binom{36}{3} = \dfrac{36!}{33!3!}$. Įvykį A-"ištrauktų kortų aibėje yra vienintelis tūzas"-išskaidome į nesutaikomus įvykius $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Čia įvykiai

A_1 -"ištrauktų kortų aibėje yra vienintelis tūzas, jis čirvų";
A_2 -"ištrauktų kortų aibėje yra vienintelis tūzas, jis gilių";
A_3 -"ištrauktų kortų aibėje yra vienintelis tūzas, jis pikų";
A_4 -"ištrauktų kortų aibėje yra vienintelis tūzas, jis bubnų".

Suskaičiuosime įvykių A_i tikimybes. Įvykiui A_1 palankių baigčių skaičius gali būti suskaičiuotas taip. Atmetę iš kortų malkos keturis tūzus gauname 32 kortų rinkinį. Imame bet kurias dvi šio rinkinio kortas ir prie jų prijungiame čirvų tūzą. Tokiu būdu gauname visus kortų trejetus su vieninteliu čirvų tūzu. Minėtas dvi kortas parinkti turime $\binom{32}{2} = \dfrac{32!}{30!2!}$ variantų. Todėl įvykiui A_1 palankių baigčių (elementariųjų įvykių) skaičius $|A_1| = \binom{32}{2}$. Aišku, tokį patį palankių elementariųjų įvykių skaičių turi ir įvykiai A_2, A_3, A_4. Kadangi įvykiai $A_1, \ldots, A_4$ yra poromis nesutaikomi, tai iš (1.2) formulės gauname

$$P(A) = P(A_1) + \cdots + P(A_4) = 4\,\frac{\binom{32}{2}}{\binom{36}{3}} = \frac{31 \cdot 16}{35 \cdot 17 \cdot 5}\,.$$

APB 1.4. Priešingo įvykio tikimybė Nagrinėkime kokį nors statistinio eksperimento modelį su elementariųjų įvykių erdve $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Tarsime, kad visų elementariųjų įvykių šsansai yra vienodi, t.y., galime taikyti klasikinį tikimybės apibrėžimą. Nagrinėkime įvykį $A \subset \Omega$ ir jam priešingą įvykį $\overline{A} = \Omega \setminus A$. Šie įvykiai yra nesutaikomi ir todėl iš (1.1) formulės išplaukia $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Kadangi $A \cup \overline{A} = \Omega$, tai $P(A \cup \overline{A}) = 1$. Iš čia gauname priešingo įvykio tikimybės formulę

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}). \tag{1.3}$$

PVZ 1.7. Iš 36 kortų malkos traukiame 3 kortas. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus bent vienas tūzas?

Naudosime tą patį statistinio eksperimento modelį, kaip ir **PVZ 1.6.** Pažymėkime įvykį A-"tarp 3 ištrauktų kortų yra bent vienas tūzas" ir jam priešingą įvykį $\overline{A}$-"tarp 3 ištrauktų kortų tūzų nėra". Įvykiui $\overline{A}$ palankūs tie kortų trejetai, kuriuose nėra nei vieno tūzo. Išmetę iš kortų malkos 4 tūzus ir sudarę bet kokį trijų kortų rinkinį iš likusių 32 kortų aibės, gauname kortų trejetą, palankų įvykiui $\overline{A}$. Matome, kad įvykis $\overline{A}$ turi $\binom{32}{3}$ palankius trejetus. Todėl

$$P(\overline{A}) = \frac{\binom{32}{3}}{n} = \frac{\binom{32}{3}}{\binom{36}{3}} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{36 \cdot 35 \cdot 34}\,.$$

Mus dominančiai tikimybei gauti taikome (1.3) formulę

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{36 \cdot 35 \cdot 34}\,.$$

PVZ 1.8. *Hipergeometrinės tikimybės.* Gaminių partiją sudaro N vienetų. Dalis gaminių yra netinkami vartoti. Norime įvertinti nežinomą blogų gaminių skaičių.

Pažymėkime jį M. Patikrinti visus gaminius negalime, nes tai per daug resursų reikalaujanti procedūra. Atsitiktinai parenkame n gaminių grupę tikrinimui taip, kad visi partijos gaminiai turi vienodus šansus būti išrinktais į tikrinimo grupę. Tarp n grupės gaminių radome m netinkamų. Ką galime pasakyti apie skaičių M?

Pradžioje nagrinėkime klausimą kokia yra įvykio A_m-"tarp n atsitiktinai parinktų gaminių pasitaikė m blogų"- tikimybė. Sudarome statistinio eksperimento modelį, kurio elementariosios baigtys yra visi galimi gaminių rinkiniai po n vienetų. Elementariųjų įvykių aibė turi $\binom{N}{n}$ elementų. Įvykiui A_m palankius elementariuosius įvykius atitinka tie rinkiniai po n elementų, kuriuose lygiai m gaminių yra blogi. Palankų rinkinį galime išskaidyti į dvi dalis: $n - m$ gerų gaminių ir m blogų gaminių. Pirma dalį galime sudaryti $\binom{N-M}{n-m}$ būdų. Tiek yra būdų sudaryti $n-m$ gaminių grupę iš gerosios gaminių partijos dalies, turinčios $N-M$ gaminių. Antrą dalį galime sudaryti $\binom{M}{m}$ būdų. Tiek yra būdų sudaryti m gaminių grupę iš blogųjų partijos gaminių aibės, turinčios M elementų. Todėl palankų rinkinį sudaryti turime $\binom{N-M}{n-m} \times \binom{M}{m}$ galimybių. Pritaikę klasikinį tikimybės apibrėžimą, gauname

$$P(A_m) = \frac{\binom{N-M}{n-m} \times \binom{M}{m}}{\binom{N}{n}}. \tag{1.4}$$

Šios tikimybės yra vadinamos hipergeometrinėmis.

Norėdami įvertinti blogų partijos gaminių skaičių M galime samprotauti taip. Visų pirma kai kurias M reikšmes (pvz. $M < m$ ir $M > N-n+m$) atmetame, nes jos yra nesuderinamos su eksperimento rezultatais (tikrintos grupės blogų gaminių skaičium m). Likusios įvairios M reikšmės atitinka įvairias tikimybės $P(A_m)$ reikšmes. Kurias M reikšmes galėtume laikyti labiau tikėtinomis? Kadangi daugiau šansų įvykti turi tie įvykiai, kurių tikimybės didesnės, renkamės tą statistinį modelį, kuriam tikimybė $P(A_m)$ yra didžiausia. T.y., tarp skaičiu M pasirenkame tą, kuriam santykis $\frac{\binom{N-M}{n-m} \times \binom{M}{m}}{\binom{N}{n}}$ yra didžiausias.

Pastaba. Šis skaičiaus M parinkimo motyvas (vad. maksimalaus tikėtinumo metodas) yra "sveiko proto argumentas". Tai nėra nustatyto matematinio dėsningumo (kaip pvz. Niutono traukos dėsnio ar pan.) taikymas. Matematinis metodas leidžia vertinti panašaus tipo "masinius" reiškinius: jei tokį, ar panašų, uždavinį spręstume 1000 kartų, tai minėto maksimalaus tikėtinumo metodo taikymas duotų patenkinamai tikslų atsakymą didelį skaičių kartų. Kitas būdas matematiškai "pateisinti" maksimalaus tikėtinumo metodą remiasi prielaida, kad mūsų tiriama partija buvo atsitiktinai pasirinkta iš daugybės įvairių partijų su įvairiais blogų gaminių kiekiais M. Tuomet galime kalbėti apie tikimybę, kad tiriamosios partijos parametras M įgyja vieną ar kitą reikšmę (t.y. buvo pasirinkta vienokia ar kitokia partija) ir vertinti šią tikimybę, pasirėmus tyrimo rezultatu (skaičiaus m reikšme).

Ar visuomet atsakymas (nežinomo skaičiaus M įvertis) yra $N\,\frac{m}{n}$?

2. Geometrinės tikimybės

Klasikinį tikimybės apibrėžimą galime taikyti tik tiems statistiniams eksperimentams, kurių elementariųjų įvykių aibė yra baigtinė, o patys elementarieji įvykiai yra vienodai tikėtini.
Geometrinių tikimybių uždaviniai nagrinėja statistinius eksperimentus, kurių elementariųjų įvykių aibė nėra nei baigtinė nei skaiti.

PVZ 2.1. Turime virvę, kurią kerpame į dvi dalis. Kirpimo taškas parenkamas atsitiktinai ir visi taškai turi vienodas galimybes būti kirpimo taškais. Kokia tikimybė, kad vienas virvės galas bus daugiau nei dvigubai trumpesnis už kitą?

Sprendimas. Mus domina įvykio A-"vienas virvės galas daugiau nei dvigubai trumpesnis už kitą" tikimybė. Elementariųjų įvykių (kirpimo taškų) aibę patogu atvaizduoti intevalu $\Omega = [a, d]$. Pažymėkime taškus b, d, kurie dalija virvę į tris lygias dalis $a- - - - - b- - - - - c- - - - -d$. Elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A, aibę atitinka intervalų junginys $[a, b] \cup [c, d] \subset \Omega$. Ši aibė sudaro 2/3 visų elementarių įvykių aibės. Galime daryti išvadą, kad $P(A) = 2/3$.

APB 2.1. Tarkime, statistinio eksperimento elementariųjų įvykių aibę Ω galima atvaizduoti kreive G_Ω, kurios ilgį L galima apibrėžti. Jei įvykiui $A \subset \Omega$ palankių elementariųjų įvykių aibę galima pavaizduoti kreivės dalimi $G_A \subset G_\Omega$, kurios ilgį L_A galima apibrėžti, tai (geometrine) įvykio A tikimybe vadiname skaičių santykį $\frac{L_A}{L}$. Žymime

$$P(A) = \frac{L_A}{L}\,. \tag{2.1}$$

PVZ 2.2. Tarkime, tiriame telefoninių pokalbių trukmę. Apsiribosime pokalbiais, trunkančiais ne ilgiau, nei 40 minučių. Atsitiktinai pasirenkame telefoninį pokalbį, kurio trukmė pakliūva į intervalą $(0, 40)$. Statistinio eksperimento rezultatą, t.y., atsitiktinai pasirinkto pokalbio trukmės ilgį, galime vaizduoti atkarpos $G_\Omega = (0, 40)$ tašku. Aišku, kad didžioji dauguma tokių pokalbių neviršys 5 ar 10 minučių. Todėl labiau tikėtina, kad pokalbio trukmė (elementarusis įvykis) paklius į atkarpos dalį $(1, 10)$, nei į atkarpos dalį $(30, 40)$. Šiam statistiniam eksperimentui geometrinių tikimybių modelio taikyti negalime, nes įvykio tikimybė nėra proporcinga jį atitinkančios kreives G_L dalies ilgiui.

PVZ 2.3. Du asmenys A ir B sutarė susitikti Katedros aikštėje tarp 1 ir 2 valandos popiet. Sutarė, kad bet kuris atėjęs lauks 20 minučių, bet ne ilgiau nei iki 2 valandos popiet. Pažymėkime t_A ir t_B asmenų A ir B atvykimo į katedros aikštę laiką, $t_A, t_B \in [1,2]$. Tarsime, kad asmenys į Katedros aikštę atvyksta atsitiktinai ir visi variantai $(t_A, t_B):\ t_A, t_B \in [1,2]$ yra vienodai tikėtini. Kokia tikimybė, kad asmenys susitiks?

PIEŠINYS

Sprendimas. Statistinio eksperimento rezultatas (elementarusis įvykis) yra skaičių pora (t_A, t_B). Visų elementariųjų įvykių aibę atitinka kvadratas $D_\Omega = [1,2]\times[1,2]$. Įvykį A-"asmenys susitiko" sudaro tie elementarieji įvykiai (t_A, t_B), kurie tenkina sąlygą $|t_A - t_B| < 1/3$ (20 minučių sudaro trečią dalį valandos). Taigi, įvykį A atitinka srities D_Ω dalis $D_A = \{(t_A, t_B):\ |t_A - t_B| < 1/3,\ t_A, t_B \in [1,2]\}$. Jos plotas sudaro 5/9 srities D_Ω ploto. Todėl galime daryti išvadą, kad $P(A) = 5/9$.

APB 2.2. Tarkime, statistinio eksperimento elementariųjų įvykių aibę Ω galima atvaizduoti plokštumos sritimi D_Ω, kurios plotą Q galima apibrėžti. Jei įvykiui $A \subset \Omega$ palankių elementariųjų įvykių aibę galima pavaizduoti tos srities dalimi $D_A \subset D_\Omega$, kurios plotą Q_A galima apibrėžti, tai (geometrine) įvykio A tikimybe vadiname plotų santykį $\dfrac{Q_A}{Q}$. Žymime

$$P(A) = \frac{Q_A}{Q}. \tag{2.2}$$

Panašiai, kai statistinio eksperimento rezultatus vaizduojame trimatės erdvės taškais, geometrines įvykių tikimybes atitinka tūrių santykiai.

PVZ 2.4. Duotas kvadratinis trinaris $x^2 + px + q = 0$. Koeficientus p ir q parenkame atsitiktinai intervale $(0,1)$. Kokia tikimybė, kad trinario šaknys bus realiosios?

Sprendimas. Laikome, kad skaičių pora (p,q) gali užimti bet kurį kvadrato

$$(0,1)\times(0,1) = \{(p,q):\ p,q \in (0,1)\}$$

tašką ir visi taškai yra vienodai tikėtini. Tuomet elementariųjų įvykių aibę galime vaizduoti plokštumos sritimi $D_\Omega = (0,1)\times(0,1)$.

Įvykį A-"trinario šaknys realiosios" atitinka tos poros (p,q), kurioms yra teisinga nelygybė $p^2 \geq 4q$. Todėl įvykį A atitinka sritis

$$D_A = \{(p,q): \ p^2 \geq 4q, \ p,q \in (0,1)\}.$$

PIEŠINYS

Srities D_A plotas

$$Q_A = \int_0^1 \frac{p^2}{4} dp = \frac{p^3}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Geometrinę įvykio A tikimybę randame iš (2.2) formulės

$$P(A) = \frac{Q_A}{Q} = \frac{1}{12}.$$

PVZ 2.5. Biufono uždavinys. Horizontalioje plokštumoje nubrėžiame lygiagrečias tieses, taip, kad atstumas tarp gretimų tiesių būtų $2a$. Adatą, kurios ilgis $2l$ metame ant horizontaliosios plokštumos. Laikome, kad adatos vieta ir orientacija yra atsitiktinės, o jos ilgis yra mažesnis už atstumą tarp tiesių. Kokia tikimybė, kad adata kirs kurią nors tiesę?

Sprendimas. Raide x pažymėkime atstumą tarp adatos vidurio taško ir artimiausios jam tiesės. Kampą tarp adatos krypties ir lygiagrečių tiesių krypties žymime φ. Statistinio eksperimento metu registruojame skaičius x ir φ. Tokio eksperimento baigtį atitinka skaičių pora (x,φ), kur $x \in [0,a]$ ir $\varphi \in (0,\pi]$ (čia mums nesvarbu kurią tiesę kerta adata). Elementariųjų įvykių aibę atitinka plokštumos sritis

$$D_\Omega = \{(x,\varphi): \ x \in [0,a], \ \varphi \in (0,\pi]\}.$$

PIEŠINYS

Įvykį A-"adata kerta (artimiausią) tiesę" atitinka skaičių poros (x, φ), tenkinančios $x \le l \sin\varphi$. Todėl įvykiui A palankių elementariųjų įvykių aibę atitinka plokštumos sritis

$$D_A = \{(x, \varphi) : \; x \le l \sin\varphi, \; x \in [0, a], \; \varphi \in (0, \pi]\}.$$

Srities D_Ω plotas $Q = \pi\, a$, o srities D_A plotas

$$Q_A = \int_0^\pi l \sin\varphi d\varphi = 2\, l.$$

Pritaikę geometrinių tikimybių formulę (2.2) gauname

$$P(A) = \frac{Q_A}{Q} = \frac{2l}{\pi\, a}\,. \tag{2.3}$$

Biufono uždavinys yra atėjęs iš tų laikų, kai skaičius π buvo aktyvių tyrimų objektas. Anuo metu dar nebuvo žinoma, kad tai įracionalusis skaičius ir buvo ieškoma būdų išspręsti kampo trisekcijos uždavinį (braižomosios geometrijos uždavinys: padalinti kampą į tris dalis naudojantis tik skriestuvu ir liniuote). Daug vėliau Karaliaučiaus Albertinos universiteto matematikas Lindemanas nustatė, kad skaičius π nėra racionalusis ir todėl minėto trisekcijos uždavinio išspręsti neįmanoma.

Galime tikėtis, kad pakartoję daugelį kartų (N kartų) eksperimentą su adata ir suskaičiavę baigtis, kuomet adata kerta kurią nors tiesę, gauto tokių baigčių skaičiaus M ir visų ekeprimentų skaičius N santykis M/N būtų artimas įvykio A tikimybei (atspindėtų šio įvykio šansus). J.Kubiliaus vadovėlyje randame tokius įvairiu laiku atliktų bandymų rezultatus

$$\frac{M_1}{N_1} \approx 3.1596, \qquad \frac{M_2}{N_2} \approx 3.155, \qquad \frac{M_3}{N_3} \approx 3.13.$$

PVZ 2.6. Atsitiktinai pasirenkame apskritimo stygą. Kokia tikimybė, jog stygos ilgis yra didesnis už įbrėžto lygiakraščio trikampio kraštinę?

1. Sprendimas. Norint gauti stygą, pakanka nurodyti jos galo taškus a ir b. Atsitiktinai pasirinkę šiuos taškus, gausime atsitiktinai pasirinktą stygą. Pradžioje pasirenkame apskritimo tašką a. Po to renkamės tašką b. Laikysime, kad renkantis taškus tikimybė jog taškas pateks į kurią nors fiksuotą lanko dalį yra proporcinga šios dalies ilgiui. Nesvarbu kur pateko pirmasis taškas a, įvykis, jog gauta styga yra didesnė nei įbrėžto trikampio kraštinė, priklauso tik nuo to kaip toli nuo taško a pateko antrasis taškas b. Šiuo atveju elementarusis įvykis atitinka taško b poziciją apskritimo lanke (taško a atžvilgiu).

Galime taikyti tokį uždavinio modelį. Elementariųjų įvykių erdvę atitinka apskritimo lankas (kreivė) G_Ω. Įvykiui A- "stygos ilgis yra didesnis už įbrėžto lygiakraščio trikampio kraštinę"-palankūs elementarieji įvykiai sudaro apskritimo lanko dalį, į kurią įeina taškai, nutolę nuo a daugiau, nei trečdalis pilnojo lanko. Jie sudaro lanką G_A. Kadangi lanko G_A ilgis yra tris kartus mažesnis už pilno apskritimo lanko G_Ω ilgį, tai geometrinė mus dominančio įvykio tikimybė yra $1/3$, žr. formulę (2.1).

PIEŠINYS

2 Sprendimas. Kadangi stygos ilgis priklauso tik nuo jos atstumo iki apskritimo centro, tai statistinio ekperimento rezultatą -atsitiktinai pasirinktą stygą- atitinka skaičius x, lygus atstumui nuo pasirinktosios stygos iki apskritimo centro. Visos galimos x reikšmės sudaro intervalą $[0, R]$, kur R žymi apskritimo spindulį. Nesunku suskaičiuoti, kad stygos, kurios ilgis didesnis už įbrėžto lygiakraščio trikampio kraštinę, atstumas x iki apskritimo centro tenkina nelygybę $x < R/2$.

PIEŠINYS

Galime taikyti tokį uždavinio modelį. Elementariųjų įvykių erdvę atitinka intervalas $G_\Omega = [0, R]$. Įvykiui A- "stygos ilgis yra didesnis už įbrėžto lygiakraščio trikampio kraštinę"-palankūs elementarieji įvykiai sudaro intervalą $G_A = [0, R/2]$. Kadangi G_A ilgis yra du kartus mažesnis už intervalo G_Ω ilgį, tai geometrinė mus dominančio įvykio tikimybė yra $1/2$, žr. formulę (2.1).

Pastaba. Skirtingi sprendimai atveda prie skirtingų atsakymų. Kur klaida? Matematinės klaidos čia nėra, nes abu sprendimai yra matematiškai korektiški. Pavyzdyje suformuluotas klausimas buvo interpretuotas dviem skirtingais būdais. Buvo sukurti du skirtingi matematiniai modeliai. Todėl buvo išspręsti du skirtingi uždaviniai. Nenuostabu, kad atsakymai skiriasi. Matome, kad tinkamo statistinio modelio (elementariųjų įvykių erdvės, ir kt.) pasirinkimas gali būti rimta problema: ar tikrai pasirinktasis modelis atitinka realų uždavinį. 2.6. pavyzdžio "realus" uždavinys nebuvo tiksliai suformuluotas ir todėl tapo įmanomos skirtingos interpretacijos.

3. Tikimybių teorijos aksiomos

3.1. Aibių algebros ir juose apibrėžti matai

Jau nagrinėtuose statistinių eksperimentų modeliuose eksperimentų baigtis vadinome elementariaisiais įvykiais, žymėjome ω, o visų galimų baigčių (elementariųjų įvykių) aibę žymėjome Ω. Kai kuriuos jos poaibius $A, B \subset \Omega$ vadinome įvykiais. Jei statistinio eksperimento baigtis ω pakliūva į aibę A, tai sakome, kad šio eksperimento metu įvyko įvykis A.

Nagrinėjant sudėtingus praktikos uždavinius, pasirodė, kad nevisuomet pasiseka sukonstruoti tokį statistinio eksperimento modelį, kuriame galime apibrėžti tikimybes $P(A)$ visiems elementarųjų įvykių erdvės Ω poaibiams $A \subset \Omega$, žr. [Dudley]. Todėl dažnai tenka pasirinkti tam tikrą aibės Ω poaibių poklasį $\mathcal{A}$ ir tik aibėms $A \subset \Omega$, kurios yra šio poklasio nariai, $A \in \mathcal{A}$, apibrėžiame tikimybes $P(A)$ (nustatome skaičių $P(A)$ reikšmes).

Pavyzdžiuose, pateiktuose **1** ir **2** paskaitose, susidūrėme su įvykių operacijomis: nagrinėjome įvykių $A, B \subset \Omega$ sąjungą $A \cup B$, sankirtą $A \cap B$, priešingą įvykį $\overline{A}$. Pageidautina, jog panašias operacijas galėtume apibrėžti aibių rinkinio $\mathcal{A}$ elementams, t.y. tų operacijų rezultatai (gauti nauji poaibiai) priklausytų rinkiniui $\mathcal{A}$. Aibių rinkinius, kurie tenkina šias sąlygas vadiname aibių algebromis.

APB 3.1. Imkime bet kokią aibę Ω. Aibės Ω poaibių rinkinį $\mathcal{A}$ vadiname aibių algebra, jei patenkintos tokios sąlygos:
1) $\Omega \in \mathcal{A}$;
2) $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{A}$ ir $A \cap B \in \mathcal{A}$;
3) $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \overline{A} \in \mathcal{A}$.
Čia žymime $\mathcal{A} = \Omega \setminus A$.

PVZ 3.1. Aibių algebrą sudaro Ω poaibių rinkinys $\{\Omega, A, \overline{A}, \emptyset\}$, kur $A \subset \Omega$ yra kuri nors aibė.

PVZ 3.2 Tarkime, kad $\mathcal{A}_0$ yra kokia nors aibės Ω poaibių klasė. Iš šios poaibių klasės sukonstruosime aibių algebrą tokiu būdu: prie $\mathcal{A}_0$ prijungiame aibę Ω ir $\emptyset$ (jei jų ten nebuvo); taip pat prijungiame visų sistemos elementų A papildinius $\overline{A}$. Gautą poaibių sistemą žymėkime $\mathcal{A}_1$. Toliau plečiame poaibių sistemą, įtraukdami visas sąjungas $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ ir sankirtas $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$, bei šių sąjungų ir sankirtų papildinius $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k}$, $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k}$, kur aibės $A_i \in \mathcal{A}_1$ ir $k = 1, 2, \ldots$. Nesunku įsitikinti, kad gauta aibių sistema yra aibių algebra.

PVZ 3.3. Svarbią aibių algebrą sudaro realiųjų skaičių aibės poaibių klasė, gauta aukščiau nurodytu būdu iš intervalų šeimos

$$\mathcal{A}_0 = \{(-\infty, x] : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

PVZ 3.4. Aibių algebrą sudaro visų Ω poaibių rinkinys.

Sudėtingesniems statistiniams eksperimentams modeliuoti prireikia subtilesnių aibių sistemos savybių. Todėl įvedamos aibių $\sigma-$ algebros.

APB 3.2. Aibės Ω poaibių algebrą $\mathcal{A}$ vadiname $\sigma-$algebra (sigma-algebra), jei bet kuri jos elementų seka $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ tenkina sąlygą: aibės $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ ir $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ yra rinkinio $\mathcal{A}$ nariai, t.y.,

$$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}, \qquad \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Aibių sistemai, kuri yra $\sigma-$ algebra, žymėti naudosime raidę $\mathcal{F}$.

3.1 ir **3.4** pavyzdžiuose pateiktos poaibių algebros yra ir $\sigma-$ algebros.

APB 3.3. Aibę Ω su jos poaibių $\sigma-$algebra $\mathcal{F}$ vadiname mačia erdve ir žymime $(\Omega, \mathcal{F})$. $\sigma-$algebros $\mathcal{F}$ elementus vadiname mačiosiomis aibėmis.
Pastaba. Jei turime mačią erdvę $(\Omega, \mathcal{F})$, tai įvedę tikimybinį matą, galėsime skaičiuoti (matuoti) jų tikimybes. Iš čia kilęs pavadinimas "mačios aibės".

Nagrinėkime statistinį eksperimentą, kurio baigčių aibė Ω, o mus dominančių įvykių rinkinį atitinka aibės Ω poaibių $\sigma-$algebra $\mathcal{F}$. Kadangi vieni įvykiai yra labiau tikėtini už kitus, įvedame įvykių tikėtinumo matą $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, kuris įvykiui $A \in \mathcal{F}$ priskiria skaičių $P(A)$. Šį skaičių galėtume interpretuoti, kaip aibės svorį ar reitingą: labiau tikėtini įvykiai turi aukštesnius reitingus, t.y. didesnius skaičius $P(A)$. Tokie objektai, kaip aibių svoriai, sutinkami ne tik statistinių eksperimentų modeliuose, bet ir daugelyje kitų matematikos, fizikos sričių. Todėl patogu kalbėti apie aibių dydžio (svorio) matus apskritai. Kokias savybes jie turėtų tenkinti?

ABP 3.4. Funkciją $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, apibrėžtą aibės Ω poaibių algebroje $\mathcal{A}$, vadiname baigtiniai adityviuoju matu, jei bet kurioms aibėms $A, B \in \mathcal{A}$, neturinčioms bendrų elementų ($A \cap B = \emptyset$), yra teisinga lygybė

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{3.1}$$

Baigtiniai adityvųjį matą μ vadiname $\sigma-$ adityviuoju, jei bet kuriai aibių sekai $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ turinčiai savybę

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \qquad \text{ir} \qquad A_i \cap A_j = \emptyset, \qquad \text{visiems} \qquad i \neq j, \tag{3.2}$$

teisinga lygybė

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{3.3}$$

Tuo atveju, kai bent viena (3.3) lygybės pusė tampa $+\infty$ (arba $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \infty$ arba eilutė $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ diverguoja) laikome, kad ir antrosios pusės reikšmė yra $+\infty$.

Jei $\mu(\Omega) < \infty$, tai $\sigma-$adityvųjį matą vadiname baigtiniu ($\sigma-$ adityviuoju matu). Jei $\mu(\Omega) = 1$, tai $\sigma-$adityvųjį matą vadiname tikimybiniu matu, arba tiesiog tikimybe. Tikimybinius matus žymėsime raide P (vietoj μ).

PVZ 3.5. Realiųjų skaičių aibės $\Omega = \mathbb{R}$ intervalams galime priskirti skaičius - jų ilgius. Gautas matas yra vadinamas Lebego matu, žymimas $\lambda([a, b]) = b - a$. Bet kuriam begaliniam intervalui $(-\infty, x]$ Lebego matas priskiria reikšmę $\lambda\big((-\infty, x]\big) = +\infty$.

APB 3.5. Statistiniams eksperimentams modeliuoti sukuriame matematinį modelį. Pasirenkame elementariųjų baigčių aibę Ω, mus dominančių įvykių rinkinį $\mathcal{F}$ ir atitinkamą tikimybinį matą $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$. Rinkinį $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vadiname *tikimybine erdve.* Čia $\mathcal{F}$ yra aibės Ω poaibių $\sigma-$ algebra.

Skirtingus statistinius eksperimentus atitinka skirtingos tikimybinės erdvės.

PVZ 3.6. Įprastinio šešiasienio kaulelio sienos su lyginiu akučių skaičiumi nuspalvintos baltai, o likusios juodai. Metame kauliuką. Elementariųjų įvykių aibė $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$. Kadangi visos sienelės turi vienodus šansus atsiversti, tai elementariesiems įvykiams priskiriame vienodas tikimybes: $P(\omega_i) = 1/6$ visiems $i = 1, \dots, 6$.

1 eksperimentas. Registruojame iškritusių akučių skaičių. Šį kartą visi elementarieji įvykiai svarbūs. Todėl pirmo eksperimento įvykių $\sigma-$algebrą $\mathcal{F}_1$ sudaro visi Ω poaibiai. Eksperimento modelis yra tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}_1, P)$.

2 eksperimentas. Registruojame iškritusios sienos spalvą. Šį kartą mums svarbu ar iškrito balta spalva (akučių skaičius lyginis) ar juoda (akučių skaičius nelyginis). Todėl antro eksperimento įvykiams aprašyti pakanka $\sigma-$algebros $\mathcal{F}_2 = \big\{\emptyset, \Omega, \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}\big\}$. Eksperimento modelis yra tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}_2, P)$.

PVZ 3.7. Turime baigtinę aibę $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Nagrinėkime aibių rinkinį $\mathcal{F}$, sudarytą iš visų Ω poaibių, ir tikimybinį matą P, kuris aibei $A \subset \Omega$ priskiria tikimybę $P(A)$ proporcingą tos aibės elementų skaičiui. Iš sąlygos $P(A) = 1$ išplaukia lygybė $P(\{\omega_i\}) = n^{-1}$ visiems i. Todėl $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n}$. Tokį tikimybinį matą vadiname tolygiuoju, nes visų elementariųjų įvykių tikimybės $P(\{\omega_i\}) = 1/n$ yra vienodos.

PVZ 3.8. Skaičiai elementariųjų įvykių aibei $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots\}$ tolygiojo tikimybinio mato apibrėžti negalime (jei taip būtų, tai turėtume $P(\{\omega_i\}) = p$ visiems i ir todėl gautume $P(\Omega) = \sum_{i=0}^{\infty} p = +\infty$). Šiuo atveju pasirenkame neneigiamų skaičių seką $\{p_n\}$, tenkinančią $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$, ir apibrėžiame $P(\{\omega_i\}) = p_i$. Tuomet bet kuriai aibei $A \subset \Omega$ galime apibrėžti tikimybę $P(A) = \sum_{i \in A} p_i$. Šiuo atveju galime nagrinėti tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kur $\mathcal{F}$ yra sudaryta iš visų Ω poaibių.

Du svarbūs tikimybių rinkinių pavyzdžiai:

1) Rinkinys $\{p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda},\ n = 0, 1, 2, \dots\}$, kur $\lambda > 0$ yra fiksuotas parametras, apibrėžia tikimybinį matą, kurį vadiname Puasono matu, žymime $\mathcal{P}(\lambda)$;

2) Rinkinys $\{p_n = p(1-p)^n,\ n = 0, 1, 2, \dots\}$, kur $p \in (0, 1)$ yra fiksuotas parametras, apibrėžia tikimybinį matą, kurį vadiname geometriniu matu.

3.1. Tikimybinio mato savybės

Teiginys 3.1. *Tarkime, P yra baigtiniai adityvusis matas, apibrėžtas aibės Ω poaibių algebroje $\mathcal{A}$. Tuomet teisingi tokie teiginiai.*

1) $P(\emptyset) = 0$;

2) visiems $A, B \in \mathcal{A}$ turime $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

3) visiems $A, B \in \mathcal{A}$, tenkinantiems $A \subset B$, yra teisinga nelygybė $P(A) \le P(B)$;

4) visiems rinkiniams $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$, tenkinantiems $A_i \cap A_j = \emptyset$, kai $i \ne j$, yra teisinga lygybė

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k);$$

5) visiems rinkiniams $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ teisinga nelygybė

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \le P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k);$$

6) Tarkime, P yra $\sigma-$adityvusis matas. Jei aibių seka $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ yra tokia, kad $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, tai teisinga nelygybė

$$P\big(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Įrodymas. 1) teiginys išplaukia iš mato savybės (3.1) ir aibių lygybių $\Omega \cup \emptyset = \Omega$ ir $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$,

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) \;\Rightarrow\; P(\emptyset) = 0.$$

Įrodome 2). Kadangi aibės $A \cap B$ ir $B \setminus A$ neturi bendrų taškų, tai iš aibių lygybės $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ ir (3.1) gauname

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \setminus A). \tag{3.4}$$

Kadangi aibės A ir $B \setminus A$ neturi bendrų taškų, tai iš aibių lygybės $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ ir (3.1) gauname

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Įstatę į šią lygybę skaičiaus $P(B \setminus A)$ reikšmę $P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$ iš (3.4), gauname lygybę $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Įrodome 3) teiginį. Pažymėję $C = B \setminus A$, iš aibių lygybės $C \cup A = B$ ir (3.1) gauname $P(A) + P(C) = P(B)$. Kadangi P reikšmės gali būti tik neneigiamos, tai $P(C) \geq 0$. Darome išvadą, kad $P(B) \geq P(A)$.

Įrodome 4) teiginį. Kai $k = 2$ teiginys išplaukia iš (3.1). Kai $k = 3$ užrašome $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$. Kadangi aibės $A_1 \cup A_2$ ir A_3 neturi bendrų taškų, tai iš (3.1) išplaukia lygybė

$$P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3).$$

Pritaikę lygybę $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ (teiginys teisingas, kai $k = 2$), gauname

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Toliau taikome matematinę indukciją. Kadangi aibės $\cup_{i=1}^{k} A_i$ ir A_{k+1} neturi bendrų taškų, tai iš (3.1) gauname

$$P\big(\cup_{i=1}^{k+1} A_i\big) = P\big((\cup_{i=1}^{k} A_i) \cup A_{k+1}\big) = P\big(\cup_{i=1}^{k} A_i\big) + P(A_{k+1}).$$

Įstatę lygybę (indukcinė prielaida)

$$P\big(\cup_{i=1}^{k} A_i\big) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i),$$

gauname

$$P\big(\cup_{i=1}^{k+1} A_i\big) = \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i).$$

Įrodome 5) teiginį. Nagrinėkime aibes

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \backslash A_1, \quad B_3 = A_3 \backslash (A_1 \cup A_2), \quad ..., \quad B_k = A_k \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}).$$

Šios aibės neturi bendrų taškų ($B_1 \cap B_j = \emptyset$, kai $i \neq j$) ir $\cup_{i=1}^{k} B_i = \cup_{i=1}^{k} A_i$. Todėl iš 4) teiginio išplaukia lygybė

$$P(\cup_{i=1}^{k} A_i) = P(\cup_{i=1}^{k} B_i) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i). \tag{3.5}$$

Kadangi $B_i \subset A_i$ visiems i, tai iš 3) teiginio turime $P(B_i) \leq P(A_i)$. Todėl dešinė (3.5) lygybės pusė yra ne didesnė už sumą $\sum_{i=1}^{k} P(A_i)$.

Įrodome 6) teiginį. Nagrinėkime aibes B_k. Kadangi $B_i \cap B_j = \emptyset$, kai $i \neq j$, tai iš (3.3) formulės išplaukia lygybė

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i).$$

Kadangi aibės $\cup_{i=1}^{\infty} B_i$ ir $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ yra lygios ir $B_i \subset A_i$ visiems i, tai

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Įrodymas baigtas.

Matematikoje kertinį vaidmenį vaidina funkcijos tolydumo sąvoka. Kadangi tikimybinis matas P taip pat yra atvaizdis (aibėms priskiriantis skaičius), tai yra prasminga nagrinėti jo tolydumą. Yra keletas būdų apibrėžti mato tolydumą. Čia nagrinėjamos tolydumo sąvokos yra labai tampriai susietos su mato $\sigma-$adityvumo savybe (3.3).

APB 3.6. Tarkime, kad P yra baigtiniai adityvusis matas, apibrėžtas aibės Ω poaibių algebroje $\mathcal{A}$.

1) P vadiname tolydžiuoju "iš apačios", jei bet kuriai rinkinio $\mathcal{A}$ elementų sekai $A_1, A_2, \dots$ tokiai, kad

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \qquad \text{ir} \qquad \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \tag{3.6}$$

tikimybių seka $\{P(A_i)\}$ turi ribą ir

$$\lim_{i\to\infty} P(A_i) = P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i). \tag{3.7}$$

2) P vadiname tolydžiuoju "iš viršaus", jei bet kuriai rinkinio $\mathcal{A}$ elementų sekai $A_1, A_2, \dots$ tokiai, kad

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \qquad \text{ir} \qquad \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \tag{3.8}$$

tikimybių seka $\{P(A_i)\}$ turi ribą ir

$$\lim_{i\to\infty} P(A_i) = P(\cap_{i=1}^{\infty} A_i). \tag{3.9}$$

3) P vadiname tolydžiuoju "nulyje", jei bet kuriai rinkinio $\mathcal{A}$ elementų sekai $A_1, A_2, \dots$ tokiai, kad

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \qquad \text{ir} \qquad \cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \tag{3.10}$$

tikimybių seka $\{P(A_i)\}$ turi ribą ir

$$\lim_{i\to\infty} P(A_i) = 0. \tag{3.11}$$

PIEŠINIAI APIBRĖŽIMAMS ILIUSTRUOTI

Teorema 3.2. *Baigtiniai adityviajam matui P, apibrėžtam aibės Ω poaibių algebroje $\mathcal{A}$, ir tenkinančiam $P(\Omega) < \infty$, teiginiai yra ekvivalentūs:*
1) P yra $\sigma-$ adityvusis matas, t.y., tenkina (3.3) sąlygą;
2) P yra tolydusis "iš apačios";
3) P yra tolydusis "iš viršaus";
4) P yra tolydusis "nulyje".

Įrodymas. 1)$\Rightarrow$2). Remiantis 1) teiginiu reikia įrodyti (3.7) lygybę bet kuriai rinkinio $\mathcal{A}$ elementų sekai, tenkinančiai (3.6). Fiksuokime tokią seką ir pažymėkime

$B_1 = A_1$ ir $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, kai $n > 1$. Kadangi $B_i \cap B_j = \emptyset$ visiems $i \neq j$ ir $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$, tai iš 3.1 teiginio išplaukia lygybė

$$P(A_n) = P(B_1) + \dots + P(B_n). \tag{3.12}$$

Iš lygybės $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ ir 1) sąlygos (teigiančios, kad matas P tenkina (3.3)) gauname

$$P\big(\cup_{i=1}^{\infty} B_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i). \tag{3.13}$$

Kadangi kairė pusė lygi $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$, o dešinė lygi, žr. (3.12),

$$\lim_n \sum_{i=1}^{n} P(B_n) = \lim_n P(A_n),$$

tai iš (3.13) išplaukia (3.7).

2)⇒3). Fiksuokime seką $A_1, A_2, \dots,$ tenkinančią (3.8). Pažymėkime $B_1 = \emptyset$ ir $B_n = A_1 \setminus A_n$, kai $n > 1$. Aibių seka $B_1, B_2, \dots$ tenkina sąlygą (3.6), nes iš (3.8) išplaukia $B_i \subset B_{i+1}$ visiems $i = 1, 2, \dots$ ir

$$\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \cup_{i=1}^{\infty} \big(A_1 \setminus A_i\big) = A_1 \setminus \big(\cap_{i=1}^{\infty} A_i\big) \in \mathcal{A}.$$

Čia naudojamės tuo faktu, kad algebros $\mathcal{A}$ elemento papildinys vėl yra algebros $\mathcal{A}$ elementas. Pritaikę 2) teiginį aibių sekai $\{B_n\}$, gauname

$$\lim_n P(B_n) = P\big(\cup_{i=1}^{\infty} B_i\big). \tag{3.14}$$

Kadangi $P(B_n) = P(A_1 \setminus A_n) = P(A_1) - P(A_n)$ ir

$$P\big(\cup_{i=1}^{\infty} B_i\big) = P\big(A_1 \setminus \cap_{i=1}^{\infty} A_i\big) = P(A_1) - P\big(\cap_{i=1}^{\infty} A_i\big),$$

tai iš (3.14) išplaukia (3.9) lygybė.

3)⇒4) akivaizdu.

4)⇒1) Fiksuokime aibių rinkinį $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, tenkinantį (3.2). Įrodysime, kad:
(i) eilutė $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ konverguoja;
(ii) konverguojančios eilutės riba yra $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$, t.y., $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$;
Eilutė $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ konverguoja, kai konverguoja jos dalinių sumų seka $S_k = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$. Kadangi $\cup_{i=1}^{k} A_i \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, tai iš 3.1 teiginio 3) ir 4) punktų išplaukia

$$S_k = P(\cup_{i=1}^{k} A_i) \leq P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq P(\Omega) < \infty.$$

Taigi, seka $\{S_k\}$ yra aprėžta. Aišku, kad seka $\{S_k\}$ yra monotoniškai nemažėjanti. Kiekviena nemažėjanti ir aprėžta iš viršaus seka konverguoja. Taigi, (i) teiginys yra teisingas.

Kokia yra sekos $\{S_k\}$ riba? Nagrinėkime aibes $B_n = \cup_{i=n}^{\infty} A_i$. Kadangi

$$B_{n+1} \cup \big(\cup_{i=1}^{n} A_i\big) = \cup_{i=1}^{\infty} A_i, \qquad \text{ir} \qquad B_{n+1} \cap \big(\cup_{i=1}^{n} A_i\big) = \emptyset,$$

(paskutinė lygybė išplaukia iš sąlygos $A_i \cap A_j = \emptyset$, kai $i \neq j$) tai

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(B_{n+1}) + P\big(\cup_{i=1}^{n} A_i\big). \tag{3.15}$$

Jei įrodytume, kad skaičių seka $\{P(B_n)\}$ turi ribą ir

$$\lim_{n} P(B_n) = 0, \tag{3.16}$$

tai iš (3.15) lygybės išplauktų, kad $\lim_n P\big(\cup_{i=1}^{n} A_i\big) = P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$. Tuomet pasinaudoję lygybe $P\big(\cup_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, kuri išplaukia iš sąlygos $A_i \cap A_j = \emptyset$, kai $i \neq j$, gautume (ii) teiginį.

Lieka įrodyti (3.16). Aibių seka $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \cdots$ tenkina $\cap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$. Pritaikę 4) teiginį aibių sekai $\{B_n\}$, gauname (3.16).

Lygybę $\cap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$ nesunku įrodyti: $\omega \in \cap_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow \omega \in B_1 \Rightarrow \omega \in A_j$ kuriam nors $A_j \Rightarrow \omega \notin A_i$, kai $i \neq j$, nes $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \omega \notin B_n$, kai $n > j \Rightarrow \omega \notin \cap_{i=1}^{\infty} B_i$).

Įrodymas baigtas.

3.3. Įdėties - pašalinimo (rėčio) principas ir Bonferoni nelygybės

Šiame skyrelyje nagrinėsime tikimybinį matą P, apibrėžtą aibės Ω poaibių algebroje $\mathcal{A}$.

Tikimybių uždaviniuose kartais tenka skaičiuoti įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sąjungos tikimybę, t.y. tikimybę, kad įvyks bent vienas iš įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Jei įvykiai yra nesutaikomi ($A_i \cap A_j = \emptyset$, kai $i \neq j$), tai sąjungos tikimybė, žr. 3.1 teiginio 4) punktą,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

Jei įvykiai nėra nesutaikomi, ši lygybė gali būti ir neteisinga. Ją reikia koreguoti. Pvz., kai turime tik du įvykius, galime naudotis 3.1 teiginio 1) punkto formule

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{3.17}$$

Didesnio įvykių skaičiaus sąjungos tikimybei skaičiuoti naudoojame rėčio formulę, kuri yra įrodoma 3.3 teoremoje.

Teorema 3.3. *Bet kuriam aibių rinkiniui $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, kur $n \geq 2$, teisinga lygybė*

$$
\begin{aligned}
P\big(\cup_{k=1}^n A_i\big) = & \sum_{\{i_1\}\subset[n]} P(A_{i_1}) - \sum_{\{i_1,i_2\}\subset[n]} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \cdots \\
& + (-1)^{k+1} \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset[n]} P\big(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots\cap A_{i_k}\big) + \cdots \\
& + (-1)^{n+1} P\big(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots\cap A_{i_n}\big).
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Čia naudojame naujus žymenis. Kaip suprasti sumos žymenį $\sum_{\{i_1,i_2\}\subset[n]} P(A_{i_1}\cap A_{i_2})$? Ženklu $\sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset[n]}$ žymime sumą, kai sumuojama pagal visus indeksų rinkinius $\{i_1,\ldots,i_k\}$ po k elementų iš aibės $[n]=\{1,\ldots,n\}$.

Nagrinėkime visas įmanomas rinkinio $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aibių sankirtas $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots\cap A_{i_k}$, kuriose dalyvauja k skirtingų rinkinio elementų. Suskaičiavę jų tikimybes ir gautus skaičius sudėję, gautą sumą žymime $\sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset[n]} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})$. Tuo atveju, kai $k=1$, turime $\sum_{\{i_1\}\subset[n]} P(A_{i_1}) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Įrodymas. Kai $n=2$ lygybė (3.18) sutampa su jau įrodyta lygybe (3.17).

Toliau taikysime indukciją. Tarsime, kad (3.18) lygybė yra teisinga visiems aibių rinkiniams $B_1, B_2, \ldots, B_k \in \mathcal{A}$, kur $k \leq n$. Fiksuokime aibių rinkinį $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$. Jam įrodysime lygybę (3.18).

Iš (3.17) išplaukia lygybė

$$
\begin{aligned}
P\big(\cup_{i=1}^{n+1} A_i\big) &= P\big(\ (\cup_{i=1}^n A_i) \cup A_{n+1}\big) \\
&= P\big(\cup_{i=1}^n A_i\big) + P(A_{n+1}) - P\big(\ (\cup_{i=1}^n A_i)\cap A_{n+1}\big).
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Pažymėkime $B_i = A_i \cap A_{n+1}$ ir pritaikykime formulę (3.18) tikimybėms

$$
L = P\big(\cup_{i=1}^n A_i\big), \qquad M = P\big(\ (\cup_{i=1}^n A_i)\cap A_{n+1}\big) = P(\cup_{i=1}^n B_i).
$$

Kadangi tikimybės atitinka sąjungas po n aibių, tai indukcinė prielaida "leidžia" taikyti (3.18) formulę. Gauname lygybę

$$
\begin{aligned}
M = & \sum_{\{i_1\}\subset[n]} P(B_{i_1}) - \sum_{\{i_1,i_2\}\subset[n]} P(B_{i_1}\cap B_{i_2}) + \ldots \\
& + (-1)^{n+1} P(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n) \\
= & \sum_{\{i_1\}\subset[n]} P(A_{i_1}\cap A_{n+1}) - \sum_{\{i_1,i_2\}\subset[n]} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{n+1}) + \ldots \\
& + (-1)^{n+1} P(A_1\cap A_2\cdots\cap A_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Įstatę į (3.19) formulę gautą M išraišką, taip pat įstatę (3.18) formulę tikimybei L skaičiuoti, gauname

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) = &\sum_{\{i_1\}\subset[n+1]} P(A_{i_1}) - \sum_{\{i_1,i_2\}\subset[n+1]} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \cdots \\ &+ (-1)^{k+1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset[n+1]} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots\cap A_{i_k}) + \cdots \\ &+ (-1)^{n+2} P(A_1\cap A_2\cdots\cap A_{n+1}). \end{aligned}$$

Darome išvadą, kad formulė (3.18) yra teisinga ir rinkiniui $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, turinčiam $n+1$ aibę.
Įrodymas baigtas.

Norėdami tiksliai suskaičiuoti aibių sąjungos tikimybę, galime remtis formule (3.18). Tačiau ši formulė yra sudėtinga, jos taikymas reikalauja žinoti skaičius $\sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset[n]} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots\cap A_{i_k})$ visiems $k = 1, 2, \ldots, n$. Kartais pakanka žinoti apytikslę tikimybės $P(\cup_{i=1}^{n} A_i)$ reikšmę. Apytikslei reikšmei skaičiuoti galime pasinaudoti Bonferoni nelygybėmis, kurios palygina tikimybę $P(\cup_{i=1}^{n} A_i)$ su keletu pirmųjų (3.18) formulės narių suma.
Pažymėkime

$$\begin{aligned} S_k = &\sum_{\{i_1\}\subset[n]} P(A_{i_1}) - \sum_{\{i_1,i_2\}\subset[n]} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \cdots \\ &+ (-1)^{k+1} \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset[n]} P\big(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots\cap A_{i_k}\big), \end{aligned}$$

kur $k \le n$.

Teiginys 3.4. *Tarkime* $1 \le k \le n$. *Jei skaičius* k *yra lyginis, tai* $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \ge S_k$. *Jei skaičius* k *yra nelyginis, tai* $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \le S_k$.

(3.4) teiginio įrodymas remiasi indukcija ir yra labai panašus į 3.3 teoremos įrodymą.

4. Sąlyginės tikimybės ir nepriklausomi įvykiai

4.1. *Sąlyginės tikimybės*

PVZ. 4.1. Metame kauliuką. Žinome, kad iškritusių akučių skaičius yra lyginis, tačiau tikslaus iškritusio skaičiaus nematome. Kokia tikimybė, kad iškritusių akučių skaičius yra nedidesnis nei 5?

Tikimybinis uždavinio modelis: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$ - elementariųjų įvykių erdvė; $\mathcal{F}$- aibės Ω visų poaibių rinkinys; P - tikimybinis matas, $P(\{\omega_i\}) = 1/6$, $1 \le i \le 6$. Įvykis $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ -"iškritusių akučių skaičius lyginis", įvykis $B = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_5\}$ -"iškritusių akučių skaičius neviršija 5".
Mus domina įvykio B tikimybė, jei žinome (papildomai), kad įvyko A. Įvykus įvykiui A, žinome, kad galimos baigtys yra $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Kadangi daugiau informacijos apie eksperimento rezultatą neturime, visos trys baigtys yra vienodai tikėtinos. Tarp jų mums plankūs (t.y., priklausantys aibei B) yra ω_2 ir ω_4. Jie sudaro $2/3$ visų galimų baigčių. Sakome, kad sąlyginė įvykio B tikimybė su sąlyga (kad yra įvykęs įvykis) A yra $2/3$. Žymime $P(B|A) = 2/3$.

Toliau laikysime, kad nagrinėjami įvykiai yra tikimybinės erdvės $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ įvykių $\sigma-$algebros $\mathcal{F}$ elementai.

APB. 4.1. *Tarkime $A, B \in \mathcal{F}$ ir $P(A) > 0$. Įvykio B sąlygine tikimybe su sąlyga A vadiname santykį*
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Komentaras. Skaičius $P(B|A)$ atspindi kokią dalį aibės A sudaro aibės B elementai (= bendri abiems aibėms elementai). Aibių dydžius "matuojame" pasitelkę "svorio" funkciją P.
Pastabos. Teisingos lygybės:

$$P(\Omega|A) = 1, \qquad \text{nes} \quad P(\Omega|A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1,$$

$$P(A|A) = 1, \qquad \text{nes} \quad P(A|A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

Be to teisingos nelygybės $0 \le P(B|A) \le 1$, nes $P(B \cap A) \le P(A)$. Paskutinė nelygybė išplaukia iš aibių sąryšio $B \cap A \subset A$.

Teorema 4.1. *Tarkime, įvykiai $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ yra tokie, kad $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0$. Tuomet teisinga lygybė*
(4.1)
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Įrodymas. Sąlyginės tikimybės dešinėje (4.1) pusėje yra korektiškai apibrėžtos, nes iš sąryšių $A_1 \supset (A_1 \cap A_2) \supset \cdots \supset (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$ išplaukia

$$P(A_1) \ge P(A_1 \cap A_2) \ge \cdots \ge P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0.$$

Kai $n = 2$, iš sąlyginės tikimybės apibrėžimo turime

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1).$$

Lygybės (4.1) įrodymas bet kuriai n reikšmei remiasi indukcija.

Tarę, kad (4.1) teisinga visiems rinkiniams $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{F}$, įrodysime, kad (4.1) teisinga ir bet kuriam rinkiniui $B_1, B_2, \ldots, B_{k+1} \in \mathcal{F}$.

Fiksuokime rinkinį $B_1, B_2, \ldots, B_{k+1} \in \mathcal{F}$ su $P(\cap_{i=1}^{k+1} B_i) > 0$. Pažymėkime $A_1 = B_1 \cap B_2$, $A_2 = B_3$, $A_3 = B_4$, $\ldots$, $A_k = B_{k+1}$. Teisinga lygybė

$$B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k+1} = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k.$$

Todėl

$$P(\cap_{i=1}^{k+1} B_i) = P(\cap_{i=1}^{k} A_i).$$

Pritaikę dešinei pusei formulę (4.1) gauname sandaugą

$$P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}).$$

Įstatę aibes B_i turime

$$P(B_1 \cap B_2)P(B_3|B_1 \cap B_2) \cdots P(B_{k+1}|B_1 \cap B_2 \cdots \cap B_k).$$

Pakeitę pirmą daugiklį į $P(B_1)P(B_2|B_1)$ (sąlyginės tikimybės apibrėžimas) galutinai turime

$$P(\cap_{i=1}^{k+1} B_i) = P(B_1)P(B_2|B_1) \cdots P(B_{k+1}|B_1 \cap B_2 \cdots \cap B_k).$$

Darome išvadą, kad rinkiniui $B_1, B_2, \ldots, B_{k+1}$ formulė (4.1) yra teisinga.

Įrodymas baigtas.

PVZ. 4.2 Piniginėje 40 monetų. Tarp jų 10 padirbtos. Iš eilės traukiame 4 monetas. Traukdami monetą, laikome, kad visos tuo metu piniginėje esančios monetos turi vienodus šansus būti ištrauktos. Kokia tikimybė, kad pirma ištraukta moneta yra tikra, antra netikra, trečia ir ketvirta abi yra tikros?

Sprendimas. Pažymime įvykius: A_1 - pirma moneta tikra, A_2 - antra moneta netikra, A_3 - trečia moneta tikra, A_4 - ketvirta moneta tikra. Mus dominantis įvykis B užrašomas $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ (visi minėti įvykiai kartu paėmus). Turime $P(A_1) = 30/40$. Ištraukus tikrą monetą, lieka 39 monetos, tarp kurių 10 padirbtų. Todėl tikimybė, kad antroji moneta yra netikra, lygi $P(A_2|A_1) = 10/39$. Tikimybė, kad trečioji moneta tikra, žinant, jog pirmoji buvo tikra, o antroji padirbta, yra $P(A_3|A_1 \cap A_2) = 29/38$. Panašiai, tikimybė, kad ketvirtoji moneta tikra, jei primuoju ir trečiuoju traukimu papuolė tikros monetos, o antruoju netikra, yra $P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 28/37$. Pritaikę (4.1) formulę, gauname

$$P(B) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{30}{40}\,\frac{10}{39}\,\frac{29}{38}\,\frac{28}{37}\,.$$

Teorema 4.2 (Pilnosios tikimybės formulė). *Tarkime, įvykiai* $H_1, H_2, \dots \in \mathcal{F}$ *yra tokie, kad* $H_i \cap H_j = \emptyset$ *visiems* $i \neq j$.
(i) Jei rinkinys $H_1, H_2, \dots H_k$ *tenkina nelygybes* $P(H_i) > 0$ *kiekvienam* $i = 1, \dots, k$, *ir* $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k = \Omega$, *tai bet kuriam įvykiui* $A \in \mathcal{F}$ *teisinga lygybė*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(H_i)P(A|H_i). \tag{4.2}$$

(ii) Jei skaitus rinkinys $H_1, H_2, \dots$ *tenkina nelygybes* $P(H_i) > 0$ *kiekvienam* i, *ir* $\cup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$, *tai bet kuriam įvykiui* $A \in \mathcal{F}$ *teisinga lygybė*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i). \tag{4.3}$$

Įrodymas. Iš aibių lygybės

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\cup_{i \geq 1} H_i) = \cup_{i \geq 1}(A \cap H_i)$$

ir tikimybinio mato adityvumo ($\sigma-$ adityvumo) išplaukia

$$P(A) = \sum_{i \geq 1} P(A \cap H_i),$$

nes $(H_i \cap A) \cap (H_j \cap A) = \emptyset$, kai $i \neq j$. Pritaikę sąlyginės tikimybės apibrėžimą $P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A|H_i)$, gauname

$$P(A) = \sum_{i \geq 1} P(H_i)P(A|H_i).$$

Čia $\cup_{i \geq i}$ žymi sąjungą $\cup_{i=1}^{k}$, jei aibių rinkinys baigtinis ir sąjungą $\cup_{i=1}^{\infty}$ skaitaus aibių rinkinio atveju. Panašiai, $\sum_{i \geq 1}$ žymi sumą $\sum_{i=1}^{k}$ jei aibių rinkinys baigtinis ir sumą $\sum_{i=1}^{\infty}$ skaitaus aibių rinkinio atveju.
Įrodymas baigtas.

PVZ 4.3. Turime 5 dėžes su vaisiais. Dvi dėžės turi po 2 obuolius ir kriaušę, kitos dvi dėžės turi po 3 obuolius ir kriaušę. Penktoji dėžė turi 10 kriaušių. Sakysime, kad turime po dvi dėžes pirmosios ir antrosios rūšies ir vieną dėžę trečiosios rūšies. Atsitiktinai parinkę dėžę iš jos atsitiktinai išrinkome vaisių. Kokia tikimybė, kad tai obuolys?

Laikome, kad visos penkios dėžės turi vienodus šansus būti išrinktomis. Traukiant vaisių, visi dėžės vaisiai turi vienodas galimybes būti ištraukti.
Sprendimas.
Pažymėkime įvykius: A_i - "parinkta $i-$tos rūšies dėžė", $i = 1, 2, 3$; B - "ištrauktas vaisius yra obuolys". Įvykių A_i tikimybės $P(A_1) = P(A_2) = 2/5$ ir $P(A_3) = 1/5$. Tikimybė ištraukti obuolį iš pirmos rūšies dėžės yra $P(B|A_1) = 2/3$, tikimybė ištraukti obuolį iš antros rūšies dėžės yra $P(B|A_2) = 3/4$, tikimybė ištraukti obuolį iš trečios rūšies dėžės yra $P(B|A_3) = 0$. Pritaikę (4.2) formulę, rašome

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3) = \frac{2}{3}\,\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\,\frac{2}{5} = \frac{17}{30}.$$

Teiginys 4.3 (Bejeso formulė, Thomas Bayes 1702-1761). *Tarkime, įvykiai $A, B \in \mathcal{F}$ ir $P(A) > 0$, $P(B) > 0$. Tuomet*

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}\, P(A|B). \tag{4.4}$$

Įrodymas. (4.4) formulė išplaukia iš sąlyginės tikimybės apibrėžimo,

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B) = P(B|A)P(A).$$

Įrodymas baigtas.

Teorema 4.4 (Bejeso teorema). *Tarkime $H_1, H_2, \dots \in \mathcal{F}$ yra tokie, kad $H_i \cap H_j = \emptyset$ visiems $i \neq j$ ir $P(H_i) > 0$ kiekvienam i. Be to $\cup_{i\geq 1} H_i = \Omega$. Tuomet bet kuriam įvykiui $A \in \mathcal{F}$ su $P(A) > 0$ ir bet kuriam k yra teisinga lygybė*

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i\geq 1} P(H_i)P(A|H_i)}\,. \tag{4.5}$$

Įrodymas. Iš (4.4) formulės išplaukia

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)}{P(A)}\, P(A|H_k).$$

Įstatę pilnos tikimybės formulę $P(A) = \sum_{i\geq 1} P(H_i)P(A|H_i)$, gauname (4.5). *Įrodymas baigtas.*

PVZ 4.4. Turime penkias dėžes su rutuliais. Po dvi dėžes yra pirmos ir antros rūšies. Viena dėžė yra trečios rūšies. Pirmos rūšies dėžėje yra 2 balti ir 3 juodi rutuliai. Antros rūšies dėžėje yra 1 baltas ir 4 juodi rutuliai. Trečios rūšies dėžėje yra 4 balti ir 1 juodas rutulys. Atsitiktinai parenkame viena dėžę (visos penkios dėžės vienodai tikėtinos). Iš pasirinktosios dėžės atsitiktinai traukiame rutulį (visi dėžės rutuliai turi vienodus šansus buti ištraukti). Kokia tikimybė, kad pasirinkta dėžė buvo trečiosios rūšies, jei žinome, kad ištrauktas rutulys buvo baltas?

Sprendimas. Žymime įvykius: B -"ištrauktas rutulys yra baltas"; A_i -"buvo pasirinkta $i-$tos rūšies dėžė", $i = 1, 2, 3$. Mus domina tikimybė $P(A_3|B)$. Iš Bejeso teoremos turime

$$\begin{aligned} P(A_3|B) &= \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{5}\,\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}\,\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\,\frac{4}{5}} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

4.2. Nepriklausomi įvykiai

PVZ 4.5. Artilerijos apšaudomoje srityje pažymėkime kvadratą $[0, 1] \times [0, 1]$. Pažymėkime pirmojo šūvio, pataikiusio į kvadratą, koordinates x ir y. Tarsime, kad visi kvadrato taškai $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ turi vienodus šansus (t.y., sviediniai tolygiai apšaudo srities dalį, kurioje yra kvadratas).

Fiksuokime skaičius $0 \le a < b \le 1$ ir $0 \le c < d \le 1$. Sakome, kad įvyko įvykis A, jei šūvio koordinatė x pateko į intervalą $[a, b]$, t.y., $a \le x \le b$. Sakome, kad įvyko įvykis B, jei šūvio koordinatė y pateko į intervalą $[c, d]$, t.y., $c \le y \le d$.

Pritaikę geometrinių tikimybių modelį, gauname

$$P(A) = \frac{Q([a, b] \times [0, 1])}{Q([0, 1] \times [0, 1])} = b - a, \qquad P(B) = \frac{Q([c, d] \times [0, 1])}{Q([0, 1] \times [0, 1])} = d - c,$$
$$P(A \cap B) = \frac{Q([a, b] \times [c, d])}{Q([0, 1] \times [0, 1])} = (b - a)(d - c).$$

Tikimybės tenkina lygybę $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Toliau nagrinėsime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

APB 4.2. Įvykius $A, B \in \mathcal{F}$ vadiname nepriklausomais jei

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{4.6}$$

Teiginys 4.5. *Tarkime $A, B \in \mathcal{F}$. Jei $P(A) > 0$, tai (4.6) lygybė ekvivalenti lygybei $P(B|A) = P(B)$.*

Įrodymas. Tarkime (4.6) lygybė yra patenkinta. Iš sąlyginės tikimybės apibrėžimo, $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$. Įstatę (4.6) gauname $P(B|A) = P(B)$.

Tarkime yra teisinga lygybė $P(B|A) = P(B)$. Įstatę kairėn pusėn tapatybę $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$, gauname (4.6) lygybę.

Įrodymas baigtas.

Iš 4.5 teiginio išplaukia, jog sąlyga, kad yra įvykęs įvykis A, neturi įtakos įvykio B tikimybei, jei įvykiai A ir B yra nepriklausomi.

Teiginys 4.6. *Įvykiui $A \in \mathcal{F}$ yra teisingi tokie teiginiai.*
(i) Jei $P(A) = 0$, tai bet kuriam įvykiui $B \in \mathcal{F}$ įvykiai A ir B yra nepriklausomi.
(ii) Jei $P(A) = 1$, tai bet kuriam įvykiui $B \in \mathcal{F}$ įvykiai A ir B yra nepriklausomi.
(iii) Jei įvykiai A ir B yra nepriklausomi, tai įvykiai A ir $\overline{B}$ yra nepriklausomi. Čia žymime $\overline{B} = \Omega \setminus B$ įvykį, priešingą įvykiui B.
(iv) Jei įvykiai $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ yra tokie, kad $B_i \cap B_j = \emptyset$ visiems $i \neq j$ ir įvykiai A ir B_i yra nepriklausomi visiems i, tuomet įvykiai A ir $D = \cup_{i\geq 1} B_i$ yra nepriklausomi.

Įrodymas. (i) Kadangi $(A \cap B) \subset A$, tai $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$. Iš čia išplaukia, kad $P(A \cap B) = 0$. Taigi, $P(A \cap B) = 0 = 0 \times P(B) = P(A) \times P(B)$.
(ii) Iš lygybės $P(A) = 1$ išplaukia $P(\overline{A}) = 0$. Todėl $P(B \cap \overline{A}) = 0$. Iš lygybių

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$$

išplaukia $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$. Įstatę $P(B \cap \overline{A}) = 0$, gauname

$$P(B \cap A) = P(B) = 1 \times P(B) = P(A) \times P(B).$$

(iii) Iš aibių lygybės $A \cap \overline{B} = A \setminus (A \cap B)$ išplaukia

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B).$$

Įstatę $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (įvykiai nepriklausomi!), gauname

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

(iv) Iš aibių lygybės $D \cap A = \cup_{i\geq 1}(B_i \cap A)$ ir to fakto, kad $B_i \cap B_j = \emptyset$, kai $i \neq j$, išplaukia (tikimybinio mato adityvumas!)

$$P(D \cap A) = \sum_{i\geq 1} P(B_i \cap A).$$

Kiekvienas dėmuo $P(B_i \cap A) = P(B_i)P(A)$, nes įvykiai B_i ir A nepriklausomi. Gauname

$$P(D \cap A) = \sum_{i\geq 1} P(B_i)P(A) = P(A)\sum_{i\geq 1} P(B_i) = P(A)P(D).$$

Paskutiniojoje lygybėje vėl pritaikėme tikimybinio mato adityvumą, t.y., lygybę $P(D) = \sum_{i\geq 1} P(B_i)$.
Įrodymas baigtas.

Nagrinėkime įvykių rinkinį $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$.

APB 4.3. Sakome, kad rinkinio $\mathcal{U}$ įvykiai nepriklausomi (rinkinį $\mathcal{U}$ sudaro nepriklausomi įvykiai), jei bet kuriems $\mathcal{U}$ elementams $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{U}$ yra teisinga lygybė

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1) \cdots P(A_k). \tag{4.7}$$

Pastaba. Apibrėžimas reikalauja patikrinti (4.7) lygybę visoms rinkinio $\mathcal{U}$ elementų grupėms (turinčioms $k = 2$ elementų, turinčioms $k = 3$ elementus, etc.).

PVZ 4.6. Tetraedras turi 4 sienas. Pirmą sieną nudažome raudonai, antrą - žaliai, trečią - geltonai. Ketvirtą sieną nuspalvinam taip, kad ji turėtų po lopinėlį visų trijų spalvų. Ridename nuspalvinta tetraedrą plokštuma. Mus domina siena, kuria (sustojęs) tetraedras liečia plokštumą.

Sakome, kad įvyko įvykis A_R, jei ši siena turi raudonos spalvos. Panašiai apibrėžiame įvykius A_Z ir A_G. Ar įvykiai A_R, A_Z ir A_G sudaro nepriklausomų įvykių rinkinį?

Sprendimas. Eksperimento modelis yra tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kur $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Elementarioji baigtis ω_i atitinka situaciją, kai $i-$toji siena liečia plokštumą. Kadangi visi variantai turi vienodus šansus, tai $P(\omega_i) = 1/4$ visiems i. Įvykių algebrą $\mathcal{F}$ sudaro visi aibės Ω poaibiai.

Kadangi

$$A_R = \{\omega_1, \omega_4\}, \quad A_Z = \{\omega_2, \omega_4\}, \quad A_G = \{\omega_3, \omega_4\},$$

gauname $P(A_R) = P(A_Z) = P(A_G) = 1/2$. Kitą vertus,

$$A_R \cap A_Z = \{\omega_4\}, \quad A_R \cap A_G = \{\omega_4\}, \quad A_Z \cap A_G = \{\omega_4\}.$$

Todėl

$$P(A_R \cap A_Z) = P(A_R \cap A_G) = P(A_Z \cap A_G) = 1/4.$$

Darome išvadą kad,

$$\begin{aligned} &P(A_R \cap A_Z) = P(A_R)P(A_Z), \quad P(A_R \cap A_G) = P(A_R)P(A_G), \\ &P(A_Z \cap A_G) = P(A_Z)P(A_G). \end{aligned}$$

Taigi, bet kurią porą sudaro nepriklausomi įvykiai.

Tačiau rinkinys $\{A_R, A_Z, A_G\}$ nėra nepriklausomų aibių rinkinys, nes

$$P(A_R \cap A_Z \cap A_G) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_R)P(A_Z)P(A_G).$$

PVZ 4.7. Tikimybė, kad šaulys pataikys yra 1/3. Kokia tikimybė, kad iššovus 10 kartų visi šūviai bus sėkmingi? Kokia tikimybė, kad bent vienas šūvis bus sėkmingas? Laikome, kad skirtingų šūvių rezultatai nepriklauso vienas nuo kito.

Sprendimas. Įvykį A - "visi 10 šūvių sėkmingi" atitinka įvykių sankirta, $A = \cap_{i=1}^{10} A_i$, kur A_i žymi įvykį, kad $i-$tasis šūvis sėkmingas. Kadangi šūvių rezultatai nepriklausomi, tai įvykiai $A_1, \ldots, A_{10}$ sudaro nepriklausomų įvykių rinkinį. Todėl $P(A) = P(\cap_{i=1}^{10} A_i) = P(A_1) \times P(A_2) \times \cdots \times P(A_{10}) = (1/3)^{10}$.
Įvykio B - "bent vienas šūvis sėkmingas" tikimybę patogu skaičiuoti tokiu būdu. Pradžioje randame jam priešingo įvykio $\overline{B}$ - "visi 10 šūvių nesėkmingi" tikimybę. Tuomet mus dominanti tikimybė $P(B) = 1 - P(\overline{B})$. Įvykį $\overline{B}$ atitinka įvykių sankirta, $\overline{B} = \cap_{i=1}^{10} B_i$, kur B_i žymi įvykį, kad $i-$tasis šūvis nesėkmingas. Kadangi šūvių rezultatai nepriklausomi, tai įvykiai $B_1, \ldots, B_{10}$ sudaro nepriklausomų įvykių rinkinį. Todėl $P(\overline{B}) = P(\cap_{i=1}^{10} B_i) = P(B_1) \times P(B_2) \times \cdots \times P(B_{10}) = (2/3)^{10}$. Iš čia gauname $P(B) = 1 - (2/3)^{10}$.

5. Nepriklausomi eksperimentai. Binominė ir polinominė tikimybė. Puasono teorema.

5.1. *Nepriklausomi eksperimentai*

PVZ. 5.1. Du kartus metame kauliuką. Pirmojo metimo baigčių aibė $\Omega_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$. Antrojo metimo baigčių aibė $\Omega_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_6\}$. Dviejų metimų bendrą rezultatą aprašo baigčių aibė $\Omega = \{(x_i, y_j) : 1 \le i, j \le 6\}$. Ši aibė turi 36 elementus. Elementarioji baigtis (x_i, y_j) atitinka rezultatą, kai pirmuoju metimu iškrito i, o antruoju j akučių.
Pažymėkime įvykius: A - "pirmuoju metimu iškritusių akučių skaičius lyginis", B - "antruoju metimu iškritusių akučių skaičius neviršija 3".
Įvykiui A palankios yra tos poros (x_i, y_j), kurių pirmoji koordinatė x_i turi lyginį numerį i. Todėl $A = \{2, 4, 6\} \times \Omega_2$ ir $|A| = 3 \times 6 = 18$.
Įvykiui B palankios yra tos poros (x_i, y_j), kurių antrosios koordinatės y_j numeris $j \le 3$. Todėl $B = \Omega_1 \times \{1, 2, 3\}$ ir $|B| = 6 \times 3 = 18$.
Įvykį "pirmuoju metimu iškritusių akučių skaičius lyginis, o antruoju metimu iškritusių akučių skaičius neviršija 3" atitinka poros, patekusios į sankirtą $A \cap B$. Šią sankirtą sudaro tos poros (x_i, y_j), kurių pirmoji koordinatė x_i turi lyginį numerį i, o antrosios koordinatės y_j numeris $j \le 3$. Todėl $A \cap B = \{2, 4, 6\} \times \{1, 2, 3\}$ ir $|A \cap B| = 3 \times 3 = 9$.
Kadangi visos poros yra vienodai tikėtinos, tai bet kurios poros (x_i, y_j) pasirodymo tikimybė $P(\{(x_i, y_j)\}) = 1/36$. Iš čia randame tikimybes

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Iš lygybės $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ išplaukia, kad įvykiai A ir B yra nepriklausomi.

Šį pastebėjimą galime apibendrinti. Jei C yra koks nors įvykis, kuris priklauso tik nuo pirmojo metimo rezultato, o D yra koks nors įvykis, kuris priklauso tik nuo antrojo metimo rezultato, tai jie yra nepriklausomi.

Tarkime C yra koks nors įvykis, kuris priklauso tik nuo pirmojo metimo rezultato. Tuomet jį atitinkamtis Ω poaibis $C \subset \Omega$ gali būti užrašytas taip $C = C_1 \times \Omega_2$, kur poaibis $C_1 \subset \Omega_1$ nurodo kaip mūsų įvykis priklauso nuo pirmojo metimo rezultato. Aibė C turi $|C_1| \times 6$ elementų (porų). Todėl $P(C) = |C_1| \times 6/36 = |C_1|/6$.

Tarkime D yra koks nors įvykis, kuris priklauso tik nuo antrojo metimo rezultato. Tuomet jį atitinkamtis Ω poaibis $D \subset \Omega$ gali būti užrašytas taip $D = \Omega_1 \times D_2$, kur poaibis $D_2 \subset \Omega_2$ nurodo kaip mūsų įvykis priklauso nuo antrojo metimo rezultato. Aibė D turi $6 \times |D_2|$ elementų (porų). Todėl $P(D) = 6 \times |D_2|/36 = |D_2|/6$.

Įvykį $C \cap D$ sudaro porų aibė $C_1 \times D_2$. Joje yra $|C_1| \times |D_2|$ elementų. Todėl $P(C \cap D) = |C_1| \times |D_2|/36$.

Gauname, kad $P(C \cap D) = P(C)P(D)$. Taigi, įvykiai C ir D yra nepriklausomi. Du (ar daugiau) eksperimentus (šį kartą tai du kauliuo metimai), kurių rezultatai nepriklausomi vadiname nepriklausomais eksperimentais.

Pirmajį kauliuko metimą (pirmą eksperimentą) atitinka tikimybinė erdvė (Ω_1, $\mathcal{F}_1$, P_1), kur $\mathcal{F}_1$ žymi visų aibės Ω_1 poaibių rinkinį, o tikimybinis matas $P_1(\{x_i\}) = 1/6$ visiems $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Antrajį kauliuko metimą (antrą eksperimentą) atitinka tikimybinė erdvė (Ω_2, $\mathcal{F}_2$, P_2), kur $\mathcal{F}_2$ žymi visų aibės Ω_2 poaibių rinkinį, o tikimybinis matas $P_2(\{y_j\}) = 1/6$ visiems $j = 1, 2, \ldots, 6$.

Abu eksperimentus kartu atitinka tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kur $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, o $\mathcal{F}$ atitinka visų aibės Ω poaibių rinkinį. Tikimybinis matas $P(\{x_i, y_j)\}) = 1/36 = P_1(\{x_i\})P_2(\{y_j\})$ visoms poroms (x_i, y_j), kur $1 \leq i, j \leq 6$. Tokį tikimybinį matą dar žymime $P = P_1 \times P_2$ norėdami pabrėžti, kad jis gaunamas sudauginus atitinkamų koordinačių x_i ir y_j tikimybes.

Dviejų nepriklausomų eksperimentų tikimybinę erdvę dar žymime taip

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1) \times (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$$

ir vadiname tikimybinių erdvių sandauga.

APB 5.1 Tarkime, atliekame n statistinių eksperimentų. Kiekvienam $i = 1, \ldots, n$ pažymėkime $i-$jo eksperimento tikimybinį modelį (tikimybinę erdvę) $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$. Įveskime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kur

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$$

žymi aibę vektorių $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ su $\omega_i \in \Omega_i$ visiems $i = 1, \ldots, n$. Aibės Ω poaibių rinkinys $\mathcal{F}$ yra pati mažiausia $\sigma-$ algebra, kuriai priklauso visos aibės

$$B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n, \tag{5.1}$$

čia kiekvienam $i = 1, \ldots, n$ aibė B_i yra koks nors aibės Ω_i poaibis, priklausantis rinkiniui $\mathcal{F}_i$. Žymime

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \cdots \times \mathcal{F}_n.$$

Tikimybinis matas P, apibrėžtas aibėms iš $\mathcal{F}$, tenkina lygybę

$$P(B) = P_1(B_1) \times P_2(B_2) \times \cdots \times P_n(B_n),$$

visoms aibėms B, aprašytoms formule (5.1). Žymime

$$P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n.$$

Sakome, kad tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ atitinka n *nepriklausomų eksperimentų* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $1 \leq i \leq n$ modelį. Žymime

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1) \times \cdots \times (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n).$$

5.2. Binominė tikimybė

Metame nesimetrišką monetą. Tikimybė, kad atsivers herbas yra p. Tuomet skaičiaus atsivertimo tikimybė $1-p$. Metus taisyklingą monetą, herbo ir skaičiaus atsivertimo šansai yra lygūs. Todėl šiuo atveju $p = 1/2$. Sakydami, kad moneta nesimetriška, turime galvoje tokią situaciją, kai tikimybė p nebūtinai lygi $1/2$. Pvz. $p = 3/10$.

Monetos metimas yra statistinis eksperimentas. Jo baigties iš anksto nežinome. Matematinis eksperimento modelis yra tikimybinė erdvė $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$, kur baigčių aibė $\Omega_0 = \{0, 1\}$. Herbo atsivertimo faktą žymi elementarioji baigtis 1, skaičiaus atsivertimo faktą žymi elementarioji baigtis 0. Aibių rinkį $\mathcal{F}_0$ sudaro visi Ω_0 poaibiai, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega_0\}$. Tikimybė $P_0(1) = p$ ir $P_0(0) = q$. Čia vartojame žymėjimą $q = 1-p$.

n kartų metame tą pačią monetą. Laikome, kad statistinių eksperimentų rezultatai nepriklausomi (ankstesnių metimų rezultatai neturi įtakos vėliau sekančių metimų baigtims). Juos atitinka tikimybinės erdvės $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i = 1, \ldots, n$, kurios yra lygiai tokios pačios kaip ir $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$ (šios erdvės kopijos). Visų n eksperimentų seriją atitinka matematinis modelis $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kur $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ ir $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \cdots \times \mathcal{F}_n$ ir $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$, žr. **APB 5.1**.

Mus domina įvykis A_k- "herbas pasirodė k kartų, o skaičius pasirodė $n-k$ kartų". Atitinkantis poaibis $A_k \subset \mathcal{F}$ yra sudarytas iš tų elementariųjų baigčių $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, tarp kurių koordinačių vienetas pasikartoja k kartų, o nulis pasikartoja $n-k$ kartų. Kiekvienos tokios elementariosios baigties tikimybė

$$P(\omega) = P_1(\omega_1) \ldots P_n(\omega_n) = p^k q^{n-k},$$

nes sandaugoje yra k daugiklių, kurie atitinka herbo pasirodymą ($\omega_i = 1$) ir kurių dydis $P_i(1) = p$. Like $n-k$ daugiklių atitinka skaičiaus pasirodymą ($\omega_j = 0$) ir jų dydis $P_j(0) = q$.

Matome, kad visos įvykiui A_k palankios elementariosios baigtys $\omega \in A_k$ turi vienodas tikimybes $P(\omega) = p^k q^{n-k}$. Todėl įvykio A_k tikimybė

$$P(A_k) = \sum_{\omega \in A_k} P(\omega) = |A_k| p^k q^{n-k}.$$

Įvykiui A_k palankias elementariasias baigtis $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ atitinka žodžiai 001011001...01, turintys n raidžių, naudojantys abėcėlę $\{0, 1\}$ ir tokie, kuriuose raidė 1 pasikartoja lygiai k kartų, o raidė 0 pasikartoja $n-k$ kartų. Tokių žodžių yra $\binom{n}{k}$. Taigi $|A_k| = \binom{n}{k}$, o tikimybė

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{5.2}$$

Ši tikimybė vadinama binomine tikimybe (turi binominį koeficientą $\binom{n}{k}$).

5.3. Polinominė tikimybė

Turime nesimetrišką kaulelį (iškilą briaunainį) su m sienų $B_1, \ldots, B_m$. Metus kauleli ant plokštumos, jis nuriedėjęs sustos. Sakome, kad atsivertė siena B_k, jei sustojęs kaulelis šia siena liečia plokštumą. Pažymėkime p_j tikimybę, kad atsivertusi siena yra B_j. Jei kaulelis nėra simetriškas, tikimybės $p_1, \ldots, p_m$ gali būti skirtingos. Kaulelio metimo eksperimentą atitinka tikimybinis modelis (tikimybinė erdvė) $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$. Elementariųjų baigčių aibė $\Omega_0 = \{B_1, \ldots, B_m\}$. Tikimybinis matas $P_0(B_i) = p_i$ visiems $i = 1, \ldots, m$. Skaičių rinkinys $p_1, \ldots, p_m$ atitinka kaulelio savybes (formą). Aišku, $p_i > 0$ visiems $i = 1, \ldots, m$ ir $p_1 + \cdots + p_m = 1$. Galimų atsitiktinių įvykių rinkinį $\mathcal{F}_0$ sudaro visi Ω_0 poaibiai.

n kartų metame tą patį kauleli ir registruojame atsivertusias sienas. Laikome kad metimų rezultatai nepriklausomi. Pažymėkime $i-$jo eksperimento tikimybinę erdvę $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$. Visus n eksperimentų kartu aprašo tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kur $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ ir $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \cdots \times \mathcal{F}_n$ ir $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$, žr. **APB 5.1**.

Elementariųjų įvykių aibę Ω sudaro vektoriai $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, kur ω_k nurodo $k-$jo eksperimento metu atsivertusią kaulelio sieną. Pvz., elementrioji baigtis $\omega = (B_1, B_1, B_2, B_3, ..., B_6)$ atitinka tokį eksperimentų sekos rezultatą, kai pirmuoju metimu atsivertė B_1, antruoju vėl B_1, trečiuoju - B_2, ketvirtuoju - B_3, o paskutiniam metime atsivertė B_6. Tokios serijos tikimybė $P(\omega) = p_1 p_1 p_2 p_3 \cdots p_6$.

Mus domina įvykis $A_{k_1 \ldots, k_m}$- "siena B_1 atsivertė k_1 kartų, siena B_2 atsivertė k_2 kartų, ..., siena B_m atsivertė k_m kartų". Aišku, $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, nes eksperimentų skaičius yra n. Elementarusis įvykis $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ yra palankus įvykiui $A_{k_1 \dots, k_m}$, jei tarp ω kordinačių $\omega_1, \dots, \omega_n$ simbolis B_1 pasikartoja k_1 kartų, simbolis B_2 pasikartoja k_2 kartų, ..., simbolis B_m pasikartoja k_m kartų. Palankių elementariųjų įvykių ω skaičius yra polinominis koeficientas (kartotinių gretinių skaičius) $\binom{n}{k_1 \dots k_m}$. Kiekvieno tokio elementaraus įvykio tikimybė $P(\omega) = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$. Todėl įvykio $A_{k_1 \dots, k_m}$ tikimybė

$$
\begin{aligned}
P(A_{k_1 \dots, k_m}) &= \sum_{\omega \in A_{k_1 \dots, k_m}} P(\omega) = \sum_{\omega \in A_{k_1 \dots, k_m}} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m} \\
&= |A_{k_1 \dots, k_m}| p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m} = \binom{n}{k_1 \dots k_m} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}. \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

Ją vadiname polinomine tikimybe.

5.4. Puasono teorema

Nagrinėkime binominę tikimybę $P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, žr **5.2** skyrelį. Jei atlikome 100 monetos metimų, o herbo atsiverimo tikimybė $p = 1/10$, tai tikėtinas herbo pasirodymų skaičius galėtų būti 10. Metus monetą 1000 kartų, galėtume tikėtis, kad apytikriai 100 kartu atsivertė herbas. Apskritai, po n metimų, herbo atsivertimų skaičius k turėtų atspindėti herbo atsivertimo šansus p ir todėl tikėtina, kad $k \approx np$.

Jei turėtume skirtingų nesimetrinių monetų rinkinį su atitinkamomis p reikšmėmis $p_1, p_2, \dots$ tokiomis, kad

$$
\lim_n np_n = \lambda, \qquad (5.4)
$$

tai atlikę n eksperimentų su $n-$ta moneta, galetume tikėtis, kad apytikriai $np_n \approx \lambda$ kartų atsivers herbas. Kokia tikimybė, kad $n-$to eksperimento metu herbas atsivers k kartų? Tikslų atsakymą pateikia binominės tikimybės formulė (5.2). Tačiau ja nėra lengva naudotis, nes prireikia sudėtingų skaičiavimų. Pasirodo, kad esant patenkintai sąlygai (5.4), binominę tikimybę galime apytikriai apskaičiuoti, panaudojant Puasono tikimybe.

Teorema 5.1. *Tarkime, kad sąlyga (5.4) yra patenkinta su $\lambda < \infty$. Tuomet visiems $k = 0, 1, 2, \dots,$ egzistuoja riba*

$$
\lim_n \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \qquad (5.5)
$$

Pastaba. Jei $\lambda = 0$ ir $k = 0$, dešinei (5.5) lygybės pusei priskiriame reikšmę 1.
Įrodymas.

Pažymėkime $a_n = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$ ir

$$A_n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}, \qquad B_n = (1-p_n)^k, \qquad C_n = \frac{(np_n)^k}{k!}.$$

Užrašykime

$$a_n = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(np_n)^k}{n^k}\,(1-p_n)^{n-k} = \frac{A_n}{B_n}\,C_n(1-p_n)^n, \tag{5.6}$$

Tarkime, kad $\lambda > 0$. (5.5) lygybė (ir ribos egzistavimas) išplaukia iš ribų

$$A_n \to 1, \qquad B_n \to 1, \qquad C_n \to \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \text{kai} \qquad n \to \infty \tag{5.7}$$

ir lygybės

$$\lim_n (1-p_n)^n = e^{-\lambda}. \tag{5.8}$$

Ribos (5.7) yra akivaizdžios. Lieka įrodyti (5.8) lygybę. Įrodysime, pasiremdami žinoma riba

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{5.9}$$

Užrašę

$$\begin{aligned} (1-p_n)^n &= (1-\frac{np_n}{n})^n = \exp\{\ln(1-\frac{np_n}{n})^n\} \\ &= \exp\Big\{n\ln(1-\frac{np_n}{n})\Big\} = \exp\Big\{\frac{\ln(1-\frac{np_n}{n})}{\frac{np_n}{n}}\,np_n\Big\} \end{aligned} \tag{5.10}$$

ir pastebėję, kad iš (5.9) išplaukia

$$\frac{\ln(1-\frac{np_n}{n})}{\frac{np_n}{n}} \to -1$$

kai $np_n \to \lambda$ ir $\frac{np_n}{n} \to 0$, gauname

$$\lim_n \frac{\ln(1-\frac{np_n}{n})}{\frac{np_n}{n}}\,np_n = \lim_n \frac{\ln(1-\frac{np_n}{n})}{\frac{np_n}{n}}\,\lim_n np_n = -\lambda.$$

Kadangi funkcija $y \to e^y$ yra tolydžioji, darome išvadą, kad dešinė (5.10) lygybės pusė artėja į $e^{-\lambda}$, kai $n \to \infty$. Todėl

$$(1 - p_n)^n \to e^{-\lambda}. \tag{5.11}$$

Liko įrodyti (5.5) lygybę, kai $\lambda = 0$. Kai $k = 1, 2, 3, \ldots$ dešinė (5.5) lygybės pusė lygi 0. Norėdami įsitikinti, kad kairioji (5.5) lygybės pusė taip pat lygi 0, taikome užrašą (5.6) ir (5.7) lygybes. Šį kartą $C_n \to 0$, o $(1 - p_n)^n \leq 1$. Todėl $a_n \to 0$, kai $n \to \infty$.

Jei $\lambda = 0$ ir $k = 0$, tai $a_n = (1 - p_n)^n$. Pritaikę (5.11), gauname $a_n \to 1$.

Įrodymas baigtas.

II. ATSITIKTINIAI DYDŽIAI IR JŲ TIKIMYBINIAI SKIRSTINIAI

6. Atsitiktiniai dydžiai

6.1. *$\sigma-$algebros*

Primename $\sigma-$algebros apibrėžimą. Aibės Ω poaibių rinkinį $\mathcal{F}$ vadiname $\sigma-$algebra, jei

1) $\emptyset,\ \Omega \in \mathcal{F}$;
2) $A, B \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{F}$ ir $A \cap B \in \mathcal{F}$;
3) $A \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in \mathcal{F}$, čia $\overline{A} = \Omega \setminus A$;
4) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ ir $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Toliau nagrinėsime įvairias $\sigma-$algebras, sudarytas iš aibės Ω poaibių (t.y. poaibių rinkinius, tenkinančius 1)-4) savybes). Pati didžiausia $\sigma-$algebra yra visų Ω poaibių rinkinys. Visos kitos $\sigma-$algebros yra šio didelio poaibių rinkinio dalys. Pati mažiausia $\sigma-$algebra yra aibių sistema $\{\emptyset, \Omega\}$. Ji įeina į bet kurią kitą $\sigma-$algebrą. Tarkime, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ yra kokia nors $\sigma-$algebrų klasė (sistema). Čia laikome, kad kiekvienas elementas $\mathcal{F}_\gamma$ turi savo vardą (indeksą) γ, o vardai sudėti į archyvą (indeksų aibę) Γ. Tai yra patogus žymėjimas.

Teiginys 6.1. *Tos aibės A, kurios priklauso kiekvienai rinkinio $\{\mathcal{F}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ $\sigma-$algebrai $\mathcal{F}_\gamma$, sudaro $\sigma-$algebrą.*

Pastaba. Teiginys sako, kad sankirta $\mathcal{F} = \cap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ yra $\sigma-$algebra.

Įrodymas. Tikriname ar aibių rinkinys $\mathcal{F}$ tenkina 1)-4) sąlygas.
1) Kadangi Ω yra kiekvienos $\sigma-$algebros $\mathcal{F}_\gamma$ narys, tai Ω yra ir sankirtos $\mathcal{F}$ narys.
2) Jei $A, B \in \mathcal{F}$ tai $A, B \in \mathcal{F}_\gamma$ visiems $\gamma \in \Gamma$. Tuomet kiekvienam γ turime $A \cup B \in \mathcal{F}_\gamma$ ir $A \cap B \in \mathcal{F}_\gamma$. Iš čia išplaukia, kad aibės $A \cup B$ ir $A \cap B$ yra rinkinio $\mathcal{F}$ nariai.
Lygiai taip pat įrodoma 3) ir 4) punktai.
Įrodymas baigtas.

APB 6.1. Tarkime $\mathcal{M}$ yra koks nors aibės Ω poaibių rinkinys. Nagrinėkime aibę, sudarytą iš visų $\sigma-$algebrų $\mathcal{F}$, kurioms priklauso (visi) $\mathcal{M}$ elementai. Šią $\sigma-$algebrų klasę žymime $\mathbb{F} = \{\mathcal{F} : \ \mathcal{M} \subset \mathcal{F}\}$. Tie Ω poaibiai, kurie patenka į kiekviena klasės $\mathbb{F}$ $\sigma-$algebrą, sudaro poaibių rinkinį $\cap_{\mathcal{F}\in\mathbb{F}}\mathcal{F}$, kurį žymime $\sigma(\mathcal{M})$. Iš 6.1 teiginio išplaukia, kad šis poaibių rinkinys yra $\sigma-$algebra. Tai pati mažiausia $\sigma-$algebra, kuriai priklauso visos rinkinio $\mathcal{M}$ aibės, nes $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}$ bet kuriai $\mathcal{F} \in \mathbb{F}$. Sakome, kad $\sigma(\mathcal{M})$ yra $\sigma-$algebra, generuota poaibių sistemos $\mathcal{M}$.

PVZ 6.1 Nepriklausomų eksperimentų tikimybinių erdvių $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $1 \le i \le n$, sandaugos $\sigma-$algebra $\mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n$ yra mažiasia $\sigma-$algebra, kuriai priklauso visų stačiakampių aibių rinkinys $\mathcal{M} = \{B_1 \times \cdots \times B_n : \ B_i \in \mathcal{F}_i, \ i = 1, \ldots, n\}$, žr. **APB 5.1**. Taigi, $\mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{M})$.

APB 6.3. Realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ poaibių $\sigma-$algebrą, kuri yra generuota intervalų sistemos $\mathcal{M} = \{(a, b) : \ a, b \in \mathbb{R}\}$, vadiname Borelio $\sigma-$algebra. Žymime $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Taigi, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{M})$.
Euklido erdvės $\mathbb{R}^k$ poaibių $\sigma-$algebrą, kuri yra generuota stačiakampių aibių sistemos $\mathcal{N} = \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k) : \ a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k\}$, vadiname erdvės $\mathbb{R}^k$ Borelio $\sigma-$algebra. Žymime $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Taigi, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \sigma(\mathcal{N})$.

Pratimas. Įrodykite, kad $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ - sudauginta $k-$kartų.
Įrodykite, kad $\sigma(\mathcal{M}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, kur aibių klasė $\mathcal{M}_0 = \{(-\infty, a) : \ a \in \mathbb{R}\}$.
Įrodykite, kad $\sigma(\mathcal{M}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, kur aibių klasė $\mathcal{M}_1 = \{(-\infty, a] : \ a \in \mathbb{R}\}$.

Pastaba. Borelio $\sigma-$algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ yra labai svarbi aibių klasė. Jai priklauso visi atviri, uždari ar pusiau atviri intervalai, bet kokie skaitūs jų junginiai ir sankirtos. Taigi, atvirosios ir uždarosios aibės yra Borelio $\sigma-$algebros nariai. Realiųjų skaičių aibės poaibius, kurie priklauso Borelio $\sigma-$algebrai, vadinsime tiesiog Borelio aibėmis. Borelio aibių rinkinys $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ nesutampa su pačia didžiausia $\mathbb{R}$ poaibių $\sigma-$algebra, kuri yra sudaryta iš visų $\mathbb{R}$ poaibių. Yra tokių $\mathbb{R}$ poaibių, kurie nepriklauso Borelio aibių klasei, žr. [Dudley]. Rinkinio $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ elementus vadinsime erdvės $\mathbb{R}^k$ Borelio aibėmis.

6.2. Atsitiktiniai dydžiai ir mačiosios funkcijos

Tarkime $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ ir $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ yra mačios erdvės, žr. **APB 3.4.**

APB 6.3. Atvaizdį $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, kurio kiekvienos aibės $A \subset \mathcal{F}_2$ pirmavaizdis $f^{-1}(A) = \{\omega_1 \in \Omega_1 : \ f(\omega_1) \in A\}$ yra $\sigma-$algebros $\mathcal{F}_1$ elementas, vadiname mačiuoju. Žymime $f : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$. f dar vadiname mačiąja funkcija.
Matųjį atvaizdį $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vadiname Borelio funkcija.

Pratimas. Tarkime, $g : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ yra matusis atvaizdis. Kadangi jo reikšmių aibė yra $\mathbb{R}^k$, tai g reikšmę taške $\omega \in \Omega$ galime žymėti $g(\omega) = (g_1(\omega), \dots, g_k(\omega))$. Įrodykite, kad atvaizdžiai $g_i : \Omega \to R$, kur $i = 1, \dots, k$, yra matieji. Nagrinėkime atvaizdį $g_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, apibrėžtą taip: $g_{ij}(\omega) = (g_i(\omega), g_j(\omega))$. Įrodykite, kad atvaizdis g_{ij} yra matusis.
Čia ir toliau, kalbėdami apie mačiąją funkciją f, apibrėžtą mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ ir įgyjančią reikšmes Euklido erdvėje $\mathbb{R}^k$, turėsime galvoje (kai tekste nėra nurodyta kitaip), kad vaizdų aibės $\mathbb{R}^k$ $\sigma-$algebra yra Borelio aibių klasė $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

Teiginys 6.2. *Tarkime, kad $f\colon (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ yra matusis atvaizdis. Tuomet aibių rinkinys $\mathcal{F}_0 = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}_2\}$ yra $\sigma-$algebra.*

Pastaba. Iš mačiojo atvaizdžio apibrėžimo išplaukia, kad visi aibių rinkinio $\mathcal{F}_0$ nariai priklauso ir $\sigma-$algebrai $\mathcal{F}_1$. 6.2 teiginys sako, kad $\mathcal{F}_0$ ne tik yra rinkinio $\mathcal{F}_1$ dalis, bet ir turi $\sigma-$algebros struktūrą.
Įrodymas. Tikriname ar aibių rinkinys $\mathcal{F}_0$ tenkina 1)-4) sąlygas.
1) Kadangi $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$, tai Ω_1 yra $\mathcal{F}_0$ elementas. Kadangi $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, tai yra $\mathcal{F}_0$ elementas.
2) Jei $A, B \in \mathcal{F}_0$ tai $A = f^{-1}(A_2)$ ir $B = f^{-1}(B_2)$, kuriems nors $A_2, B_2 \in \mathcal{F}_2$. Kadangi $\mathcal{F}_2$ yra $\sigma-$algebra, tai $A_2 \cup B_2, A_2 \cap B_2 \in \mathcal{F}_2$. Todėl $f^{-1}(A_2 \cup B_2) \in \mathcal{F}_0$ ir $f^{-1}(A_2 \cap B_2) \in \mathcal{F}_0$. Pasirėmę aibių lygybėmis (įrodykite jas)

$$(6.1)\quad f^{-1}(A_2 \cup B_2) = f^{-1}(A_2) \cup f^{-1}(B_2) \qquad f^{-1}(A_2 \cap B_2) = f^{-1}(A_2) \cap f^{-1}(B_2),$$

gauname

$$A \cup B = f^{-1}(A_2) \cup f^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}_0 \qquad \text{ir} \qquad A \cap B = f^{-1}(A_2) \cap f^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}_0.$$

3) Jei $A \in \mathcal{F}_0$ tai $A = f^{-1}(A_2)$, kuriai nors aibei $A_2 \in \mathcal{F}_2$. Kadangi $\mathcal{F}_2$ yra $\sigma-$algebra, tai $\Omega_2 \setminus A_2 \in \mathcal{F}_2$. Todėl $f^{-1}(\Omega_2 \setminus A_2) \in \mathcal{F}_0$. Pasirėmę aibių lygybe (įrodykite ją)

$$f^{-1}(\Omega_2 \setminus A_2) = f^{-1}(\Omega_2) \setminus f^{-1}(A_2)$$

ir tapatybe $\Omega_1 = f^{-1}(\Omega_2)$, gauname

$$\Omega_1 \setminus A = f^{-1}(\Omega_2) \setminus f^{-1}(A_2) = f^{-1}(\Omega_2 \setminus A_2) \in \mathcal{F}_0.$$

4) Jei $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_0$ tai $A_i = f^{-1}(B_i)$, kuriems nors $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}_2$. Kadangi $\mathcal{F}_2$ yra $\sigma-$algebra, tai $\cup_i B_i \in \mathcal{F}_0$ ir $\cap_i B_i \in \mathcal{F}_2$. Todėl $f^{-1}(\cup_i B_i) \in \mathcal{F}_0$ ir $f^{-1}(\cap_i B_i) \in \mathcal{F}_0$. Pasirėmę aibių lygybėmis (įrodykite jas)

$$\cup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\cup_i B_i), \qquad \cap_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\cap_i B_i), \tag{6.2}$$

gauname

$$\cup_i A_i = \cup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\cup_i B_i) \in \mathcal{F}_0, \qquad \cap_i A_i = \cap_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\cap_i B_i) \in \mathcal{F}_0.$$

Įrodymas baigtas.

Pratimas. Įrodykite teiginį.

Teiginys 6.3. *Turime tris mačias erdves $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, 3$, ir mačiuosius atvaizdžius $f : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ ir $g\colon (\Omega_2, \mathcal{F}_2) \to (\Omega_3, \mathcal{F}_3)$. Tuomet atvaizdis $h : \Omega_1 \to \Omega_3$, apibrėžtas taip $h(\omega_1) = g(f(\omega_1))$, kur $\omega_1 \in \Omega_1$, yra matusis.*

Teiginys 6.4. *Turime dvi mačias erdves $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2$, ir atvaizdį $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Tarkime, kad aibės Ω_2 poaibių rinkinys $\mathcal{M}$ generuoja $\sigma-$algebrą $\mathcal{F}_2$, t.y., $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{M})$. Jei $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$ visoms aibėms A iš $\mathcal{M}$, tai f yra matusis atvaizdis.*

Pastaba. 6.4. Teiginys sako, jog norint įsitikinti, kad atvaizdis $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ yra matusis, nebūtina tikrinti sąlygos $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$ visoms aibėms B iš $\mathcal{F}_2$. Pakanka šią sąlygą patikrinti aibėms iš siauresnės poaibių klasės $\mathcal{M}$, kuri generuoja $\sigma-$algebrą $\mathcal{F}_2$.

Įrodymas. Apibrėžkime Ω_2 poaibių rinkinį $\mathcal{E}$, į kurį patenka aibės $A \subset \Omega_2$, tenkinančios $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$. Įrodysime, kad $\mathcal{E}$ yra $\sigma-$algebra.

1) Kadangi $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1 \in \mathcal{F}_1$ ir $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}_1$, tai Ω_2 ir $\emptyset$ yra rinkinio $\mathcal{E}$ elementai.

2) Jei $A, B \in \mathcal{E}$ tai $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$. Pasirėmę aibių lygybėmis

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \qquad \text{ir} \qquad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$

ir tuo faktu, kad

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1 \qquad \text{ir} \qquad f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$$

(nes $f^{-1}(A)$ ir $f^{-1}(B)$ yra $\sigma-$algebros $\mathcal{F}_1$ elementai) gauname $f^{-1}(A \cup B) \in \mathcal{F}_1$ ir $f^{-1}(A \cap B) \in \mathcal{F}_1$. Taigi, $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{E}$.

3) Jei $A \in \mathcal{E}$ tai $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$. Tuomet ir $\Omega_1 \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$ (nes $\mathcal{F}_1$ yra $\sigma-$algebra). Pasirėmę aibių lygybe

$$f^{-1}(\Omega_2 \setminus A) = f^{-1}(\Omega_2) \setminus f^{-1}(A) = \Omega_1 \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1,$$

gauname $\Omega_2 \setminus A \in \mathcal{E}$.
4) Jei $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$ tai $f^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}_1$, visiems i. Todėl $\cup_i f^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}_1$ ir $\cap_i f^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}_1$. Pasirėmę aibių lygybėmis (6.2), gauname

$$f^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i f^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}_1, \qquad f^{-1}(\cap_i A_i) = \cap_i f^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}_1.$$

Iš čia išplaukia, kad $\cup_i A_i \in \mathcal{E}$ ir $\cap_i A_i \in \mathcal{E}$.
Darome išvadą, kad aibių rinkinys $\mathcal{E}$ yra $\sigma-$algebra. Kadangi $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$, tai mažiausia $\sigma-$algebra $\sigma(\mathcal{M})$, turinti $\mathcal{M}$ elementus yra nedidesnė už konkrečią $\sigma-$algebrą $\mathcal{E}$, kuri turi visus $\mathcal{M}$ elementus. Taigi, $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{E}$. Kadangi $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{F}_2$, tai $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{E}$. Taigi kiekviena aibė A iš $\mathcal{F}_2$ patenka į $\mathcal{E}$ ir todėl $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$ visoms aibėms A iš $\mathcal{F}_2$.
Įrodymas baigtas.

PVZ 6.3. Tarkime, turime mačią erdvę $(\Omega, \mathcal{F})$ ir atvaizdį $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Norint sužinoti ar f yra matusis atvaizdis pakanka patikrinti ar visiems $a \in \mathbb{R}$ aibės $\{w \in \Omega : \ f(\omega) < a\}$ yra rinkinio $\mathcal{F}$ elementai, žr. Pratimą po 6.2 apibrėžimo.

Žemiau pateikiame mačiųjų funkcijų pavyzdžius.

PVZ 6.4. Turime mačias erdves $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ ir $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ ir bet kokį atvaizdį $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Jei $\mathcal{F}_1$ yra visų aibės Ω_1 poaibių rinkinys, tai f yra matusis atvaizdis nesvarbu, kokia bebūtų $\sigma-$algebra $\mathcal{F}_2$.

PVZ 6.5. Fiksuokime Borelio aibę $A \subset \mathbb{R}$. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, apibrėžta tokiu būdu:

$$f(x) = 1, \quad \text{kai} \quad x \in A \quad \text{ir} \quad f(x) = 0, \quad \text{kai} \quad x \notin A,$$

yra mačioji. Ši funkcija žymima $\mathbb{I}_A(x)$ arba $\mathbb{I}_{\{x \in A\}}$ ir vadinama aibės A indikatoriumi.
Patikrinkime ar $f(x) = \mathbb{I}_A(x)$ yra Borelio funkcija (kitaip tariant ar tai mačioji funkcija). Bet kuriai aibei $B \in \mathbb{R}$ teisingi teiginiai: jei $\{0,1\} \subset B$, tai $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$; jei $\{0,1\} \cap B = \emptyset$, tai $f^{-1}(B) = \emptyset$; jei $\{0,1\} \cap B = \{0\}$, tai $f^{-1}(B) = \mathbb{R} \setminus A$; jei $\{0,1\} \cap B = \{1\}$, tai $f^{-1}(B) = A$. Kadangi aibės $\mathbb{R}$, $\emptyset$, A ir $\mathbb{R} \setminus A$ yra Borelio aibės, gauname, kad $f^{-1}(B)$ yra Borelio aibė, bet kuriai Borelio aibei B. Taigi, f yra Borelio funkcija.
Nagrinėkime mačią erdvę $(\Omega, \mathcal{F})$ ir funkciją $f : \Omega \to R$ apibrėžtą tokiu būdu: $f(\omega) = 1$, kai $\omega \in A$ ir $f(\omega) = 0$, kai $\omega \notin A$. Ši funkcija žymima $\mathbb{I}_A(\omega)$ arba $\mathbb{I}_{\{\omega \in A\}}$ ir vadinama aibės A indikatoriumi. Samprotaudami kaip anksčiau galime įsitikinti, kad funkcija $\omega \to \mathbb{I}_A(\omega)$ yra mačioji.
APB 6.5. Nagrinėkime mačią erdvę $(\Omega, \mathcal{F})$ ir jos skaidinį $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$. Tarkime, kad aibės $A_i \in \mathcal{F}$ visiems i ir $A_i \cap A_j = \emptyset$, kai $i \neq j$. Fiksuokime skirtingų realiųjų skaičių rinkinį $c_1, \dots, c_k$ ir nagrinėkime funkciją

$$f(\omega) = c_1 \mathbb{I}_{A_1}(\omega) + \dots + c_k \mathbb{I}_{A_k}(\omega).$$

Funkcijos f reikšmių aibė $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ ir $f^{-1}(c_i) = A_i$. Bet kuriai aibei $B \subset \mathbb{R}$ turime

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap C) = \cup_{i:\ c_i \in B} A_i.$$

Aibė $f^{-1}(B)$ yra rinkinio $\mathcal{F}$ elementas, nes išreiškiama kitų kelių $\mathcal{F}$ elementų sąjunga. Darome išvadą, kad f yra mačioji funkcija. f vadiname paprastaja funkcija.

Pratimas. Nagrinėkime mačiąsias funkcijas, apibrėžtas mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ ir įgyjančias realiąsias reikšmes.

1) Įrodykite, kad bet kuri mačioji funkcija, kurios reikšmių aibė baigtinė, yra paprastoji.

2) Tarkime f ir g yra paprastosios funkcijos. Įrodykite, kad $f + g$, $f - g$ ir $\omega \to af(\omega)$ yra paprastosios funkcijos. Čia $a \in R$ yra fiksuotas skaičius.

3) Tarkime, kad $B_1, B_2, \ldots, B_k$ yra $\sigma-$algebros $\mathcal{F}$ elementai, o $d_1, \ldots, d_k$ yra realiųjų skaičių rinkinys. Įrodykite, kad funkcija $\omega \to d_1 \mathbb{I}_{B_1}(\omega) + \cdots + d_k \mathbb{I}_{B_k}(\omega)$ yra paprastoji.

Pastaba. Tarkime turime mačią erdvę $(\Omega, \mathcal{F})$ ir mačiuosius atvaizdžius f, g, h_1, $h_2, \ldots,$ įgyjančius realiąsias reikšmes. Fiksavę realiuosius skaičius a, b, nagrinėkime atvaizdį $\omega \to af(\omega) + bg(\omega)$. Galima parodyti, kad tai mačioji funkcija žr. [Kubilius], [Dudley]. Nagrinėkime funkciją $h(\omega) = \liminf_n h_n(\omega)$. Gali būti, kad kuri nors aibė $A_- := \{\omega :\ \liminf_n h_n(\omega) = +\infty\}$ arba $A_+ := \{\omega :\ \liminf_n h_n(\omega) = -\infty\}$ yra netuščia. Galima parodyti, kad $A_+ \in \mathcal{F}$ ir $A_- \in \mathcal{F}$ ir bet kuriai Borelio aibei B, turime $h^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, žr. [Kubilius], [Dudley].

Svarbi mačiųjų funkcijų klasė yra Borelio funkcijos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Į šią funkcijų klasę įeina tolydžiosios funkcijos, monotoninės funkcijos, žr. [Kubilius], [Dudley].

Teiginys 6.5. *Turime mačią erdvę $(\Omega, \mathcal{F})$ ir matųjį atvaizdį $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Galima sukonstruoti paprastųjų funkcijų seką $\{f_n\}$ tokią, kad kiekvienam $\omega \in \Omega$ turime $\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$.*

Įrodymas. Išskaidykime aibę $A_n = \{\omega :\ -n < X(\omega) \le n\}$ į smulkesnes dalis $A_n = \cup_{-n^2 \le k \le n^2 - 1} A_{n,k}$, kur

$$A_{n,k} = \{\omega :\ \frac{k}{n} < X(\omega) \le \frac{k+1}{n}\}.$$

Nagrinėkime paprastąją funkciją

$$f_n(\omega) = \sum_{k=-n^2}^{n^2-1} \frac{k+1}{n} \mathbb{I}_{A_{n,k}}(\omega).$$

Bet kuriam $\omega \in A_n$ atsiras $A_{n,k} \subset A_n$ toks, kad $\omega \in A_{n,k}$. Tuomet

$$\frac{k}{n} < f(\omega) \le \frac{k+1}{n} \qquad \text{ir} \qquad f_n(\omega) = \frac{k+1}{n}.$$

Todėl $0 \leq f_n(\omega) - f(\omega) \leq n^{-1}$. Jei $\omega \notin A_n$, tuomet $f_n(\omega) = 0$. Iš čia išplaukia nelygybė

$$|f(\omega) - f_n(\omega)| \leq n^{-1} + |f(\omega)|\mathbb{I}_{\overline{A}_n}(\omega).$$

Tam, kad įsitikintumėm, jog kiekvienam ω dešinė šios nelygybės pusė artėja prie 0, kai $n \to \infty$, pakanka įrodyti, jog

$$\lim_n \mathbb{I}_{\overline{A}_n}(\omega) = 0. \tag{6.2}$$

Fiksavę $\omega \in \Omega$, randame skaičių $f(\omega)$. Kai numeris n bus toks didelis, jog $n > |f(\omega)|$, turėsime $\omega \notin A_n$ ir todėl $\mathbb{I}_{\overline{A}_n}(\omega) = 0$. Iš čia išplaukia (6.2).
Įrodymas baigtas.

APB 6.6. Tarkime $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra tikimybinė erdvė. Bet kurį matųjį atvaizdį $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vadiname atsitiktiniu dydžiu. Matųjį atvaizdį $\mathbb{X} : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ vadiname atsitiktiniu vektoriumi.
Aišku, kad atsitiktinio vektoriaus $\mathbb{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega))$ koordinatės $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ yra atsitiktiniai dydžiai, žr. Pratimą po **APB 6.3.**
Pastaba. Atsitiktinio dydžio savoka skiriasi nuo mačiosios funkcijos $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ savokos tik tuo, kad kalbėdami apie atsitiktinį dydį, visuomet turime galvoje ir tikimybinį matą P, apibrėžtą (argumentų) aibės Ω poaibių $\sigma-$algebroje $\mathcal{F}$.

6.3. Atsitiktinio dydžio skirstinys

Nagrinėkime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir atsitiktinį dydį $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Apibrėžkime funkciją $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ tokiu būdu:

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega : X(\omega) \in A\}), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Taip pat naudosime žymenis $P_X(A) = P(X \in A)$ ir $P_X(\{a\}) = P_X(a) = P(X = a)$, kai $\{a\}$ yra aibė, turinti tik vieną elementą a.

Teiginys 6.6. *P_X yra tikimybinis matas, apibrėžtas Borelio aibių $\sigma-$algebroje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Įrodymas. Tikriname tikimybinio mato savybes.
1) Kadangi $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$, tai $P_X(\mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$.
2) Kadangi $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, tai $P_X(\emptyset) = P(\emptyset) = 0$.
3) Tarkime, kad $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ir $A \cap B = \emptyset$. Tuomet teisinga lygybė, žr. (6.1),

$$X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B).$$

Kadangi $X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) = X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, tai iš mato P adityvumo išplaukia

$$P\Big(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)\Big) = P\big(X^{-1}(A)\big) + P\big(X^{-1}(B)\big)$$

Todėl yra teisingos lygybės

$$P_X(A \cup B) = P\Big(X^{-1}(A \cup B)\Big) = P\Big(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)\Big) = P(A) + P(B).$$

4) Tarkime, kad $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ir $A_i \cap A_j = \emptyset$, kai $i \neq j$. Tuomet teisinga lygybė, žr. (6.2),

$$X^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \cup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i).$$

Kadangi $X^{-1}(A_i) \cap X^{-1}(A_j) = \emptyset$, kai $i \neq j$, tai iš mato P $\sigma-$adityvumo išplaukia

$$P\Big(\cup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i)\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P\big(X^{-1}(A_i)\big).$$

Todėl yra teisingos lygybės

$$\begin{aligned} P_X(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) &= P\Big(X^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)\Big) = P\Big(\cup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P\big(X^{-1}(A_i)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \end{aligned}$$

Įrodymas baigtas.

APB 6.7. Tikimybinį matą P_X vadiname atsitiktinio dydžio X skirstiniu.

Pastaba. 6.6 teiginį galima apibendrinti.

1. Nagrinėkime atsitiktinį vektorių $\mathbb{X} : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$, apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Funkcija $P_{\mathbb{X}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \to [0,1]$, apibrėžta tokiu būdu

$$P_{\mathbb{X}}(A) = P\big(\mathbb{X}^{-1}(A)\big) = P\Big(\{\omega : \ \mathbb{X}(\omega) \in A\}\Big), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$$

yra tikimybinis matas. $P_{\mathbb{X}}$ vadiname atsitiktinio vektoriaus $\mathbb{X}$ skirstiniu.

2. Nagrinėkime matųjį atvaizdį $f : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P)$. Funkcija $P_f : \mathcal{F}_2 \to [0,1]$, apibrėžta tokiu būdu

$$P_f(A) = P\big(f^{-1}(A)\big) = P\Big(\{\omega : \ f(\omega) \in A\}\Big), \qquad A \in \mathcal{F}_2,$$

yra tikimybinis matas.

APB 6.8. Tarkime X, Y yra du atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sakome, kad X ir Y yra lygūs beveik visur, jei

$$P\big(\{\omega : \ |X(\omega) - Y(\omega)| > 0\}\big) = 0.$$

Pratimas. Įrodykite teiginį: jei X, Y yra du atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tokie, kad X ir Y yra lygūs beveik visur, tai $P_X = P_Y$, t.y., $P_X(A) = P_Y(A)$ visoms Borelio aibėms A.

PVZ 6.6. *Bernulio atsitiktinis dydis.* Tai atsitiktinis dydis, įgyjantis tik dvi reikšmes 0 ir 1. Turime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir aibę $A \in \mathcal{F}$ su tikimybe $P(A) = p$. Atsitiktinis dydis $X(\omega) = \mathbb{I}_A(\omega)$ turi dvi reikšmes 0 ir 1 ir skirstinį

$$P_X(1) = P(X = 1) = p, \qquad P_X(0) = P(X = 0) = 1 - p, \tag{6.3}$$

nes $P_X(1) = P(A) = p$ ir $P_X(0) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$. Bet kurį atsitiktinį dydį su (6.3) skirstiniu vadiname Bernulio atsitiktiniu dydžiu. Jo skirstinį vadiname Bernulio skirstiniu.

PVZ 6.7. *Binominis atsitiktinis dydis* (palyginkite skyrelį **5.2**). Fiksuojame natūralųjį skaičių n ir skaičių $p \in [0, 1]$. Atsitiktinį dydį X, įgyjantį reikšmes $0, 1, \ldots, n$ su tikimybėmis

$$P_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{6.4}$$

vadiname Binominiu atsitiktiniu dydžiu. Skirstinį (6.4) vadiname Binominiu skirstiniu ir žymime $B(n, p)$.

PVZ 6.8. *Puasono atsitiktinis dydis.* Tai atsitiktinis dydis X, įgyjantis reikšmes $0, 1, 2, \ldots n$ su tikimybėmis

$$P_X(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{6.5}$$

Čia $\lambda \geq 0$ yra fiksuotas skaičius. Skirstinį (6.5) vadiname Puasono skirstiniu ir žymime $\mathcal{P}(\lambda)$.

PVZ 6.9. *Polinominis (multinominis) atsitiktinis vektorius* (palyginkite skyrelį **5.3**). Fiksuojame natūraliuosius skaičius m ir n ir skaičių rinkinį $0 < p_1, \ldots, p_m < 1$, tenkinantį sąlygą $p_1 + \cdots + p_m = 1$. Atsitiktinis vektorius $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_m)$, įgyjantis reikšmes $\mathbf{k}= (k_1, \ldots, k_m)$, kur k_i yra sveikieji neneigiami skaičiai, tenkinantys sąlygą $k_1 + \cdots + k_m = n$, su tikimybėmis

$$\begin{aligned} P_X(\mathbf{k}) &= P\big(\mathbb{X} = (k_1, \ldots, k_m)\big) = P(X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m) \\ &= \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

yra vadinamas polinominiu atsitiktiniu vektorium. Skirstinį (6.6) vadiname Polinominiu skirstiniu.

Papildomos pastabos. Tarkime turime aibę Ω, jos poaibių algebrą $\mathcal{A}$ ir adityviąją funkciją $P^* : \mathcal{A} \to [0,1]$. Pažymėkime $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$.
Ar galime rasti tikimybinį matą $P : \mathcal{F} \to [0,1]$, kuris sutaptų su adityviąja funkcija P^* aibių klasėje $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, t.y., visoms aibėms $A \in \mathcal{A}$ būtų teisinga lygybė $P(A) = P^*(A)$?
Atsakymą pateikia Karateodorio teorema (žr. [Kubilius]): tikimybinis matas P egzistuoja. Be to toks matas yra vienintelis, t.y., ėmę bet kuriuos du tikimybinius matus $P_1, P_2 : \mathcal{F} \to [0,1]$ tokius, kad $P_1(A) = P^*(A)$ ir $P_2(A) = P^*(A)$ visoms aibėms $A \in \mathcal{A}$, gautume lygybę $P_1(B) = P_2(B)$ visoms aibėms $B \in \mathcal{F}$.
Šią teoremą galima panaudoti tikimybinių matų lygybės klausimams spręsti ir tikimybinėms erdvėms konstruoti.
Jei turime dvi tikimybines erdves $(\Omega, \mathcal{F}, P_1)$ ir $(\Omega, \mathcal{F}, P_2)$ ir norime nustatyti ar $P_1 = P_2$, tai pakanka surasti nedidelę Ω poaibių algebrą $\mathcal{A}$, kuri generuoja $\sigma-$algebrą $\mathcal{F}$ ir patikrinti lygybę $P_1(A) = P_2(A)$ aibėms $A \in \mathcal{A}$.
Jei turime mačią erdvę $(\Omega, \mathcal{F})$ ir norime sukonstruoti tikimybinę erdvę, pakanka sukonstruoti atityviąją funkciją P^* apibrėžtą kurioje nors Ω poaibių algebroje $\mathcal{A}$, kuri generuoja $\sigma-$algebrą $\mathcal{F}$. Tuomet Karateodorio teorema garantuos mato P, apibrėžto $\sigma-$algebroje $\mathcal{F}$ egzistavimą. Be to šis matas "paveldės" adityviosios funkcijos P^* sąvybes, t.y., turėsime lygybę $P(A) = P^*(A)$ visoms aibėms $A \in \mathcal{A}$.

7. Pasiskirstymo funkcijos

7.1. Tikimybinių matų pasiskirstymo funkcijos

Nagrinėkime tikimybinę erdvę $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$.

APB 7.1. Funkciją $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, apibrėžtą tokiu būdu

$$F(x) = P\big((-\infty, x]\big), \qquad x \in \mathbb{R},$$

vadiname tikimybinio mato P pasiskirstymo funkcija.

Teiginys 7.1. *Tikimybinio mato P pasiskirstymo funkcija F turi tokias savybes:*
1) $F(x_1) \le F(x_2)$, kai $x_1 \le x_2$;
2) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ ir $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
3) kiekvienam $x \in \mathbb{R}$ funkcija F yra tolydi "iš dešinės" ir turi ribą "iš kairės",

$$(7.1) \qquad \lim_{t\to+0} F(x+t) = F(x) \qquad ir \qquad \lim_{t\to-0} F(x) = P\big((-\infty, x)\big).$$

Įrodymas. 1) Kadangi $(-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2]$, tai $P\big((-\infty, x_1]\big) \le P(\big((-\infty, x_2]\big)$.

2) Pakanka įrodyti, kad bet kuriai monotoniškai mažėjančiai skaičių sekai $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$, tenkinančiai $\lim_n x_n = -\infty$, turime $\lim_n F(x_n) = 0$, o bet kuriai monotoniškai didėjančiai skaičių sekai $y_1 < y_2 < y_3 < \cdots$, tenkinančiai $\lim_n y_n = +\infty$, turime $\lim_n F(y_n) = 1$. Naudosimės 3.2 teorema. Intervalų sekos

$$(-\infty, x_1] \supset (-\infty, x_2] \supset (-\infty, x_3] \cdots$$

sankirta $\cap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n] = \emptyset$. Todėl iš 3.2 teoremos išplaukia

$$0 = P\big(\cap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n]\big) = \lim_n P\big((-\infty, x_n]\big) = \lim_n F(x_n).$$

Intervalų sekos

$$(-\infty, y_1] \subset (-\infty, y_2] \subset (-\infty, y_3] \cdots$$

sąjunga $\cup_{n=1}^{\infty}(-\infty, y_n] = \mathbb{R}$. Todėl iš 3.2 teoremos išplaukia

$$1 = P\big(\cup_{n=1}^{\infty}(-\infty, y_n]\big) = \lim_n P\big((-\infty, y_n]\big) = \lim_n F(y_n).$$

3) Tam kad įrodytume tolydumą "iš dešinės", t.y., pirmą (7.1) ribą, pakanka patikrinti, jog bet kuriai monotoninei sekai $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots$, tenkinančiai $\lim_n t_n = 0$, turime $\lim_n F(x + t_n) = F(x)$. Naudosimės 3.2 teorema. Intervalų sekos

$$(-\infty, x + t_1] \supset (-\infty, x + t_2] \supset (-\infty, x + t_3] \cdots$$

sankirta $\cap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x + t_n] = (-\infty, x]$. Todėl iš 3.2 teoremos išplaukia

$$F(x) = P\big(\cap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x + t_n]\big) = \lim_n P\big((-\infty, x + t_n]\big) = \lim_n F(x + t_n).$$

Tam kad įrodytume tolydumą "iš kairės" , t.y., antrą (7.1) ribą, pakanka patikrinti, jog $\lim_n F(x - t_n) = P\big((-\infty, x)\big)$. Kadangi intervalų sekos

$$(-\infty, x - t_1] \subset (-\infty, x - t_2] \subset (-\infty, x - t_3] \cdots$$

sąjunga $\cup_{n=1}^{\infty}(-\infty, x - t_n] = (-\infty, x)$, tai iš 3.2 teoremos išplaukia

$$P\big((-\infty, x)\big) = P\big(\cup_{n=1}^{\infty}(-\infty, x - t_n]\big) = \lim_n P\big((-\infty, x - t_n]\big) = \lim_n F(x - t_n).$$

Įrodymas baigtas.

APB 7.2. Bet kurią funkciją $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, turinčią **7.1** teiginyje suformuluotas savybes 1)-3), vadiname pasiskirstymo funkcija.

Teorema 7.2. *Kiekvienai pasiskirstymo funkcijai F egzistuoja vienintelis tikimybinis matas, apibrėžtas Borelio aibių $\sigma-$ algebroje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ir toks, kad F yra mato P pasiskirstymo funkcija.*

Vietoj įrodymo. Fiksuokime pasiskirstymo funkciją F. Nagrinėkime aibių šeimą $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ ir joje apibrėžkime funkciją $P^*\big((-\infty, x]\big) = F(x)$. Funkciją P^* galime apibrėžti visų intervalų klasėje, kuria žymėsime $\mathcal{A}'$:

$$
\begin{aligned}
&P^*\big((y,x]\big) = F(x) - F(y), \qquad P\big((y,x)\big) = \lim_{t\downarrow 0} F(x-t) - F(y),\\
&P^*\big([y,x]\big) = F(x) - \lim_{t\downarrow 0} F(y-t) \qquad P\big((-\infty,x)\big) = \lim_{t\downarrow 0} F(x-t),\\
&P\big((x,+\infty)\big) = 1 - F(x), \qquad P\big([x,+\infty)\big) = 1 - \lim_{t\downarrow 0} F(x-t).
\end{aligned}
$$

Čia $-\infty < y \le x < +\infty$. Į aibių klasę $\mathcal{A}'$ dar įtraukiame aibes $\mathbb{R}$ ir $\emptyset$ ir apibrėžiame $P(\mathbb{R}) = 1$ ir $P(\emptyset) = 0$. Nesunku matyti, kad ėmę visas baigtinio skaičiaus aibių iš $\mathcal{A}'$ sankirtas $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$ ir sąjungas $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$, čia $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}'$ ir $k = 1, 2, \ldots$, gautume naują aibių šeimą, kuri yra aibių algebra. Šią šeimą žymėkime $\mathcal{A}$. Be to, bet kurį šeimos $\mathcal{A}$ narį $B \in \mathcal{A}$ galime išreikšti nesikertančių aibių $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}'$ sąjunga $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$. Apibrėžkime $P^*(B) = P^*(A_1) + \cdots + P^*(A_r)$ (aibę B galime daugybe skirtingų būdų išreikšti nesikertančių aibių iš $\mathcal{A}'$ sąjunga, bet skaičiaus $P^*(B)$ reikšmė nepriklauso nuo to kokią sąjungą imsime).

Dabar jau turime adityviąją funkcija P^*, apibrėžtą aibių algebroje $\mathcal{A}$. Kadangi $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A})$, tai pasinaudodami Karateodorio teorema (žr. *Papildomas pastabas* **6** skyrelio gale ir [Kubilius]), galime sukonstruoti tokį tikimybini matą P, apibrėžtą Borelio aibių $\sigma-$algebroje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, kuriam $P(A) = P^*(A)$ visoms aibėms A iš $\mathcal{A}$. Be to toks matas yra vienintelis (vėl Karateodorio teorema). Aišku, kad F yra tikimybinio mato P pasiskirstymo funkcija, nes visiems $x \in \mathbb{R}$ turime $P\big((-\infty, x]\big) = P^*\big((-\infty, x]\big) = F(x)$. *Argumentų, pagrindžiančių Teoremą 7.2, pabaiga.*

Išvada 7.3. *Tarp pasiskirstymo funkcijų ir tikimybinių matų, apibrėžtų Borelio aibių $\sigma-$ algebroje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis, nusakyta* **APB 7.1**. *Jei turime tikimybinius matus P_1, P_2 ir juos atitinkančias pasiskirstymo funkcijas F_1, F_2, tai $P_1 = P_2 \Leftrightarrow F_1 = F_2$.*

7.2. Atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijos

Tarsime, kad čia nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai yra apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

APB 7.3. Atsitiktinio dydžio X skirstinį P_X atitinkančią pasiskirstymo funkciją

$$F_X(x) = P_X\big((-\infty, x]\big) = P\Big(\{\omega: \ X(\omega) \leq x\}\Big) = P(X \leq x),$$

vadiname atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija.

APB 7.4. Atsitiktinį dydį vadiname diskrečiuoju, jei jo reikšmių aibė yra baigtinė arba skaiti. Diskretųjį atsitiktinį dydį, kurio reikšmių aibė yra baigtinė, vadiname paprastuoju.

Tarkime X yra paprastasis atsitiktinis dydis su reikšmių aibe $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, kur $x_i \neq x_j$, kai $i \neq j$. Pažymėkime

$$p_i = P\big(\{\omega: \ X(\omega) = x_i\}\big) = P(X = x_i) = P_X(\{x_i\}).$$

Tuomet

$$1 = P_X(A) = P_X(\{x_1\}) + \dots + P_X(\{x_n\}) = p_1 + \dots + p_n.$$

Bet kuriai Borelio aibei B turime

$$P_X(B) = P_X(B \cap A) = \sum_{i:\ x_i \in B} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{I}_B(x_i).$$

Tarkime X yra diskretusis atsitiktinis dydis su skaičia reikšmių aibe $A = \{x_1, x_2, \dots\}$, kur $x_i \neq x_j$, kai $i \neq j$. Tuomet, kaip ir paprastojo atsitiktinio dydžio atveju, bet kuriai Borelio aibei B turime

$$P_X(B) = P_X(B \cap A) = \sum_{i:\ x_i \in B} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mathbb{I}_B(x_i).$$

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija

$$F_X(x) = P_X\big((-\infty, x]\big) = \sum_{i:\ x_i \in (-\infty, x]} p_i = \sum_i p_i \mathbb{I}_{\{x_i \leq x\}}.$$

Matome, kad $F(x)$ yra pastovi kai x kinta intervaluose tarp gretimų X reikšmių. Taškuose x_i funkcija F yra trūki - turi p_i aukščio šuoliukus.

APB 7.5. Atsitiktinį dydį X, kurio pasiskirstymo funkcija yra tolydi, vadiname tolydžiuoju. Iš 7.1 teiginio išplaukia, jog tolydusis atsitiktinis dydis (a.d.) turi savybę $P_X(\{x\}) = 0$ visiems $x \in R$, nes

$$P_X(\{x\}) = P\big((-\infty, x] \setminus (-\infty, x)\big) = F(x) - \lim_{t \downarrow 0} F(x - t) = 0.$$

Funkcijų teorija naudoja absoliučiai tolydžiosios funkcijos sąvoką, žr. [Dudley]. Mes šią savoką taikysime tik pasiskirstymo funkcijoms.

APB 7.6. Pasiskirstymo funkciją F vadiname absoliučiai tolydžiąja, jei egzistuoja tokia neneigiama funkcija f, kad

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \qquad \text{visiems} \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{7.3}$$

Funkcija f turi būti integruojama (Lebego prasme) intervale $(-\infty, +\infty)$. Jei F yra absoliučiai tolydžioji pasiskirstymo funkcija, tuomet funkcija f, tenkinanti (7.3) nėra vienintelė, t.y., yra daugybė tokių funkcijų. Bet kurią jų vadiname pasiskirstymo funkcijos F tankio funkcija (tankiu). Patogiausia yra pasirinkti tolydžiąją tankio funkciją f, jei tik tokia egzistuoja.

Iš pasiskirstymo funkcijos sąvybės $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ išplaukia lygybė

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1. \tag{7.4}$$

APB 7.7. Atsitiktinį dydį vadiname absoliučiai tolydžiuoju, jei jo pasiskirstymo funkcija yra absoliučiai tolydžioji.

APB 7.8. *Tolygusis intervale* $[a, b]$ *atsitiktinis dydis.* Tai atsitiktinis dydis, kurio pasiskirstymo funkcija turi tankio funkciją

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{I}_{[a,b]}(x). \qquad \textbf{PIEŠINYS}$$

APB 7.9. *Eksponentinis atsitiktinis dydis.* Tai atsitiktinis dydis, kurio pasiskirstymo funkcija turi tankio funkciją $f(x) = e^{-x}$. Tokio a.d. skirstinys yra vadinamas eksponentiniu skirstiniu.

PIEŠINYS

Pratimas. Tarkime X yra eksponentinis a.d. Raskite atsitiktinio dydžio $Y = aX$ tankį, kai $a > 0$. Atsitiktinis dydis Y yra vadinamas eksponentiniu a.d. su parametru a^{-1}.

APB 7.10. *Standartinis normalusis atsitiktinis dydis.* Tai atsitiktinis dydis, kurio pasiskirstymo funkcija

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2} du. \tag{7.5}$$

Šio a.d. skirstinį vadiname standartiniu normaliuoju skirstiniu. Tankio funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}. \qquad \textbf{PIEŠINYS}$$

Ar f yra tankio funkcija? Tai yra, ar ji tenkina (7.4) lygybę?

Teiginys 7.4. *Teisinga lygybė*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}. \tag{7.6}$$

Įrodymas. Pažymėkime

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx.$$

Tuomet

$$A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Atlikę kintamųjų keitimą $(x, y) \leftrightarrow (r, \varphi)$, kur

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

gauname

$$A^2 = \int_0^{+\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r^2/2} J(r, \varphi),$$

kur $J(r, \varphi) = r$ žymi kintamųjų keitimo Jakobianą. Dabar lengvai suskaičiuojame

$$A^2 = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} r dr = 2\pi.$$

Įrodymas baigtas.

Pratimas. Tarkime, X yra standartinis normalusis a.d. Įrodykite, kad atsitiktinio dydžio $Y = aX + b$ tankio funkcija yra

$$x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\{-(x-b)^2/2a^2\}. \tag{7.7}$$

PIEŠINYS

Čia a, b yra realieji skaičiai. Atsitiktinis dydis Y vadinamas normaliuoju, o jo skirstinys žymimas $N(b, a^2)$.

APB 7.11. Tolydžiąją pasiskirstymo funkciją vadiname singuliariaja, jai ją atitinkantis tikimybinis matas P_F (apibrėžtas Borelio aibių $\sigma-$algebroje) turi tokią savybę: egzistuoja tokia Borelio aibė B, kurios Lebego matas nulis, o $P_F(B) = 1$. Singuliariosios pasiskirstymo funkcijos pavyzdžių yra pateikta vadovėlyje [Kubilius].

Teiginys 7.5. *Tarkime, F yra pasiskirstymo funkcija. Tuomet atsiras vienintelis neneigiamų skaičių trejetas p_D, p_A, p_S ir diskrečioji pasiskirstymo funkcija F_D, absoliučiai tolydžioji pasiskirstymo funkcija F_A ir singuliarioji pasiskirstymo funkcija F_S tokie, kad*

$$F(x) = p_D F_D(x) + p_A F_A(x) + p_S F_S(x), \qquad \textit{visiems} \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{7.8}$$

Jei visi skaičiai $p_D, p_A, p_S > 0$, tai egzistuoja tik vienintelis tokių funkcijų rinkinys F_D, F_A, F_S, kuris tenkina (7.8).

Šios teoremos neįrodysime. Įrodymą galima rasti [Dudley].

Pastaba. Tarkime X yra absoliučiai tolydusis atsitiktinis dydis su pasiskirstymo funkcija F ir tankio funkcija f. Tuomet bet kuriai Borelio aibei yra teisinga lygybė

$$P_X(B) = P(X \in B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_B(x) f(x) dx. \tag{7.9}$$

Integralas suprantamas Lebego prasme.

Pateiksime argumentus, kurie pagrindžia (7.9) lygybę. Dešinę (7.9) lygybės pusę pažymėkime $G(B)$. Galima parodyti, kad atvaizdis $G : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ yra tikimybinis matas. Kadangi jį atitinka ta pati pasiskirstymo funkcija, kaip ir tikimybinį matą P_X, šie matai sutampa, žr. 7.2 teoremą. Taigi visoms Borelio aibėms B yra teisinga lygybė $P(B) = G(B)$, o tai ir yra (7.9) lygybė.

APB 7.12. Atsitiktinio vektoriaus $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_k)$ pasiskirstymo funkciją $F_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ apibrėžiame tokiu būdu

$$F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = P_{\mathbb{X}}\Big((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_k]\Big) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_k \le x_k).$$

Čia $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

8. Matematinė viltis

Tarkime, 1000 kartų metame kauliuką ir registruojame pasirodžiusius akučių skaičius $X_1, X_2, \dots, X_{1000}$. Kiek kartų atsivertė 1 akutė? Šio skaičiaus reikšmė priklauso nuo atsitiktinių įvykių sekos. Ar galime prognozuoti šio skaičiaus reikšmę, prieš atlikdami 1000 eksperimentų?

Žinome, kad kiekvieną kartą metant kaulelį įvykis, jog atsivertė sienelė su 1 akute turi 1 šansą iš šešių. Todėl galime tikėtis, kad 1 akutė pasirodė maždaug šeštadalyje visų metimų, t.y., $\approx 1000/6$ kartų.

Panašiai, kiekvienai fiksuotai i reikšmei, sienelės su i akučių tikėtinas atsivertimų skaičius N_i yra $\approx 1000/6$.

Dabar galime prognozuoti atsivertusių akučių sumą

$$X_1 + \cdots + X_{1000} = 1 \times N_1 + 2 \times N_2 + \cdots + 6 \times N_6 \approx 1000\,\frac{1+2+\cdots+6}{6}\,.$$

Tarkime, atsivertusių akučių skaičius X_k nurodo kiek litų baudą turiu mokėti už $k-$tą eksperimentą. Kokia vidutinė eksperimento kaina? Ją galiu gauti suskaičiavęs sumokėtų baudų vidurkį

$$\frac{X_1 + \cdots + X_{1000}}{1000} \approx \frac{1+2+\cdots+6}{6}\,.$$

Dešinėje esantis skaičius gali būti užrašytas $x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_6p_6$, kur $x_1, \ldots, x_6$ nurodo atsitiktinio dydžio (vieno eksperimento rezultato) reikšmes, o $p_1, \ldots, p_6$ nurodo tų reikšmių tikimybes.

8.1. Paprastojo atsitiktinio dydžio matematinė viltis

Tarsime, kad šio skyrelio atsitiktiniai dydžiai yra apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

APB 8.1. Paprastojo atsitiktinio dydžio X su reikšmių aibe $C = \{x_1, \ldots, x_k\}$ matematine viltimi (vidurkiu) vadiname skaičių

$$x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \cdots + x_k P(X = x_k).$$

Žymime atsitiktinio dydžio X vidurkį taip

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i, \tag{8.1A}$$

kur $p_i = P(X = x_i)$, kai $i = 1, 2, \ldots, k$.

PVZ 8.1. Bernulio atsitiktinį dydį $X(\omega) = \mathbb{I}_{\{\omega \in A\}}$ galime užrašyti taip $X(\omega) = 1 \cdot \mathbb{I}_{\{\omega \in A\}} + 0 \cdot \mathbb{I}_{\{\omega \in \overline{A}\}}$. Čia $A \in \mathcal{F}$. Todėl jo vidurkis $\mathbf{E}X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$, kur $p = P(A)$.

Atsitiktinio dydžio Y, kuris įgyja tik vieną reikšmę $C \in \mathbb{R}$, t.y., $Y(\omega) = C$ visiems $\omega \in \Omega$, vidurkis $\mathbf{E}Y = C \cdot P(Y = C) = C \cdot 1 = C$. Toliau tokį dydį žymėsime tiesiog $Y \equiv C$.

Nagrinėkime paprastąjį a.d. X iš **APB 8.1**. Pažymėję $A_i = X^{-1}(x_i)$ galime rašyti, žr. **APB 6.5** ir **7.4**,

$$X(\omega) = x_1 \mathbb{I}_{\{\omega \in A_1\}} + \cdots + x_k \mathbb{I}_{\{\omega \in A_k\}}. \tag{8.1}$$

Aibės $A_i \in \mathcal{F}$ sudaro aibės Ω skaidinį $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ su $P(A_i) = p_i$. Todėl lygybę (8.1A) galime užrašyti taip

$$\mathbf{E}X = x_1 P(A_1) + \cdots + x_k P(A_k). \tag{8.2}$$

Jei mes išskaidytume aibes $A_1, \ldots, A_k$ į mažesnes dalis (žymėkime jas B_1, B_2, $\ldots$, B_m), gautume naują (smulkesnį) aibės Ω skaidinį $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$, kur $m > k$. Nagrinėsime tik tokius skaidinius, kurie sudaryti iš mačiųjų aibių. Kadangi kiekviena aibė B_i yra kurios nors A_j dalis, tai šiuo atveju visiems $\omega \in B_i$ turime $X(\omega) = x_j$, kai $B_i \subset A_j$. Galime rašyti

$$X(\omega) = y_1 \mathbb{I}_{\{\omega \in B_1\}} + \cdots + y_m \mathbb{I}_{\{\omega \in B_m\}}, \tag{8.3}$$

kur y_i žymi tą reikšmę x_j, kuriai $B_i \subset X^{-1}(x_j) = A_j$. Kitą vertus, išskaidę aibę A_j į nesikertančias dalis ir sudėję tų dalių tikimybes, turime gauti $P(A_j)$. Taigi, yra teisinga lygybė.

$$x_j P(A_j) = x_j \sum_{B_i \subset A_j} P(B_i) = \sum_{B_i \subset A_j} y_i P(B_i)$$

Įstatę šią lygybę į (8.2), gauname

$$\mathbf{E}X = y_1 P(B_1) + \cdots + y_m P(B_m). \tag{8.4}$$

Matome, kad smulkinant skaidinį (pereinant nuo $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ prie $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$), paprastojo atsitiktinio dydžio X vidurkio $\mathbf{E}X$ išraiška lieka panaši: sudedame sandaugas $y_i P(B_i)$, kur y_i žymi $X(\omega)$ reikšmę, kai $\omega \in B_i$. Šie argumentai pagrindžia tokį teiginį.

Teiginys 8.1. *Jei X yra paprastasis atsitiktinis dydis, o $B_1 \cup \cdots \cup B_m = \Omega$ yra toks aibės Ω skaidinys, kad kiekvienai aibei B_i reikšmė $X(\omega)$ yra ta pati visiems $\omega \in B_i$ (žymėkime šią reikšmę y_i), tuomet teisingos lygybės (8.3) ir (8.4).*

Teiginys 8.2. *Tarkime X ir Y yra paprastieji atsitiktiniai dydžiai, o a, b -realieji skaičiai. Tuomet teisinga lybybė*

$$\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}X + b\mathbf{E}Y. \tag{8.5}$$

Įrodymas. Pažymėkime atsitiktinių dydžių X ir Y reikšmių aibes $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ir $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_k\}$. Tuomet galime rašyti

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{I}_{A_i}(\omega), \qquad Y(\omega) = \sum_{j=1}^{k} y_j \mathbb{I}_{B_j}(\omega), \tag{8.5A}$$

kur pažymėta

$$A_i = X^{-1}(\{x_i\}) \qquad \text{ir} \qquad B_j = Y^{-1}(\{y_j\}).$$

Atvaizdis $\omega \to aX(\omega)$ yra paprastasis atsitiktinis dydis, kurį žymime aX. Aišku,

$$aX(\omega) = \sum_{i=1}^{n} ax_i \mathbb{I}_{A_i}(\omega),$$

ir todėl

$$\mathbf{E}(aX) = \sum_{i=1}^{n} ax_i P(A_i) = a\sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i) = a\mathbf{E}X. \tag{8.6}$$

Nagrinėkime atvaizdį $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$. Jo reikšmės yra sumos $x_i + y_j$ ir kai kurių sumų reikšmės gali sutapti. Pažymėkime $D_{ij} = A_i \cap B_j$. Iš aibių lygybės

$$A_i = A_i \cap \Omega = A_i \cap \big(\cup_{j=1}^k B_j\big) = \cup_{j=1}^k (A_i \cap B_j) = \cup_{j=1}^k D_{ij} \tag{8.7}$$

gauname $\mathbb{I}_{A_i}(\omega) = \mathbb{I}_{D_{i1}}(\omega) + \cdots + \mathbb{I}_{D_{ik}}(\omega)$ ir todėl iš (8.5A) išplaukia

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\mathbb{I}_{D_{i1}}(\omega) + \cdots + \mathbb{I}_{D_{ik}}(\omega)\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i \mathbb{I}_{D_{ij}}(\omega) \tag{8.8}$$

Panašią lygybę tenkina ir a.d. Y,

$$Y(\omega) = \sum_{j=1}^{k} y_j \Big(\mathbb{I}_{D_{1j}}(\omega) + \cdots + \mathbb{I}_{D_{nj}}(\omega)\Big) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} y_j \mathbb{I}_{D_{ij}}(\omega) \tag{8.9}$$

Iš (8.8-9) lygybių išplaukia (pakeitus dviguboje sumoje (8.9) sumavimo tvarką), kad

$$Z(\omega) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} (x_i + y_j)\mathbb{I}_{D_{ij}}(\omega).$$

Pritaikę 8.1 teiginį, turime

$$\mathbf{E}Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} (x_i + y_j) P(D_{ij}).$$

Išskaidę į dvi sumas, gauname

$$\mathbf{E}Z = \sum_{i=1}^{n} x_i \big(P(D_{i1}) + \cdots + P(D_{ik})\big) + \sum_{j=1}^{k} y_j \big(P(D_{1j}) + \cdots + P(D_{nj})\big).$$

Iš aibių lygybės (8.7) išplaukia $P(D_{i1}) + \cdots + P(D_{ik}) = P(A_i)$ ir todėl pirmoji suma yra lygi $\mathbf{E}X$. Panašiai parodome, kad antroji suma lygi $\mathbf{E}Y$. Gauname $\mathbf{E}Z = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y$, t.y.,

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y.$$

Iš šios lygybės ir (8.6) išplaukia lygybė (8.5).

Įrodymo pabaiga.

Išvada 8.3. *Tarkime $X_1, X_2 \dots, X_N$ yra paprastieji atsitiktiniai dydžiai. Tuomet*

$$\mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_N) = \mathbf{E}X_1 + \cdots + \mathbf{E}X_N. \tag{8.10}$$

PVZ 8.2. Nagrinėkime Binominį atsitiktinį dydį X su skirstiniu $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Šio dydžio vidurkis

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pritaikius lygybes

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= np \, \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \, p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\ &= np\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

gauname

$$\mathbf{E}X = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} p^r (1-p)^{n-1-r} = np.$$

Paskutiniame žingsnyje pažymėjome $r = k - 1$ ir pritaikėme Niutono binomo formulę.

Paprastesnis šio a.d. vidurkio skaičiavimo būdas gaunamas pritaikius 8.3 išvadą. Prisiminkime, jog binominis a. dydis X skaičiuoja $1-$tų pasirodymo skaičių per n pakartotinių eksperimentų $X_1, X_2, \dots, X_n$, kur a. dydis X_i žymi $i-$jo eksperimento rezultatą. Taigi, $X = X_1 + \cdots + X_n$. Paprastojo a.d. X_i skirstinys yra $P(X_i = 1) = p$ ir $P(X_i = 0) = 1 - p$. Jo vidurkis $\mathbf{E}X_i = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$. Iš (8.10) formulės išplaukia lygybės

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{E}X_1 + \cdots + \mathbf{E}X_n = p + \cdots + p = np.$$

Teiginys 8.4. *Tarkime, X yra paprastasis atsitiktinis dydis, tuomet atvaizdis $\omega \to |X(\omega)|$ yra paprastasis atsitiktinis dydis ir*

$$\mathbf{E}|X| \geq |\mathbf{E}X|. \tag{8.11}$$

Įrodymas. Pažymėje X reikšmių aibę $\{x_1, \dots, x_n\}$ ir naudodami užrašą (8.1), gauname

$$|X(\omega)| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \mathbb{I}_{A_i}(\omega).$$

Iš 8.1 teiginio išplaukia $\mathbf{E}|X| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| p_i$, kur $p_i = P(A_i) = P(X = x_i)$. Iš nelygybės

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| p_i$$

išplaukia (8.11). *Įrodymas baigtas.*

Teiginys 8.5. *Jei paprastieji a. dydžiai X ir Y tenkina nelygybę $X(\omega) \geq Y(\omega)$ visiems ω, tai $\mathbf{E}X \geq \mathbf{E}Y$.*

Įrodymas. Kadangi $X(\omega)-Y(\omega) = |X(\omega)-Y(\omega)|$, tai pritaikę **8.2** teiginį (pirmoje lygybėje apačioje) ir **8.4** teiginį (pirmoje nelygybėje apačioje) gauname,

$$\mathbf{E}X - \mathbf{E}Y = \mathbf{E}(X - Y) = \mathbf{E}|X - Y| \geq |\mathbf{E}(X - Y)| \geq 0.$$

Įrodymas baigtas.

8.2. Diskrečiojo atsitiktinio dydžio matematinė viltis

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio X reikšmių aibė $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ yra baigtinė arba skaiti. Kai reikšmių aibė baigtinė, turime paprastąjį atsitiktinį dydį. Jo matematinė viltis apibrėžta **8.1** skyrelyje. Čia laikysime, kad X reikšmių aibė yra skaiti. Tuomet

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{I}_{A_i}, \quad \text{kur} \quad A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots. \tag{8.12}$$

Žymėsime $p_i = P(A_i) = P(X = x_i)$.

APB 8.2. Sakome, kad a.d. X yra integruojamas, jei eilutė $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ konverguoja absoliučiai, t.y.,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty. \tag{8.13}$$

Atsitiktinio dydžio X, tenkinančio sąlygą (8.13), matematine viltimi (vidurkiu) vadiname skaičių

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \tag{8.14}$$

Norėdami, kad (8.14) sumos reikšmė nepriklausytų nuo to kokia tvarka esame išrikiavę aibės $\mathcal{X}$ narius, turime pareikalauti, kad konverguotų bet kuri (8.14) eilutės perstata ir visų eilutės perstatų ribos sutaptų. Tai ekvivalentu absoliutaus eilutės konvergavimo sąlygai (8.13), žr. [Kabaila].

Vidurkis $\mathbf{E}X$ priklauso tik nuo porų rinkinio $\{(x, P(X = x)),\ x \in \mathcal{X}\}$, tačiau nepriklauso nuo to kokia tvarka esame sunumeravę X reikšmes (aibės $\mathcal{X}$ narius).

Jei (8.13) sąlyga nėra patenkinta, atsitiktinio dydžio X vidurkio apibrėžti negalime.

PVZ 8.3. Puasono atsitiktinio dydžio X vidurkis

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

Čia keitėme sumavimo indeksą $j = k - 1$.

Teorema 8.6. *Tarkime X ir Y yra diskretieji atsitiktiniai dydžiai, o a, b yra realūs skaičiai.*
1) Jei X ir Y yra integruojami, tai diskretusis atsitiktinis dydis $Z = aX + bY$ yra integruojamas ir $\mathbf{E}Z = a\mathbf{E}X + b\mathbf{E}Y$.
2) Jei $X(\omega) \geq Y(\omega) \geq 0$ visiems $\omega \in \Omega$ ir X yra integruojamas, tai Y taip pat yra integruojamas ir $\mathbf{E}X \geq \mathbf{E}Y$.
3) Jei X yra integruojamas, tai $\mathbf{E}|X| \geq |\mathbf{E}X|$.

Toliau įrodome teoremos teiginius atskirai.

Teiginys 8.7. *Tarkime $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ yra aibės Ω skaidinys, $B_i \in \mathcal{F}$ visiems i ir $B_i \cap B_j = \emptyset$ visiems $i \neq j$. Atsitiktinis dydis*

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \mathbb{I}_{\{\omega \in B_i\}}$$

yra integruojamas tada ir tik tada, kai

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y_i| P(B_i) < \infty. \tag{8.15}$$

Šiuo atveju

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} y_i P(B_i). \tag{8.16}$$

Įrodymas. Skirtingus sekos $\{y_i\}$ narius surinkime į aibę $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ tokiu būdu. Turime $x_1 = y_1$, x_2 yra pirmasis sekos $y_2, y_3, \dots$ skaičius, kuris skiriasi nuo skaičiaus x_1 (tarkime $x_2 = y_i$), x_3 yra pirmasis sekos $y_{i+1}, y_{i+2}, \dots$ skaičius, kuris skiriasi nuo x_1 ir x_2, ir t.t. Gauname atsitiktinio dydžio X reikšmių aibę $\mathcal{X}$. Pažymėkime $A_j = \{\omega : X(\omega) = x_j\}$. Tuomet teisinga lygybė

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \mathbb{I}_{\{\omega \in A_j\}}$$

Mums reikia įrodyti, kad

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| P(A_j) < \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| P(B_i) < \infty. \tag{8.17}$$

Aišku, kad aibė A_j yra junginys tų B_k, kurioms $y_k = x_j$. Aibių rinkinys $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ skyla į aibių grupes $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2 \cup \dots$, kur grupę $\mathbf{B}_j$ sudaro tos aibės B_k, kurioms $y_k = x_j$. Grupės $\mathbf{B}_j$ narius žymėsime $B_{j1}, B_{j2}, \dots$, t.y., $\mathbf{B}_j = \{B_{j1}, B_{j2}, \dots\}$.

Kadangi $A_j = \cup_{k\geq 1} B_{jk}$, o rinkinio $\mathbf{B}$ elementai tarpusavyje nesikerta, tai

$$P(A_j) = \sum_{k\geq 1} P(B_{jk}).$$

Šios sumos dėmenų aibė gali būti baigtinė ar skaiti, nelygu kiek narių turi aibių rinkinys $\mathbf{B}_j$.

Įrodykime (8.17). Tarkime dešinė eilutė konverguoja, o jos sumą žymėkime b. Kairiosios eilutės konvergavimui įrodyti pakanka nustatyti, jog dalinių sumų seka

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} |x_j| P(A_j)$$

yra aprėžta. Parinkime skaičius n_j tokius, kad

$$|x_j| \Big(P(A_j) - \sum_{k=1}^{n_j} P(B_{jk}) \Big) < 2^{-j}.$$

Tuomet

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \Big(\sum_{k=1}^{n_j} P(B_{jk}) \Big) + \sum_{j=1}^{n} |x_j| \Big(P(A_j) - \sum_{k=1}^{n_j} P(B_{jk}) \Big).$$

Pirmąją sumą sudaro baigtinis skaičius dėmenų $|y_i|P(B_i)$ ir todėl jos reikšmė neviršija b. Antroji suma neviršija $2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n} \leq 1$. Gavome $a_n \leq b + 1$ visiems n. Taigi, seka $\{a_n\}$ yra aprėžta.

Tarkime, kad kairioji (8.17) eilutė konverguoja ir jos sumą žymėkime a. Dešiniosios eilutės konvergavimui įrodyti pakanka nustatyti, jog dalinių sumų seka

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} |y_i| P(B_i)$$

yra aprėžta. Sugrupuokime šios sumos dėmenis taip, kad į $j-$tą grupę patektų tie dėmenys $|y_i|P(B_i)$, kuriems $y_i = x_j$. Kadangi skirtingų grupių susidarys ne daugiau, nei n, gausime

$$b_n = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \Big(\sum_{B_i \in \mathbf{B}_j, i\leq n} P(B_i) \Big) \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| P(A_j).$$

Iš čia išplaukia nelygybės $b_n \le a$ visiems n. Taigi, seka $\{b_n\}$ yra aprėžta. (8.17) įrodymas baigtas. Iš nelygybių $b_n \le a$ visiems n išplaukia nelygybė

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |y_j| P(B_j) \le a = \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| P(A_i). \tag{8.17A}$$

Liko įrodyti (8.16) lygybę, t.y., lygybę

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j P(A_j) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i P(B_i). \tag{8.18}$$

Pažymėkime kairę ir dešinę sumą x^* ir y^*. Parodysime, kad kiekvienam (mažam) skaičiui $\varepsilon > 0$, $|x^* - y^*| < 2\varepsilon$. Iš čia išplaukia, kad $|x^* - y^*| = 0$, t.y., $x^* = y^*$.
Fiksuokime skaičių $\varepsilon > 0$. Kadangi abi (8.18) eilutės konverguoja absoliučiai, rasime skaičių N tokį, kad

$$\sum_{j>N} |x_j| P(A_j) < \varepsilon. \tag{8.19}$$

Nagrinėkime atvaizdį $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kuris apibrėžtas tokiu būdu: $y_j = x_{\varphi(j)}$. Jis skaičiui j priskiria tokį $i = \varphi(j)$, kuriam $y_j = x_i$. Išskaidome eilutę $y^* = \sum_{j=1}^{+\infty} y_j P(B_j)$ į dvi sumas

$$y^* = \tilde{y} + \overline{y}, \qquad \tilde{y} = \sum_j y_j \mathbb{I}_{\{\varphi(j) \le N\}} P(B_j), \qquad \overline{y} = \sum_j y_j \mathbb{I}_{\{\varphi(j) > N\}} P(B_j).$$

Samprotaudami, kaip ir nelygybės (8.17A) įrodyme, gauname nelygybę

$$\sum_j |y_j| \mathbb{I}_{\{\varphi(j) > N\}} P(B_j) \le \sum_{i>N} |x_i| P(A_i).$$

Pasinaudoję (8.19) nelygybe, darome išvadą, kad $|\overline{y}| \le \varepsilon$. Jei įrodytume, kad $\tilde{y} = x_N^*$, kur $x_N^* = \sum_{j=1}^N x_j P(A_j)$, tai iš nelygybių (8.19) ir $|\overline{y}| < \varepsilon$ išplauktų norima nelygybė $|x^* - y^*| < 2\varepsilon$. Lieka įrodyti (8.19A). Kadandgi $\sum_{j:\ \varphi(j)=i} P(B_j) = P(A_i)$ ir $y_j = x_{\varphi(j)}$, tai pažymėję $\tilde{y}_i = \sum_{j:\ \varphi(j)=i} y_j P(B_j)$ gauname

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i = \sum_{i=1}^N x_i \sum_{j:\ \varphi(j)=i} P(B_j) = \sum_{i=1}^N x_i P(A_i).$$

Įrodymas baigtas.

Teiginys 8.8. *Jei diskretusis atsitiktinis dydis X yra integruojamas, tai $\mathbf{E}|X| \geq |\mathbf{E}X|$.*

Įrodymas. Jei X reikšmės yra $x_1, x_2, \ldots$, tai a. dydžio $\omega \to |X(\omega)|$ reikšmės yra $|x_1|, |x_2|, \ldots$. Todėl yra teisinga lygybė

$$|X(\omega)| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \mathbb{I}_{\{\omega \in A_i\}},$$

kur aibės A_i yra apibrėžtos (8.12) formule. Dabar iš **8.7** teiginio išplaukia

$$\mathbf{E}|X| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(A_i).$$

Kadangi $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(A_i) \geq \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i)\right|$, gauname $\mathbf{E}|X| \geq |\mathbf{E}X|$.
Įrodymas baigtas.

Teiginys 8.9. *Tarkime, X ir Y yra integruojami diskretieji atsitiktiniai dydžiai, o a, b -realieji skaičiai. Tuomet a.d. $\omega \to aX(\omega) + bY(\omega)$ yra integruojamas ir yra teisinga lygybė*

$$\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}X + b\mathbf{E}Y. \tag{8.21}$$

Įrodymas. Pažymėkime atsitiktinių dydžių X ir Y reikšmių aibes $\mathcal{X} = \{x_1,\, x_2,\, \ldots\,\}$ ir $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \ldots\}$. Tuomet galime rašyti

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{I}_{A_i}(\omega), \qquad Y(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathbb{I}_{B_j}(\omega), \tag{8.22}$$

kur pažymėta

$$A_i = X^{-1}(\{x_i\}) \qquad \text{ir} \qquad B_j = Y^{-1}(\{y_j\}).$$

Atvaizdis $\omega \to aX(\omega)$ yra diskretusis atsitiktinis dydis, kurį žymime aX. Aišku,

$$aX(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} a x_i \mathbb{I}_{A_i}(\omega).$$

Kadangi eilutės $\sum_i x_i P(A_i)$ ir $\sum_i a x_i P(A_i)$ konverguoja ir diverguoja kartu, tai iš sąlygos $\mathbf{E}|X| < \infty$ išplaukia $\mathbf{E}|aX| < \infty$ ir turime lygybę

$$\mathbf{E}(aX) = \sum_{i=1}^{\infty} a x_i P(A_i) = a \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i) = a\mathbf{E}X. \tag{8.23}$$

Nagrinėkime atvaizdį $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$. Iš (8.22) išplaukia lygybė

$$Z(\omega) = x_i + y_j, \qquad \omega \in D_{ij}, \qquad \text{kur} \qquad D_{ij} = A_i \cap B_j.$$

Iš **8.7** teiginio išplauktų, kad Z yra integruojamas, jei skaičios aibės $\{|x_i + y_j|P(D_{ij}),\ i, j \geq 1\}$ narių suma būtų baigtinė. Aišku, pakanka įrodyti, kad skaičios aibės $\mathcal{B} = \{b_{ij} = (|x_i| + |y_j|)P(D_{ij}),\ i, j \geq 1\}$ narių suma yra baigtinė. Kadangi visi nariai teigiami, tai sumos reikšmė (ir faktas, kad suma baigtinė) nepriklauso nuo pasirinktos sumavimo tvarkos. Mes įrodysime, kad seka

$$h_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (|x_i| + |y_j|)P(D_{ij})$$

yra aprėžta. Kadangi ji monotoniškai didėja, tai iš aprėžtumo išplauks ir ribos egzistavimas. Kiekvienam n turime

$$\begin{aligned} h_n &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \Big(\sum_{j=1}^{n} P(D_{ij}) \Big) + \sum_{j=1}^{n} |y_j| \Big(\sum_{i=1}^{n} P(D_{ij}) \Big) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| P(A_i) + \sum_{j=1}^{n} |y_j| P(B_j) \leq a + b, \end{aligned}$$

kur skaičiai $a = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(A_i)$ ir $b = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| P(B_j)$. Taigi, aibės $\mathcal{B}$ narių suma baigtinė ir todėl a. d. Z yra integruojamas.

Įrodome (8.21) lygybę. Pakanka įrodyti, kad

$$\mathbf{E}Z = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y, \tag{8.24}$$

nes (8.21) lygybę lengvai gauname iš (8.23) ir (8.24) lygybių.

Įrodykime (8.24). Iš **8.7** teiginio išplaukia, kad integruojamo atsitiktinio dydžio Z vidurkis yra skaičios aibės $\mathcal{D} = \{d_{ij} = (x_i + y_j)P(D_{ij}),\ i, j \geq 1\}$ narių suma ir šios sumos reikšmė nepriklauso nuo pasirinktos sumavimo tvarkos. Mūsų pasirinkta sumavimo tvarka išrikiuoja aibės $\mathcal{D}$ narius abiejų indeksų didėjimo tvarka (imame "augantį" stačiakampi $i, j \leq n$, kur $n = 1, 2, \ldots$),

$$d_{11}, \quad d_{12}, d_{21}, d_{22}, \quad d_{13}, d_{23}, d_{33}, d_{31}, d_{32}, \quad d_{14}, \ldots.$$

Tuomet skaičius $\mathbf{E}Z$ yra sekos

$$z_n^* = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i + y_j)P(D_{ij})$$

riba. Įrodysime, kad kiekvienam (mažam) skaičiui $\varepsilon > 0$ galime rasti N tokį, kad

$$|z_n^* - (\mathbf{E}X + \mathbf{E}Y)| < 3\varepsilon, \qquad \text{kai} \qquad n \geq N. \tag{8.25}$$

Fiksuokime $\varepsilon > 0$. Jau žinome, kad kad aibės $\mathcal{B}$ elementų suma (pažymėkime ją S) yra baigtinė. Todėl atsiras skaičius M_1 toks, kad kai $n \geq M_1$,

$$0 \leq S - \sum_{i,j \leq n} b_{ij} < \varepsilon. \tag{8.26}$$

Kadangi X ir Y integruojami, tai atsiras M_2 toks, kad kai $n \geq M_2$,

$$|x_n^* - \mathbf{E}X| < \varepsilon \quad \text{ir} \quad |y_n^* - \mathbf{E}Y| < \varepsilon. \tag{8.27}$$

Čia

$$x_n^* = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i), \qquad y_n^* = \sum_{j=1}^n y_j P(B_j).$$

Pasirinkime $N = \max\{M_1, M_2\}$ ir nagrinėkime skirtumą, kai $n \geq N$,

$$(x_n^* + y_n^*) - z_n^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j>n} x_i P(D_{ij}) + \sum_{j=1}^n \sum_{i>n} y_j P(D_{ij}).$$

Pritaikę (8.26) nelygybę, gauname, kad dešinėje pusėje esančių sumų absoliutinis didumas neviršija

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j>n} |x_i| P(D_{ij}) + \sum_{j=1}^n \sum_{i>n} |y_j| P(D_{ij}) \leq \varepsilon.$$

Todėl

$$|z_n^* - (x_n^* + y_n^*)| < \varepsilon.$$

Galop pritaikę (8.27) nelygybę, gauname (8.25) nelygybę. Iš čia išplaukia (8.24). *Įrodymas baigtas.*

Teiginys 8.10. *Jei diskretieji atsitiktiniai dyžiai X, Y yra integruojami, ir $X(\omega) \geq Y(\omega)$, tai $\mathbf{E}X \geq \mathbf{E}Y$.*

Įrodymas. Kadangi $X(\omega) - Y(\omega) = |X(\omega) - Y(\omega)|$, tai pritaikę **8.9** teiginį (pirmoje lygybėje apačioje) ir **8.8** teiginį (pirmoje nelygybėje apačioje) gauname,

$$\mathbf{E}X - \mathbf{E}Y = \mathbf{E}(X - Y) = \mathbf{E}|X - Y| \geq |\mathbf{E}(X - Y)| \geq 0.$$

Įrodymas baigtas.

Teiginys 8.11. *Tarkime, X, Y yra diskretieji atsitiktiniai dydžiai tokie, kad*

$$X(\omega) \geq Y(\omega) \geq 0, \qquad \omega \in \Omega. \tag{8.28}$$

Jei X yra integruojamas, tai ir Y yra integruojamas.

Įrodymas. Naudosime žymėjimą (8.22). Tuomet kiekvienai indeksų porai i, j turime

$$X(\omega) = x_i \qquad \text{ir} \qquad Y(\omega) = y_j, \qquad \text{kai} \qquad \omega \in A_i \cap B_j.$$

Kadangi a.d. X integruojamas, iš **8.7** teiginio išplaukia, kad skaičių aibės $\{x_i \times P(A_i \cap B_j), i, j = 1, 2, \dots\}$ narių suma yra baigtinė. Iš (8.28) išplaukia nelygybės $x_i \times P(A_i \cap B_j) \geq y_j \times P(A_i \cap B_j)$. Taigi ir aibės $\{y_j \times P(A_i \cap B_j), i, j = 1, 2, \dots\}$ narių suma yra baigtinė. Pasirėmę **8.7** teiginiu darome išvadą, kad Y yra integruojamas.
Įrodymo pabaiga.

8.3. Atsitiktinio dydžio vidurkis.
Tarsime, kad visi šio skyrelio atsitiktiniai dydžiai yra apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Bet kuriam a.d. X sukonstruosime diskretųjį atsitiktinį dydį X_ε tokį, kad

$$X(\omega) \leq X_\varepsilon(\omega) \leq X(\omega) + \varepsilon, \qquad \text{visiems} \quad \omega \in \Omega. \tag{8.29}$$

Išskaidome realiųjų skaičių aibę į ε ilgio intervalus

$$\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} I_n, \qquad I_n = (\,(n-1)\varepsilon,\, n\varepsilon].$$

Čia $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ žymi sveikųjų skaičių aibę. Apibrėžiame

$$X_\varepsilon(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n\varepsilon \mathbb{I}_{\{\omega \in A_n\}}, \qquad A_n = X^{-1}(I_n) = \{\omega :\ X(\omega) \in I_n\}. \tag{8.30}$$

Aišku, kad (8.29) nelygybės yra patenkintos.
APB 8.3. Sakome, kad atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ tolygiai konverguoja į a.d. X, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ galima rasti toki (didelį) skaičių N, kad visiems $n > N$

$$|X(\omega) - X_n(\omega)| < \varepsilon \qquad \text{visiems} \quad \omega \in \Omega. \tag{8.31}$$

Teorema 8.12. *Tarkime, $\{X_n\}$ ir $\{Y_n\}$ yra integruojamų diskrečiųjų a.d. sekos, tolygiai konverguojančios į a.d. X. Tuomet skaičių sekos $\{\mathbf{E}X_n\}$ ir $\{\mathbf{E}Y_n\}$ konverguoja ir jų ribos sutampa.*

Įrodymas. Iš (8.31) išplaukia, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ atsiras toks N, kad visiems $n, m > N$ turime

$$|X_n(\omega) - X_m(\omega)| \leq |X_n(\omega) - X(\omega)| + |X(\omega) - X_m(\omega)| < 2\varepsilon, \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Iš **8.6** Teoremos 1) ir 3) teiginių išplaukia nelygybės

$$|\mathbf{E}X_n - \mathbf{E}X_m| = |\mathbf{E}(X_n - X_m)| \leq \mathbf{E}|X_n - X_m| \leq 2\varepsilon.$$

Gauname, kad $\{\mathbf{E}X_n\}$ yra Koši seka ir todėl konverguoja. Tas pats samprotavimas tinka ir sekai $\{\mathbf{E}Y_n\}$.
Iš (8.31) išplaukia, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ atsiras toks N, kad visiems $n, m > N$ turime

$$|X_n(\omega) - Y_n(\omega)| \leq |X_n(\omega) - X(\omega)| + |X(\omega) - Y_n(\omega)| < 2\varepsilon, \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Iš **8.6** Teoremos 1) ir 3) teiginių išplaukia nelygybės

$$|\mathbf{E}X_n - \mathbf{E}Y_n| = |\mathbf{E}(X_n - Y_n)| \leq \mathbf{E}|X_n - Y_n| \leq 2\varepsilon.$$

Darome išvadą, kad sekų $\{\mathbf{E}X_n\}$ ir $\{\mathbf{E}Y_n\}$ ribos sutampa.
Įrodymas baigtas.
APB 8.4. Sakome, kad a.d. X yra integruojamas, jei egzistuoja diskrečiųjų integruojamų a.d. seka $\{X_n\}$, kuri tolygiai konverguoja į X. Integruojamo a.d. X vidurkiu (matematine viltimi) vadiname sekos $\{\mathbf{E}X_n\}$ ribą. Vidurkį žymime

$$\mathbf{E}X = \int X(\omega)P(d\omega).$$

Pastaba. **1.** Kiekvienai mažėjančiai skaičių sekai $\varepsilon_n \downarrow 0$ diskrečiųjų atsitiktinių dydžių seka $\{X_{\varepsilon_n}\}$, apibrėžta formule (8.30) tolygiai konverguoja į a.d. X. Tačiau ne kiekvienam a.d. X sekos nariai X_{ε_n} bus integruojami.
2. Diskrečiajam a. d. X vidurkį esame apibrėžę anksčiau. Pritaikę jam naująjį apibrėžimą, gauname tą patį skaičių $\mathbf{E}X = \sum_i x_i P(X = x_i)$.

Teiginys 8.13. *Atsitiktinis dydis X yra integruojamas tada ir tik tada, kai a. d. $|X|$ yra integruojamas.*

Tą faktą, kad a.d. X yra integruojamas, žymime $\mathbf{E}|X| < \infty$.

Įrodymas. Jei a.d. X yra integruojamas, tai atsiras diskrečiųjų integruojamų a.d. seka $\{X_n\}$ tenkinanti (8.31). Diskretieji a.d. $\omega \to |X_n(\omega)|$ taip pat yra integruojami, o iš nelygybių (8.31) ir

$$\big||X_n(\omega)| - |X(\omega)|\big| \leq |X_n(\omega) - X(\omega)|$$

išplaukia, kad seka $\{|X_n|\}$ tolygiai konverguoja į $|X|$. Taigi, remiantis APB 8.4, a.d. $|X|$ yra integruojamas.

Jei a.d. $|X|$ yra integruojamas, tai atsiras diskrečiųjų integruojamų a.d. seka $\{Y_n\}$, kuri tolygiai konverguoja į $|X|$. Užrašykime $X(\omega) = |X(\omega)|\mathbb{I}^*(\omega)$, kur $\mathbb{I}^*(\omega) = 1$, kai $X(\omega) > 0$ ir kur $\mathbb{I}^*(\omega) = -1$, kai $X(\omega) \leq 0$. Diskretieji a.d. $X_n = Y_n\mathbb{I}^*$ yra integruojami (nes Y_n integruojami) visiems $n = 1, 2, \ldots$. Be to, iš tapatybės

$$X(\omega) - X_n(\omega) = \big(|X(\omega)| - Y_n(\omega)\big)\mathbb{I}^*(\omega)$$

išplaukia nelygybė $|X(\omega) - X_n(\omega)| \leq \big||X(\omega)| - Y_n(\omega)\big|$. Iš šios nelygybės darome išvadą, kad seka $\{X_n\}$ tolygiai konverguoja į X.

Įrodymas baigtas.

Teorema 8.14. *Tarkime, X ir Y yra integruojami atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

1) Tarkime, $a, b \in \mathbb{R}$. Tuomet atsitiktinis dydis $Z = aX + bY$ yra integruojamas ir $\mathbf{E}Z = a\mathbf{E}X + b\mathbf{E}Y$.

2) Tarkime $X(\omega) \leq Y(\omega)$ visiems $\omega \in \Omega$. Tuomet $\mathbf{E}X \leq \mathbf{E}Y$.

3) Teisinga nelygybė $|\mathbf{E}X| \leq \mathbf{E}|X|$.

4) Tarkime a.d. T tenkina nelygybę $|T(\omega)| \leq |X(\omega)|$ visiems $\omega \in \Omega$. Tuomet T yra integruojamas.

Įrodymas. Teiginys yra teisingas diskretiesiems dydžiams, žr. **8.6** teoremą. Kadangi bet kurių a.d. X, Y, Z vidurkių reikšmės yra atitinkamų diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkių sekų ribos, tai perėję **8.6** teoremos teiginiuose prie atitinkamų diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkių sekų ribų, gausime teiginius 1)-4).

Teiginys 8.15. *Tarkime, kad X yra integruojamas a.d., o aibė $B \in \mathcal{F}$ turi tikimybę $P(B) = 1$. Tuomet atsitiktinis dydis $\omega \to X(\omega)\mathbb{I}_{\{\omega \in B\}}$ yra integruojamas ir $\mathbf{E}X\mathbb{I}_B = \mathbf{E}X$.*

Įrodymas. Pritaikę 8.14 teiginio 4) punktą, iš nelygybės $|X(\omega)\mathbb{I}_{\{\omega \in B\}}| \leq |X(\omega)|$ darome išvadą, kad atsitiktinis dydis $\omega \to X(\omega)\mathbb{I}_{\{\omega \in B\}}$ yra integruojamas. Tuomet integruojamas ir atsitiktinis dydis $Z = X - X\mathbb{I}_B$. Sudarome diskrečiųjų a.d. seką Z_{ε_n} su $\varepsilon_n \downarrow 0$, kuri tolygiai konverguoja į Z, žr. (8.30). Kadangi $P(Z = 0) = 1$, tai visos tikimybės $P_k := P(\varepsilon_n(k-1) < Z \leq \varepsilon_n k)$ lygios 0, kai $k \neq 0$ ir $P_0 = 1$. Todėl

$\mathbf{E}Z_{\varepsilon_n} = 0$ visiems n. Iš vidurkio apibrėžimo išplaukia lygybė $\mathbf{E}Z = 0$. Gavome $0 = \mathbf{E}(X - X\mathbb{I}_B) = \mathbf{E}X - \mathbf{E}X\mathbb{I}_B$. Taigi, $\mathbf{E}X\mathbb{I}_B = \mathbf{E}X$.
Įrodymas baigtas.

Pastaba. Tarkime, X yra integruojamas atsitiktinis dydis.
1. Nagrinėkime diskretųjį a.d. X_ε, apibrėžtą (8.30) formule. Kadangi $|X_\varepsilon(\omega)| \leq |X(\omega)| + \varepsilon$, o a.d. $X + \varepsilon$ yra integruojamas, tai X_ε taip pat integruojamas. Turime

$$\mathbf{E}X_\varepsilon = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon k\, \mathbf{P}(\varepsilon(k-1) < X \leq \varepsilon k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon k \left(F_X(\varepsilon k) - F_X(\varepsilon(k-1))\right) \tag{8.32}$$

Dešinėje pusėje esančios sumos riba, kai $\varepsilon \downarrow 0$, yra žymima

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x).$$

Ėmę seką $\varepsilon_n \downarrow 0$, gausime diskrečiųjų a.d. seką $\{X_{\varepsilon_n}\}$, kuri tolygiai konverguoja į X. Todėl iš **APB 8.4** išplaukia lygybė

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x).$$

2. Jei pasiskirtymo funkcija F_X yra absoliučiai tolydžioji, o f yra jos tankio funkcija, tai

$$F_X(\varepsilon k) - F_X(\varepsilon(k-1)) = \int_{\varepsilon(k-1)}^{\varepsilon k} f(x)dx.$$

Šiuo atveju dešiniosios (8.32) pusės riba yra $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$. Taigi,

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$$

Jei a.d. X pasiskirstymo funkcija F_X yra absoliučiai tolydžiosios pasiskirstymo funkcijos F_A ir diskrečiosios pasiskirstymo funkcijos F_D mišinys, t.y., atsiras neneigiami skaičiai p_A ir p_D, tenkinantys lygybę $p_A + p_D = 1$ tokie, kad

$$F_X(x) = p_A F_A(x) + p_D F_D(x), \tag{8.33}$$

tai

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x) &= p_A \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_A(x) + p_D \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_D(x) \\ &= p_A \int_{-\infty}^{+\infty} x f_A(x)dx + p_D \sum_i x_i p_i^*. \\ &= p_A \int_{-\infty}^{+\infty} x f_A(x)dx + \sum_i x_i p_i. \end{aligned}$$

Čia f_A yra pasiskirstymo funkcijos F_A tankio funkcija, o skaičiai $p_i^* = P_D(\{x_i\})$ yra tikimybės, kurias realiosios tiesės taškams $\{x_i\}$ priskiria diskrečiąją pasiskirstymo funkciją F_D atitinkantis tikimybinis matas (jį žymime) P_D. Be to,

$$p_i = P(X = x_i) = F_X(x_i) - \lim_{t \downarrow 0} F_X(x_i - t) = p_D p_i^*.$$

3. Jei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra tokia Borelio funkcija, kad a.d. $\omega \to g(X(\omega))$ (jį žymime $g(X)$) yra integruojamas, tai $\mathbf{E}g(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x)$ ir, jei F_X tenkina (8.33) lygybę,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}g(X) &= p_A \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_A(x) dx + p_D \sum_i g(x_i) p_i^* \\ &= p_A \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_A(x) dx + \sum_i g(x_i) p_i.\end{aligned}$$

Šių faktų griežtą įrodymą galima rasti [Kubilius], [Dudley].

PVZ 8.4 Standartinio normaliojo a. dydžio X vidurkis

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx + \int_{-\infty}^0 x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx - \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 0.\end{aligned}$$

Eksponentinio a. dydžio X vidurkis

$$\mathbf{E}X = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = -e^{-x}(1+x)\Big|_0^{\infty} = 1.$$

9. Atsitiktinio dydžio momentai. Dispersija.

Jei kas paklaustų kiek žmogus uždirba Lietuvoje, tikriausiai atsakymui pateiktume vidutinio uždarbio dydį. Suprantama, kad toks atsakymas nedaug pasako apie galimus uždarbius, kurie yra labai skirtingi ir priklauso nuo daugelio dalykų (specialybės, išsilavinimo, amžiaus, regiono ir t.t.). Panašiai, norėdami vienu skaičiumi aprašyti atsitiktinio dydžio X reikšmes, galime naudoti vidurkį EX. Kokia charakteristika galėtų aprašyti atsitiktinio dydžio reikšmių išsibarstymą apie vidurkį? Kokia charakteristika galėtų aprašyti reikšmių asimetriją? Patogūs parametrai yra atsitiktinio dydžio momentai, kuriuos apibrėšime šiame skyrelyje.

Tarsime, kad čia nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai yra apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Kadangi atvaizdis $x \to x^n$ yra Borelio funkcija, tai atsitiktinio dydžio X laipsnis $\omega \to X^n(\omega)$ taip pat yra atsitiktinis dydis, ir galima nagrinėti jo vidurkį.

APB 9.1 Jei atsitiktinis dydis $\omega \to X^n(\omega)$ yra integruojamas (tą faktą žymime $\mathbf{E}|X|^n < \infty$), tai jo vidurkį $\mathbf{E}X^n$ vadiname a.dydžio X $n-$tos eilės momentu. Skaičių $\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^n$ vadiname $n-$tos eilės centriniu momentu. Vidurkį $\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2$ vadiname atsitiktinio dydžio X dispersija ir žymime DX.

Atsitiktinio dydžio dispersija yra patogus jo reikšmių išsibarstymo apie vidurkį $\mathbf{E}X$ matas. 9.3 teorema teigia, kad $DX = 0$ tada ir tik tada, kai atsitiktinis dydis X įgyja tik vieną reikšmę $C = \mathbf{E}X$, t.y., $P(X = C) = 1$.
Vidurkis $\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^3$ yra interpretuojamas, kaip a. dydžio X asimetrijos matas. Simetriniams a. dydžiams šio centrinio momento reikšmė yra 0.

Teorema 9.1 (Markovo nelygybė). *Tarkime, kad Y yra integruojamas atsitiktinis dydis, o skaičius $A > 0$. Tuomet teisinga nelygybė*

$$P(|Y| \geq A) \leq A^{-1}\mathbf{E}|Y|. \tag{9.1}$$

Įrodymas. Nagrinėkime atsitiktinius dydžius

$$X(\omega) = \mathbb{I}_{\{\omega:\ |Y(\omega)| \geq A\}}, \qquad Z(\omega) = A^{-1}|Y(\omega)|X(\omega).$$

Nesunku matyti, kad visiems $\omega \in \Omega$ yra teisingos nelygybė

$$A^{-1}|Y(\omega)| \geq Z(\omega) \geq X(\omega).$$

Todėl iš 8.14 teoremos išplaukia nelygybės

$$\mathbf{E}(A^{-1}|Y|) \geq \mathbf{E}Z \geq \mathbf{E}X. \tag{9.2}$$

Kadangi $\mathbf{E}X = P(|Y| \geq A)$, iš (9.2) nelygybių gauname (9.1).
Įrodymas baigtas.

Teorema 9.2 (Čebyševo nelygybė). *Tarkime, kad X yra atsitiktinis dydis ir $\mathbf{E}X^2 < \infty$. Tuomet bet kuriam skaičiui $C > 0$ teisinga nelygybė*

$$P(|X - \mathbf{E}X| \geq C) \leq C^{-2}DX. \tag{9.3}$$

Įrodymas. Kadangi $P(|X - \mathbf{E}X| \geq C) = P(|X - \mathbf{E}X|^2 \geq C^2)$, tai nelygybę (9.3) gauname pritaikę Markovo nelygybę atsitiktiniam dydžiui $Y = (X - \mathbf{E}X)^2$.
Įrodymas baigtas.

Teorema 9.3. *Tarkime, kad X yra atsitiktinis dydis ir $\mathbf{E}X^2 < \infty$. Tuomet teisingi tokie teiginiai.*
(i) $DX = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2$.
(ii) Bet kuriam skaičiui $c \in \mathbb{R}$ teisinga lygybė $D(cX) = c^2 DX$.
(iii) Bet kuriam skaičiui $c \in \mathbb{R}$ teisinga lygybė $D(X + c) = DX$.
(iv) Jei atsiras toks skaičius $c \in \mathbb{R}$, kad būtų teisinga lygybė $P(X = c) = 1$, tai $DX = 0$.
(v) Jei $DX = 0$, tai $P(X = c) = 1$, kur $c = \mathbf{E}X$.

Įrodymas. Pažymėkime $\mathbf{E}X = a$.
(i) išplaukia iš lygybių

$$\begin{aligned} DX &= \mathbf{E}(X-a)^2 = \mathbf{E}(X^2 - 2aX + a^2) = \mathbf{E}X^2 - \mathbf{E}2aX + \mathbf{E}a^2 \\ &= \mathbf{E}X^2 - 2a\mathbf{E}X + a^2 = \mathbf{E}X^2 - 2a^2 + a^2 = \mathbf{E}X^2 - a^2. \end{aligned}$$

(ii) išplaukia iš (i) ir lygybių $\mathbf{E}(cX)^2 = c^2\mathbf{E}X^2$ ir $\mathbf{E}cX = c\mathbf{E}X$.
(iii) išplaukia iš lygybių

$$D(X + c) = \mathbf{E}\big((X + c) - \mathbf{E}(X + c)\big)^2 = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2.$$

(iv) Jei $P(X = c) = 1$ tai $P(X^2 = c^2) = 1$ ir todėl $\mathbf{E}X = c$ ir $\mathbf{E}X^2 = c^2$. Iš (i) turime $DX = c^2 - c^2 = 0$.
(v) Įrodysime, kad $P(X \neq a) = 0$. Kadangi $P(X \neq a) = P(X \in \mathbb{R} \setminus \{a\})$, ir

$$\mathbb{R} \setminus \{a\} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad \text{kur} \qquad A_n = \mathbb{R} \setminus [a - n^{-1}, a + n^{-1}], \quad n = 1, 2, \ldots$$

yra monotoninė aibių seka, tai, pritaikę 3.2. teoremą skirstiniui P_X, gauname

$$\lim_n P(X \in A_n) = P(\mathbb{R} \setminus \{a\}). \tag{9.4}$$

Iš Čebyševo nelygybės

$$P(X \in A_n) = P(|X - a| > n^{-1}) \leq n^2 DX = 0.$$

Todėl (9.4) riba lygi 0.
Įrodymas baigtas.

APB 9.2. Tarkime, X ir Y yra atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Atsitiktinio dydžio $\omega \to (X(\omega) - \mathbf{E}X)(Y(\omega) - \mathbf{E}Y)$ vidurkį $\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y)$ vadiname atsitiktinių dydžių X ir Y kovariacija. Žymime $cov(X, Y) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y)$.

Teiginys 9.4. *Teisingos lygybės*

$$(i) \quad cov(X,Y) = \mathbf{E}X\,Y - \mathbf{E}X\ \mathbf{E}Y,$$
$$(ii) \quad D(X+Y) = DX + 2\ cov(X,Y) + DY.$$

Įrodymas. Pažymėkime $a = \mathbf{E}X$ ir $b = \mathbf{E}Y$.
(i) išplaukia iš lygybių

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X-a)(Y-b) &= \mathbf{E}(XY - aY - bX + ab) = \mathbf{E}XY - a\mathbf{E}Y - b\mathbf{E}X + ab\\ &= \mathbf{E}XY - ab - ba + ab = \mathbf{E}XY - ab.\end{aligned}$$

(ii) išplaukia iš lygybių

$$\begin{aligned}D(X+Y) &= \mathbf{E}\Big(X+Y-\mathbf{E}(X+Y)\Big)^2 = \mathbf{E}\Big((X-\mathbf{E}X)+(Y-\mathbf{E}Y)\Big)^2\\ &= \mathbf{E}\Big((X-\mathbf{E}X)^2 + 2(X-\mathbf{E}X)(Y-\mathbf{E}Y) + (Y-\mathbf{E}Y)^2\Big)\\ &= DX + 2cov(X,Y) + DY.\end{aligned}$$

Įrodymas baigtas.

APB. 9.3. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai X ir Y turi teigiamas dispersijas. Santykį

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX\ DY}}$$

vadiname atsitiktinių dydžių X ir Y koreliacijos koeficientu.

Koreliacijos koeficientas naudojamas kaip dydžių (statistinės) priklausomybės matas. Sakoma, kad du atsitiktiniai dydžiai yra priklausomi, jei jų reikšmės susiję. Pvz. metame kauliuką ir fiksuojame du parametrus: atsitiktinis dydis X žymi atsivertusių akučių skaičių; atsitiktinis dydis $Y = 1$, kai atsivertusių akučių skaičius lyginis, ir $Y = 0$ kai atsivertusių akučių skaičius nelyginis. Šių atsitiktinių dydžių reikšmės yra susiję. Nesunkiai randame koreliacijos koeficientą $\rho(X,Y) \approx 0.293$.
Galima įrodyti, žr. Koši-Švarco nelygybę žemiau, kad $|\rho(X,Y)| \le 1$. Didesnės koreliacijos koeficiento reikšmės atspindi stipresnę atsitiktinių dydžių reikšmių priklausomybę.

PVZ 9.1. Puasono atsitiktinio dydžio X su skirstiniu $\mathcal{P}(\lambda)$ dispersija. Pradžioje suskaičiuosime antrą momentą

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X^2 &= \sum_{k\ge 0} k^2 P(X=k) = \sum_{k\ge 1} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\\ &= \lambda \sum_{j\ge 0} (j+1)\frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{j\ge 0} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} + \lambda \sum_{j\ge 0} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}\\ &= \lambda \cdot \mathbf{E}X + \lambda \cdot 1 = \lambda^2 + \lambda.\end{aligned}$$

Čia atlikome kintamųjų keitimą $k = j + 1$ ir vėliau pritaikėme jau įrodytą lygybę $\mathbf{E}X = \lambda$. Dabar nesunkiai randame dispersiją $DX = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \lambda$.

PVZ 9.2. Standartinio normaliojo dydžio antrasis momentas ir dispersija. Pažymėję standartinio normaliojo skirstinio tankį $p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, galime rašyti

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 p(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot u e^{-u^2/2} du \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} u e^{-u^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du \\ &= 0 + 1 = 1.\end{aligned}$$

Dabar nesunkiai randame $DX = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = 1 - 0^2 - 1$.

Pratimas. Tarkime, X yra standartinis normalusis a.d. Raskite atsitiktinio dydžio $Y = aX + b$ vidurkį ir dispersiją. Raskite eksponentinio atsitiktinio dydžio Y dispersiją DY ir momentus $\mathbf{E}Y^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Pastaba. Tarkime, kad X ir Y yra atsitiktiniai dydžiai, o teigiami skaičiai p, q tenkina lygybę $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(i) Jei $\mathbf{E}X^2 < \infty$ ir $\mathbf{E}Y^2 < \infty$, tai teisinga Koši-Švarco nelygybė

$$\mathbf{E}|XY| \leq (\mathbf{E}X^2)^{1/2} (\mathbf{E}Y^2)^{1/2}.$$

(ii) Jei $\mathbf{E}|X|^p < \infty$ ir $\mathbf{E}|Y|^q < \infty$, tai teisinga Hiolderio nelygybė

$$\mathbf{E}|XY| \leq (\mathbf{E}|X|^p)^{1/p} (\mathbf{E}|Y|^q)^{1/q}.$$

Įrodymą galima rasti [Dudley].

10. Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

Laikysime, kad šio skyrelio atsitiktiniai dydžiai yra apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

APB 10.1. Atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra vadinami nepriklausomais, jei bet kurioms Borelio aibėms $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ įvykiai $X^{-1}(A) = \{\omega : X(\omega) \in A\}$ ir $X^{-1}(B) = \{\omega : Y(\omega) \in B\}$ yra nepriklausomi, t.y.

$$P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = P(X^{-1}(A)) P(Y^{-1}(B)).$$

Tą pačią lygybę galime užrašyti taip

$$P(X \in A,\ Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B). \tag{10.1}$$

Pastaba **1.** Tarkime, kad X ir Y yra diskretieji atsitiktiniai dydžiai, o $\{x_1, x_2, ...\}$ ir $\{y_1, y_2,\ ...\}$ žymi jų reikšmių aibes. Tuomet (10.1) lygybė yra teisinga visoms Borelio aibėms A, B tada ir tik tada, kai visoms poroms (x_i, y_j) yra teisinga lygybė

$$P(X = x_i,\ Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j). \tag{10.2}$$

Pratimas: įrodykite **1** pastabos teiginį.

Pastaba **2**. Tarkime, X ir Y yra nepriklausomi a. d., o $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra Borelio funkcijos. Tuomet atsitiktiniai dydžiai $f(X)$ ir $g(Y)$ yra nepriklausomi.
Įrodymas.

$$\begin{aligned} P(f(X) \in A,\ g(Y) \in B) &= P(X \in f^{-1}(A),\ Y \in g^{-1}(B)) \\ &= P(X \in f^{-1}(A))P(Y \in g^{-1}(B)) \\ &= P(f(X) \in A)P(g(Y) \in B). \end{aligned}$$

PVZ 10.1. Du kartus metame kauliuką. Pirmojo metimo akučių skaičių žymime X, o antrojo metimo akučių skaičių žymime Y. Kadangi bet kuriai porai $(i, j) \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$ turime

$$P(X = i, Y = j) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = P(X = i)P(Y = j),$$

tai atsitiktiniai dydžiai X ir Y tenkina (10.2) lygybę. Taigi, X ir Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

APB 10.1 (tęsinys). Atsitiktinius dydžius $X_1, \dots, X_k$ (apibrėžtus $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) vadiname nepriklausomais, jei bet kuriam Borelio aibių rinkiniui $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ įvykiai $X_1^{-1}(B_1), \dots, X_k^{-1}(B_k)$ yra nepriklausomi.

PVZ 10.2. Nagrinėkime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kur $\Omega = [0, 1)$, aibių $\sigma-$algebrą $\mathcal{F}$ sudaro tos Borelio aibės, kurios yra intervalo $[0, 1)$ poaibiai. Tikimybinis matas P yra Lebego matas, t.y., matas, kuris intervalams $[a, b] \subset [0, 1)$ priskiria tikimybes $P([a, b]) = b - a$.

Apibrėžiame atsitiktinius dydžius $X_i : [0, 1) \to \mathbb{R}$ tokiu būdu

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= \mathbb{I}_{\{2^{-1} \le \omega < 1\}}, \\ X_2(\omega) &= \mathbb{I}_{\{2^{-2} \le \omega < 2^{-1}\}} + \mathbb{I}_{\{2^{-1}+2^{-2} \le \omega < 1\}}, \\ X_3(\omega) &= \mathbb{I}_{\{2^{-3} \le \omega < 2^{-2}\}} + \mathbb{I}_{\{2^{-2}+2^{-3} \le \omega < 2^{-1}\}} \\ &\quad + \mathbb{I}_{\{2^{-1}+2^{-3} \le \omega < 2^{-1}+2^{-2}\}} + \mathbb{I}_{\{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3} \le \omega < 1\}}. \end{aligned}$$

Nesunku patikrinti (tebus tai pratimas), kad atsitiktiniai dydžiai X_1, X_2, X_3 yra nepriklausomi.

PIEŠINYS

APB 10.1 (tęsinys). Nagrinėkime atsitiktinių dydžių (apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) rinkinį $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$. Čia Λ yra indeksų aibė. Jei bet kuriam baigtiniam indeksų rinkiniui $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Lambda$ atsitiktiniai dydžiai $X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_k}$ yra nepriklausomi, tai $\{X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ vadiname nepriklausomų įvykių rinkiniu (sistema).

PVZ 10.2 (tęsinys). Fiksavę $\omega \in [0,1)$ nagrinėkime šio skaičiaus dvejetainį skleidinį:

$$\omega = x_1 2^{-1} + x_2 2^{-2} + x_3 2^{-3} + \cdots , \tag{10.3}$$

kur skaičiai $x_i \in \{0,1\}$ yra dvejetainio skleidinio koeficientai. Nesunku matyti, kad $x_1 = X_1(\omega)$, $x_2 = X_2(\omega)$, $x_3 = X_3(\omega)$. Dabar matome, kaip galėtume apibrėžti atvaizdžius $\omega \to X_n(\omega)$, kai $n = 4, 5, 6, \dots$. $X_n(\omega)$ yra skaičiaus ω dvejetainio skleidinio koeficientas prie dvejeto laipsnio 2^{-n}. Galima įrodyti, kad gauta atsitiktinių dydžių seka $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ sudaro nepriklausomų atsitiktinių dydžių rinkinį. Tai Bernulio atsitiktiniai dydžiai su tikimybėmis $P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = 2^{-1}$.

PVZ 10.3. Tarkime $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ yra nepriklausomų Bernulio atsitiktinių dydžių seka ir kiekvienam i tikimybės $P(\varepsilon_i = 1) = p$ ir $P(\varepsilon_i = 0) = 1 - p$. Tarsime, kad šie atsitiktiniai dydžiai yra apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Fiksavę elementarųjį įvykį $\omega \in \Omega$, nagrinėkime skaičių seką $\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega), \dots$. Šios sekos nariai yra aibės $\{0,1\}$ elementai. Nulių skaičių sekos pradžioje, iki pirmą kartą pasirodant vienetukui, žymėkime $Y(\omega)$. Jei

$$\varepsilon_1(\omega) = 0, \quad \varepsilon_2(\omega) = 0, \quad \varepsilon_3(\omega) = 1, \quad \varepsilon_4(\omega) = 0, \dots,$$

tai $Y(\omega) = 2$. Jei $\varepsilon_1(\omega) = 1, \varepsilon_2(\omega) = 0, \dots$, tai $Y(\omega) = 0$. Gauname atsitiktinį dydį Y, kuris įgyja reikšmes $0, 1, 2, \dots$. Jo skirstinys

$$\begin{aligned}
&P(Y = 0) = P(\varepsilon_1 = 1) = p, \\
&P(Y = 1) = P(\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 1) = p(1-p), ... \\
&P(Y = k) = P(\varepsilon_1 = 0, \dots, \varepsilon_k = 0,\ \varepsilon_{k+1} = 1) = p(1-p)^k, \dots .
\end{aligned}$$

Atsitiktinį dydį Y su skirstiniu $P(Y = k) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, vadiname geometriniu. Pratimas: rasti geometrinio atsitiktinio dydžio vidurkį ir dispersiją.

Teorema 10.1. *Tarkime, X ir Y yra nepriklausomi integruojami atsitiktiniai dydžiai (apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$). Tuomet atsitiktinis dydis $Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$ yra integruojamas ir*

$$\mathbf{E}Z = \mathbf{E}X \ \mathbf{E}Y. \tag{10.4}$$

Įrodymas. Pradžioje teoremą įrodysime diskretiesiems atsitiktiniams dydžiams X ir Y. Juos galime užrašyti taip

$$X(\omega) = \sum_i x_i \mathbb{I}_{\{\omega \in A_i\}}, \qquad Y(\omega) = \sum_j y_j \mathbb{I}_{\{\omega \in B_j\}},$$

kur $\{x_i\}$ yra skirtingų a.d. X reikšmių seka, o $\{y_j\}$ yra skirtingų a.d. Y reikšmių seka ir

$$A_i = \{\omega : \ X(\omega) = x_i\}, \qquad B_j = \{\omega : \ Y(\omega) = y_j\}.$$

Kadangi $\mathbf{E}|X| < \infty$ ir $\mathbf{E}|Y| < \infty$, tai sumos $\sum_i |x_i| P(A_i)$ ir $\sum_j |y_j| P(B_j)$, jei tik jos turi begalinį skaičių narių, konverguoja, t.y.,

$$\sum_i |x_i| \ P(A_i) < \infty, \qquad \sum_j |y_j| \ P(B_j) < \infty. \tag{10.5}$$

Iš čia išplaukia, kad skaičių $|x_i y_j| P(A_i) P(B_j)$, kur $i, j = 1, 2, \ldots,$ suma yra baigtinė, t.y.

$$\sum_i \sum_j |x_i y_j| P(A_i) P(B_j) < \infty. \tag{10.6}$$

Norėdami įrodyti (10.6), nagrinėkime sandaugą

$$\begin{aligned} \sum_i |x_i| \ P(A_i) \times \sum_j |y_j| \ P(B_j) &= \sum_i \Big(|x_i| \ P(A_i) \times \sum_j |y_j| \ P(B_j) \Big) \\ &= \sum_i \sum_j \Big(|x_i| \ P(A_i) \times |y_j| \ P(B_j) \Big). \end{aligned}$$

Čia pasinaudojome tuo faktu, kad $\sum_i c a_i = c \sum_i a_i$. Tokiu būdu (10.6) išplaukia iš (10.5).

Kadangi atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, tai $P(X = x_i, \ Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j)$, arba

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i) P(B_j). \tag{10.7}$$

Todėl iš (10.6) išplaukia, kad skaičių $|x_i y_j| P(A_i \cap B_j)$, kur $i, j = 1, 2, \ldots$, suma yra baigtinė, t.y.,

$$\sum_i \sum_j |x_i y_j| P(A_i \cap B_j) < \infty. \tag{10.8}$$

Atsitiktinį dydį Z galime užrašyti tokiu būdu

$$Z(\omega) = \sum_i \sum_j x_i y_j \mathbb{I}_{\{\omega \in A_i \cap B_j\}}. \tag{10.9}$$

Pritaikę **8.7** teiginį ir pasirėmę nelygybe (10.8) darome išvadą, kad a.d. Z yra integruojamas. Iš **8.7** teiginio taip pat išplaukia, kad atsitiktinio dydžio Z vidurkis yra

$$\mathbf{E}Z = \sum_i \sum_j x_i y_j P(A_i \cap B_j).$$

Pritaikę (10.7) gauname

$$\begin{aligned}\mathbf{E}Z &= \sum_i \sum_j x_i y_j P(A_i) P(B_j) = \sum_i \Big(x_i P(A_i) \times \sum_j y_j P(B_j) \Big) \\ &= \Big(\sum_i x_i P(A_i) \Big) \times \Big(\sum_j y_j P(B_j) \Big) = \mathbf{E}X \ \mathbf{E}Y.\end{aligned}$$

Lieka įrodyti teoremą atsisakius prielaidos, kad X ir Y yra diskretieji a.dydžiai. Pateiksime tik įrodymo schemą. Šiuo atveju konstruojame diskrečiuosius a.d. X_ε ir Y_ε, žr. (8.30). Kadangi visiems $\omega \in \Omega$ yra teisingos nelygybės

$$|X_\varepsilon(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon, \qquad |Y_\varepsilon(\omega) - Y(\omega)| < \varepsilon, \tag{10.10}$$

tai $|X_\varepsilon| \le |X| + \varepsilon$ ir todėl $\mathbf{E}|X_\varepsilon| < \infty$. Panašiai gauname, kad $\mathbf{E}|Y_\varepsilon| < \infty$. Nesunku patikrinti, kad atsitiktiniai dydžiai X_ε ir Y_ε yra nepriklausomi. Kadangi tai diskretieji a. dydžiai, tai jiems 10.1 teorema jau įrodyta. Taigi

$$\mathbf{E}|X_\varepsilon Y_\varepsilon| < \infty \qquad \text{ir} \qquad \mathbf{E}X_\varepsilon Y_\varepsilon = \mathbf{E}X_\varepsilon \mathbf{E}Y_\varepsilon. \tag{10.10}$$

Pasirinkime seką $\varepsilon_n \downarrow 0$. Tuomet $X_{\varepsilon_n}(\omega) \to X(\omega)$ ir $Y_{\varepsilon_n}(\omega) \to Y(\omega)$ konverguoja tolygiai. Iš čia gauname, kai $n \to \infty$,

$$X_{\varepsilon_n}(\omega) Y_{\varepsilon_n}(\omega) \to X(\omega) Y(\omega) \tag{10.11}$$

visiems $\omega \in \Omega$. Perėję prie ribos (10.10), kai $n \to \infty$ ir $\varepsilon = \varepsilon_n$, gauname $\mathbf{E}|XY| < \infty$ ir $\mathbf{E}XY = \mathbf{E}X\mathbf{E}Y$.

Pastaba. Šiame žingsnyje mums reiktų pareikalauti tolygiojo diskrečiųjų atsitiktinių dydžių sekos $\{X_{\varepsilon_n} \cdot Y_{\varepsilon_n}\}$ konvergavimo (10.11), žr. APB 8.4. Tokio reikalavimo galima išvengti, jei iš anksto pakeičiame X ir Y dydžiais $X_A = X\mathbb{I}_{\{|X|<A\}}$ ir $Y_A = Y\mathbb{I}_{\{|Y|<A\}}$ ir įrodome $\mathbf{E}X_A Y_A = \mathbf{E}X_A \mathbf{E}Y_A$ visiems $A > 0$.

Įrodymas baigtas.

Teiginys 10.2. *Tarkime, X ir Y yra nepriklausomi integruojami a.d. Tuomet*

$$cov(X,Y) = 0. \tag{10.12}$$

Įrodymas. Kadangi $\mathbf{E}XY = \mathbf{E}X\mathbf{E}Y$, tai

$$cov(X,Y) = \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X\mathbf{E}Y = 0.$$

Teiginys 10.3. *Tarkime, kad $X_1, \dots, X_n$ yra nepriklausomi a.d. ir $\mathbf{E}X_i^2 < \infty$ visiems $i = 1, \dots, n$. Tuomet teisinga lygybė*

$$D(X_1 + \dots + X_n) = DX_1 + \dots + DX_n. \tag{10.13}$$

Įrodymas. Teisingos lygybės

$$\begin{aligned}
D(\sum_{i=1}^n X_1) &= \mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}X_i)\Big)^2 \\
&= \mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}X_i)^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} (X_i - \mathbf{E}X_i)(X_j - \mathbf{E}X_j)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i)^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} \mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i)(X_j - \mathbf{E}X_j) \\
&= \sum_{I=1}^n DX_i + 2\sum_{1\le i<j\le n} cov(X_i, X_j).
\end{aligned}$$

Įstatę lygybę, kuri išplaukia iš **10.2** teiginio, $cov(X_i, X_j) = 0$, gauname (10.13).

11. Sąlyginis vidurkis.

PVZ 11.1. Tvenkinyje auga karpiai. Yra žinoma, kad turėtų būti 1000 trimečių, 600 keturmečių ir 800 penkiamečių žuvų. Mus domina koks yra tvenkinio gyvos žuvies bendras svoris. Jei žinotume koks yra žuvies vidutinis svoris m, tai ieškomasis skaičius būtų $2400\,m$. Kaip rasti svorio vidurkį m? Atsitiktiniai parinkę žuvį ω (taip, kad visos žuvys iš $\Omega = \{\omega_1, \dots, w_{2400}\}$ turėtų vienodus šansus būti parinktos), jos svorį pažymėkime $X(\omega)$. Tai atsitiktinis dydis ir $m = \mathbf{E}X$. Tarkime, kad turime patikimus duomenis apie trimečių žuvų svorio vidurkį m_3, keturmečių žuvų svorio vidurkį m_4 ir penkiamečių žuvų svorio vidurkį m_5 (tai gali būti ankstesnių tyrimų duomenys, paremti sunaudotų pašarų kiekiu ir kt.). Tuomet galėtume rašyti

$$m \approx \frac{1000\ m_3 + 600\ m_4 + 800 m_5}{2400} = m_3 \frac{1000}{2400} + m_4 \frac{600}{2400} + m_5 \frac{800}{2400}.$$

Skaičius m_i atitinka vidurkinę svorio reikšmę žuvų aibės Ω poaibyje A_i, sudarytame iš visų tvenkinio karpių, kurių amžius $i-$ metų. Santykis 1000/24000 (atitinkamai 600/2400 ir 800/2400) nurodo tikimybę, kad atsitiktinai parinkta žuvis yra trimetė (atitinkamai keturmetė ir penkiametė).

Toliau laikysime, kad visi šio skyrelio atsitiktiniai dydžiai yra apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

APB 11.1. Tarkime, kad X yra atsitiktinis dydis, o $A \in \mathcal{F}$ turi teigiamą tikimybę $P(A) > 0$. Be to tarsime, kad atsitiktinis dydis $\omega \to \mathbb{I}_{\{\omega \in A\}} X(\omega)$ yra integruojamas. Skaičių

$$\mathbf{E}(X|A) = P^{-1}(A)\mathbf{E}\mathbb{I}_A X = \frac{1}{P(A)} \int \mathbb{I}_{\{\omega \in A\}} X(\omega) P(d\omega)$$

vadiname sąlyginiu a. dydžio X vidurkiu su sąlyga A. Jei $P(A) = 0$, apibrėžiame $\mathbf{E}(X|A) = 0$.

Teiginys 11.1. *Tarkime, X yra integruojamas atsitiktinis dydis, o $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$ yra toks tarpusavyje nesikertančių aibių rinkinys, kad $\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Tuomet teisingos lygybės*

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}X\mathbb{I}_{A_1} + \dots + \mathbf{E}X\mathbb{I}_{A_n} = P(A_1)\mathbf{E}(X|A_1) + \dots + P(A_n)\mathbf{E}(X|A_n).$$

Tarkime, Y yra diskretusis atsitiktinis dydis su reikšmių aibe $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots\}$. Čia $y_i \neq y_j$, kai $i \neq j$. Pažymėję $A_i = \{\omega :\ Y(\omega) = y_i\}$, galime rašyti

$$Y(\omega) = \sum_i y_i \mathbb{I}_{\{\omega \in A_i\}}.$$

Aišku, kad $\cup_i A_i = \Omega$ ir $A_i \cap A_j = \emptyset$, kai $i \neq j$.

Konstruosime naują atsitiktinį dydį $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, turintį tokią pačią struktūrą, kaip ir Y, t.y.,

$$Z(\omega) = \sum_i z_i \mathbb{I}_{\{\omega \in A_i\}}. \tag{11.1}$$

Kadangi skaičiai $z_i = \mathbf{E}(X|A_i)$ yra vidurkinės X reikšmės aibėse A_i, tai Z reikšmės yra tam tikra prasme artimos a. dydžio X reikšmėms. Aišku, turime pareikalauti, kad atsitiktiniai dydžiai $\omega \to X(\omega)\mathbb{I}_{A_i}$ būtų integruojami.

APB 11.2. Tarkime, kad X yra integruojamas atsitiktinis dydis, o Y yra diskretusis a.d. Atsitiktinį dydį Z vadiname a. dydžio X sąlyginiu vidurkiu su sąlyga Y ir žymime $\mathbf{E}(X|Y)$. Sąlyginio vidurkio reikšmes $\mathbf{E}(X|A_i)$ dar žymime $\mathbf{E}(X|A_i) = \mathbf{E}(X|Y = y_i)$.

Teorema 11.1. *Tarkime, kad X yra integruojamas atsitiktinis dydis, o Y yra diskretusis a.d. Tuomet*
(i) $\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X|Y)\big) = \mathbf{E}X$*;*
(ii) kiekvienai Borelio funkcijai $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra teisinga lygybė

$$\mathbf{E}\big(\varphi(Y)X|Y) = \varphi(Y)\mathbf{E}(X|Y).$$

Toliau pateikiamos atsitiktinių dydžių lygybės yra teisingos beveik visur.
(iii) Jei X ir Y yra nepriklausomi a.d., tai $\mathbf{E}(X|Y) = \mathbf{E}X$*;*
(iv) $\mathbf{E}(Y|Y) = Y$*;*
(v) Jei X_1 ir X_2 yra integruojami a.d., o a, b yra realieji skaičiai, tai

$$\mathbf{E}(aX_1 + bX_2|Y) = a\mathbf{E}(X_1|Y) + b\mathbf{E}(X_2|Y).$$

Pastaba. Sakome, kad atsitiktiniai dydžiai W ir Z yra lygūs beveik visur, jei kuriai nors aibei $A \in \mathcal{F}$, kurios tikimybė $P(A) = 1$, yra teisinga lygybė $Z(\omega) = W(\omega)$ visiems $\omega \in A$. Ekvivalentus apibrėžimas yra pateiktas APB 6.8.

Įrodymas. Naudosime anksčiau įvestą žymėjimą $z_i = \mathbf{E}(X|A_i)$, kur $A_i = Y^{-1}(y_i)$.
Įrodome (i). Atsitiktinio dydžio $Z = \mathbf{E}(X|Y)$, žr. (11.1), vidurkis

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X|Y)\big) &= \sum_i z_i P(A_i) = \sum_{i:\ P(A_i)>0} P(A_i)\mathbf{E}(X|A_i) \\ &= \sum_{i:\ P(A_i)>0} \mathbf{E}\mathbb{I}_{A_i} X = \mathbf{E}X\Big(\sum_{i:\ P(A_i)>0} \mathbb{I}_{A_i}\Big) \\ &= \mathbf{E}X\mathbb{I}_B, \end{aligned} \tag{11.2}$$

kur

$$B = \cup_{i:\ P(A_i)>0} A_i. \tag{11.3}$$

Kadangi aibė $\overline{B} = \cup_{i:\ P(A_i)=0} A_i$, tai

$$P(\overline{B}) = \sum_{i:\ P(A_i)=0} P(A_i) = 0.$$

Iš čia išplaukia lygybė $P(B) = 1$. Todėl, žr. 8.15 teiginį, $\mathbf{E}X\mathbb{I}_B = \mathbf{E}X$. Įstatę šią lygybę į formulę (11.2), gauname (i) lygybę.
Įrodome (ii). Pažymėkime $w_i = \mathbf{E}(\varphi(Y)X|A_i)$. Tuomet atsitiktinis dydis

$$\mathbf{E}\big(\varphi(Y)X|Y\big)(\omega) = \sum_i w_i \mathbb{I}_{\{\omega\in A_i\}}. \tag{11.4}$$

Jei $P(A_i) = 0$, tai $w_i = z_i = 0$. Jei $P(A_i) > 0$, tai iš lygybių (jose naudojame tą faktą, kad visiems $\omega \in A_i$ turime $Y(\omega) = y_i$)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\varphi(Y)X|A_i) &= \frac{1}{P(A_i)}\mathbf{E}YX\mathbb{I}_{A_i} = \frac{1}{P(A_i)}\mathbf{E}\varphi(y_i)X\mathbb{I}_{A_i} \\ &= \frac{1}{P(A_i)}\varphi(y_i)\mathbf{E}X\mathbb{I}_{A_i} = \varphi(y_i)\mathbf{E}(X|A_i)\end{aligned}$$

išplaukia, kad $w_i = \varphi(y_i)z_i$. Dabar dešinę (11.4) lygybės pusę galime perrašyti taip

$$\sum_i \varphi(y_i)z_i\mathbb{I}_{\{\omega\in A_i\}} = \varphi\big(Y(\omega)\big)\mathbf{E}\big(X|Y\big)(\omega). \tag{11.5}$$

Iš (11.4) ir (11.5) gauname (ii).

Įrodome (iii). Pakanka įrodyti lygybę $\mathbf{E}(X|Y)(\omega) = \mathbf{E}X$ visiems $\omega \in B$, kur aibės B, apibrėžtos (11.3), tikimybė $P(B) = 1$. Fiksuokime $\omega \in B$. Tuomet $\omega \in A_i$ kuriam nors A_i. Čia indeksas i yra toks, kad $Y(\omega) = y_i$. Iš sąlyginio vidurkio apibrėžimo išplaukia lygybės

$$\mathbf{E}(X|Y)(\omega) = \mathbf{E}(X|A_i) = \frac{1}{P(A_i)}\mathbf{E}X\mathbb{I}_{A_i} = \frac{1}{P(A_i)}\mathbf{E}X\mathbf{E}\mathbb{I}_{A_i} = \mathbf{E}X.$$

Čia pasinaudojome lygybe $\mathbf{E}X\mathbb{I}_{A_i} = \mathbf{E}X\mathbf{E}\mathbb{I}_{A_i}$, kuri išplaukia iš to fakto, kad a.d. X ir Y yra nepriklausomi (taikome 10 skyrelio 2 pastabą atvaizdžiui $\mathbb{I}_{A_i}(\omega) = g(Y(\omega))$, kur $g(Y) = \mathbb{I}_{\{Y=y_i\}}$).

Lygybė (iv) išplaukia iš lygybių (ii) ir (iii), jas pritaikius a. dydžiams $X \equiv 1$ ir $\varphi(Y) = Y$,

$$\mathbf{E}(Y|Y) = \mathbf{E}(Y\cdot 1|Y) = Y\,\mathbf{E}(1|Y) = Y.$$

Čia pasinaudojome tuo faktu, kad kai $X \equiv 1$ turi tik vieną reikšmę, tai jis ir bet koks kitas a. d. Y yra nepriklausomi, ir todėl iš (iii) išplaukia lygybė $\mathbf{E}(1|Y) = 1$.

Įrodome (v).

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(aX_1 + bX_2|Y) &= \sum_{i:P(A_i)>0} \mathbf{E}(aX_1 + bX_2|A_i) \\ &= \sum_{i:P(A_i)>0} \frac{1}{P(A_i)}E(aX_1 + bX_2)\mathbb{I}_{A_i} \\ &= \sum_{i:P(A_i)>0} \frac{1}{P(A_i)}\Big(aEX_1\mathbb{I}_{A_i} + bEX_2\mathbb{I}_{A_i}\Big) \\ &= \sum_{i:P(A_i)>0} \Big(a\mathbf{E}(X_1|A_i) + bE(X_2|A_i)\Big) \\ &= a\mathbf{E}(X_1|Y) + b\mathbf{E}(X_2|Y)\end{aligned}$$

Įrodymas baigtas.

Teiginys 11.2. *Tarkime, kad a.d. X ir Borelio funkcija f tenkina sąlygas* $\mathbf{E}X^2 < \infty$ *ir* $\mathbf{E}f^2(Y) < \infty$ *Apibrėžkime funkciją* $f_0(y_i) = \mathbf{E}(X|Y = y_i)$, *kai* $y_i \in \mathcal{Y}$ *ir* $f_0(x) = 0$, *kai* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Y}$. *Teisinga tokia nelygybė*

$$\mathbf{E}(X - f(Y))^2 \geq \mathbf{E}(X - f_0(Y))^2.$$

Pastaba. Funkciją f_0 žymime $f_0(y) = \mathbf{E}(X|Y = y)$. Ji tenkina lygybę $f_0(Y) = \mathbf{E}(X|Y)$.

Įrodymas. Pažymėkime $a = \mathbf{E}(X - f_0(Y))(f_0(Y) - f(Y))$. Iš 11.1 Teoremos (i) ir (ii) teiginių išplaukia lygybės

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{E}\,\mathbf{E}\Big((X - f_0(Y))(f_0(Y) - f(Y))\Big|Y\Big) = \mathbf{E}\,(f_0(Y) - f(Y))\mathbf{E}\Big(X - f_0(Y)\Big|Y\Big) \\ &= \mathbf{E}(f_0(Y) - f(Y))\Big(\mathbf{E}(X|Y) - f_0(Y)\Big) = \mathbf{E}(f_0(Y) - f(Y)) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Todėl

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X - f(Y))^2 &= \mathbf{E}(X - f_0(Y) + f_0(Y) - f(Y))^2 \\ &= \mathbf{E}(X - f_0(Y))^2 + 2a + \mathbf{E}(f_0(Y) - f(Y))^2 \\ &\geq \mathbf{E}(X - f_0(Y))^2 + 2a \\ &= \mathbf{E}(X - f_0(Y))^2. \end{aligned}$$

Įrodymas baigtas.

Skaičius $\mathbf{E}(X|A)$, kur aibė $A \in \mathcal{F}$ turi teigiamą tikimybę, atspindi vidurkinę X reikšmę aibėje A. Dydžio X išsibarstymą apie šia vidurkinę reikšmę atsipindi sąlyginė dispersija.

APB 11.3. Sąlygine a. dydžio X dispersija, su sąlyga A, vadiname skaičių

$$D(X|A) = \mathbf{E}(X^2|A) - (\mathbf{E}(X|A))^2,$$

kai $P(A) > 0$. Jei $P(A) = 0$, apibrėžiame $D(X|A) = 0$. Jei $\mathbf{E}X^2 < \infty$, tai sąlyginę dispersiją galime apibrėžti visoms aibėms $A \in \mathcal{F}$.

Nagrinėkime diskretųjį a.d. Y su reikšmių aibe $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots\}$ ir žymėkime $A_i = Y^{-1}(y_i)$. Atsitiktinį dydį

$$V(\omega) = \sum_i D(X|A_i)\mathbb{I}_{\{\omega \in A_i\}}$$

vadiname sąlygine X dispersija su sąlyga Y ir žymime $D(X|Y)$.

Teorema 11.3. *Teisingos lygybės*

$$D(X|Y) = \mathbf{E}(X^2|Y) - (\mathbf{E}(X|Y))^2, \tag{11.6}$$

$$DX = D\big(\mathbf{E}(X|Y)\big) + \mathbf{E}\big(D(X|Y)\big). \tag{11.7}$$

Lygybė (11.6) yra teisinga beveik visur.

Įrodymas. Įrodome (11.6). Pažymėkime $Z = \mathbf{E}(X|Y)$, $W = \mathbf{E}(X^2|Y)$ ir $V = D(X|Y)$. Iš sąlyginio vidurkio ir sąlyginės dispersijos apibrėžimo išplaukia, kad bet kuriai aibei A_i su $P(A_i) > 0$ ir bet kuriai $\omega \in A_i$ yra teisinga lygybė $V(\omega) = W(\omega) - Z^2(\omega)$. Kadangi $P(\cup_{i:\ P(A_i>0)} A_i) = 1$, darome išvadą, kad (11.6) yra teisinga beveik visur.

Įrodome (11.7). Iš dispersijos apibrėžimo ir 11.1 teoremos (i) teiginio turime

$$DZ = \mathbf{E}Z^2 - (\mathbf{E}Z)^2 = \mathbf{E}Z^2 - (\mathbf{E}X)^2. \tag{11.8}$$

Iš (11.6) ir 11.1 teoremos išplaukia, kad

$$\mathbf{E}V = \mathbf{E}W - \mathbf{E}Z^2 = \mathbf{E}X^2 - \mathbf{E}Z^2. \tag{11.9}$$

Sudėję (11.8) ir (11.9), gauname (11.7).

Įrodymas baigtas.

PVZ 11.2. Bendrovė apmoka darbuotojų dalykinius telefono pokalbius. Reikia įvertinti mėnesio laikotarpio bendrovės telefono išlaidas. Pokalbių skaičius N ir vieno pokalbio trukmė X yra atsitiktiniai dydžiai. Yra žinoma, kad pokalbių skaičiaus N skirstinys yra artimas Puasono skirstiniui su parametru $\lambda = 5000$, o vidutinis pokalbio ilgis $\mathbf{E}X = 4$ (minutės). Dispersija $DX = 4$. Viena pokalbio minutė kainuoja 10 centų.

Raskite numatomų telefonų pokalbių išlaidų kainos vidurkį ir dispersiją. Laikome, kad skirtingų pokalbių trukmės $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

Sprendimas. Pažymėkime $\mathbf{E}X = a$, $DX = \sigma^2$. Bendras pokalbių laikas yra atsitiktinis dydis

$$S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Iš 11.1 teoremos 1) punkto išplaukia lygybė $\mathbf{E}S_N = \mathbf{E}(\mathbf{E}(S_N|N))$. Atsitiktinio dydžio $\mathbf{E}(S_N|N)$ reikšmė yra bendro pokalbių laiko vidurkis, jei žinoma, kad buvo lygiai N pokalbių. Aišku, kad

$$\mathbf{E}(S_N|N) = N\mathbf{E}X_1 = Na. \tag{11.10}$$

Iš čia gauname

$$\mathbf{E}S_N = \mathbf{E}(\mathbf{E}(S_N|N)) = \mathbf{E}(N\mathbf{E}X_1) = \mathbf{E}X_1\mathbf{E}N = a\lambda.$$

Atsitiktinio dydžio S_N dispersijai skaičiuoti taikysime (11.7) formulę

$$DS_N = \mathbf{E}(D(S_N|N)) + D(\mathbf{E}(S_N|N)). \tag{11.11}$$

Atsitiktinio dydžio $D(S_N|N)$ reikšmė yra bendro pokalbių laiko S_N dispersija, jei žinoma, kad buvo lygiai N pokalbių. Iš 10.3 teoremos turime $D(S_N|N) = DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_N$, čia N yra fiksuotas skaičius. Todėl $D(S_N|N) = NDX_1 = N\sigma^2$. Įstatę šią lygybę ir (11.10) į (11.11) formulę, gauname

$$DS_N = \mathbf{E}(N\sigma^2) + D(Na) = \sigma^2\mathbf{E}N + a^2DN = \sigma^2\lambda + a^2\lambda = \lambda(a^2 + \sigma^2).$$

Kai $a = 4$, $\sigma^2 = 4$ ir $\lambda = 5000$, turime $\mathbf{E}S_N = 20000$, $DS_N = 100000$. Vidutinė kaina yra 2000 Lt, jos dispersija 1000.

12. Atsitiktinio vektoriaus pasiskirstymo funkcija

Nagrinėsime matųjį atvaizdį $\overline{Y} : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$, apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Atvaizdžio reikšmės yra $k-$mačiai vektoriai

$$\overline{Y}(\omega) = (Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots, Y_k(\omega)).$$

Jį vadiname atsitiktiniu vektoriumi (a.v.). Kadangi mačiojo atvaizdžio $\overline{Y} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ kiekviena koordinatinė funkcija $Y_i : \Omega \to \mathbb{R}$ yra mačioji, tai Y_i, kur $i = 1, \ldots, k$, yra atsitiktiniai dydžiai.

Pastaba 1. Tarkime $X_1, \ldots, X_k$ yra atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tuomet atvaizdis $\omega \to (X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega))$ yra atsitiktinis vektorius. Tuo lengvai įsitikinsime pasirėmę **6.4** teiginiu. Pažymėkime šį atvaizdį $\omega \to \overline{X}(\omega)$. Borelio aibių rinkiniui $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ turime

$$\overline{X}^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_k) = X_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap X_k^{-1}(B_k) \in \mathcal{F}.$$

Kadangi "stačiakampės" aibės $B_1 \times \cdots \times B_k$ generuoja erdvės $\mathbb{R}^k$ Borelio aibių $\sigma-$algebrą $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, tai iš **6.4** teiginio išplaukia, kad atvaizdis $\omega \to \overline{X}(\omega)$ yra matusis, t.y., $\overline{X}$ yra atsitiktinis vektorius.

APB 12.1. Tarkime, Q yra tikimybinis matas, apibrėžtas erdvės $\mathbb{R}^k$ Borelio aibių $\sigma-$algebroje $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Funkciją

$$\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k) \to F_Q(\overline{x}) = Q\big((-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_k]\big)$$

vadiname mato Q pasiskirstymo funkcija.

Atsitiktinio vektoriaus $\overline{Y}$ tikimybinio skirstinio $P_{\overline{Y}}$ pasiskirstymo funkciją

$$\begin{aligned} F_{\overline{Y}}(\overline{x}) &= P_{\overline{Y}}\big((-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_k]\big) \\ &= P(\{\omega :\ Y_1(\omega) \le x_1, \ldots, Y_k(\omega) \le x_k\}) \\ &= P(Y_1 \le x_1, \ldots, Y_k \le x_k). \end{aligned}$$

vadiname atsitiktinio vektoriaus Y pasiskirstymo funkcija.

Įvesime žymenį, vektoriams $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ palyginti. Rašysime $\overline{x} \le \overline{y}$, jei $x_i \le y_i$ visiems $i = 1, \ldots, k$.

Teiginys 12.1. *Tikimybinio skirstinio Q, apibrėžto mačiojoje erdvėje $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$, pasiskirstymo funkcija turi tokias savybes.*
1) Jei $\overline{x} \le \overline{y}$ tai $F_Q(\overline{x}) \le F_Q(\overline{y})$.
2) Egzistuoja riba

$$\lim_{x_1 \to +\infty} \cdots \lim_{x_k \to +\infty} F_Q(\overline{x}) = 1.$$

3) Kiekvienam i ir kiekvienam skaičių rinkiniui $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k$ egzistuoja riba

$$\lim_{x_i \to -\infty} F_Q(x_1, \ldots, x_k) = 0.$$

4) Kiekvienai vektorių sekai $\overline{x}_n$, tenkinančiai nelygybes $\overline{x}_1 \ge \overline{x}_2 \ge \cdots$ ir konverguojančiai į vektorių $\overline{x}$, egzistuoja riba

$$\lim_{n \to \infty} F_Q(\overline{x}_n) = F_Q(\overline{x}).$$

Šio teiginio įrodymas yra toks pats, kaip ir 7.1 teiginio įrodymas.

Kiek sudėtingiau yra formuluoti ribos "iš kairės" egzistavimo savybę daugiamačio argumento atveju. Paprasčiausia, kai turime vektorių seką $\overline{x}_n = (x_{1n}, \ldots, x_{kn})$, $n = 1, 2, \ldots$, kuri konverguoja į vektorių $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ ir kiekvienam i koordinačių x_{in}, $n = 1, 2, \ldots$, seka monotoniškai didėja, t.y., $x_{i1} < x_{i2} < x_{i3} < \ldots$. Tuomet egzistuoja riba

$$\lim_{n \to \infty} F_Q(\overline{x}_n) = Q\big((-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \cdots \times (-\infty, x_k)\big).$$

Pastaba 2. Žinodami tikimybinio mato Q pasiskirstymo funkcijos $F_Q(\overline{x})$ reikšmes visiems $\overline{x} \in \mathbb{R}^k$, galime (bent iš principo) rasti visų Borelio aibių $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ tikimybes, t.y., jei tikimybinių matų Q_1 ir Q_2 pasiskirstymo funkcijos sutampa, tai $Q_1(B) = Q_2(B)$ visoms Borelio aibėms $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Šio fakto įrodymas (žr. [Kubilius], [Dudley]) remiasi tuo, kad "stačiakampių" aibių

$$A_{\overline{x}} = (-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_k], \quad \overline{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \tag{12.1A}$$

klasės generuota $\sigma-$ algebra sutampa su Borelio aibių $\sigma-$ algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

Pratimas. Tarkime $k=2$. Patikrinkite tapatybę

$$Q\big((a_1,a_2]\times(b_1,b_2]\big)=F_Q(b_1,b_2)+F_Q(a_1,a_2)-F_Q(a_1,b_2)-F_Q(b_1,a_2). \tag{12.1}$$

APB 12.2. Tikimybinį skirstinį Q, apibrėžtą mačiojoje erdvėje $(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$, vadiname absoliučiai tolydžiuoju, jei atsiras tokia neneigiama integruojama funkcija $f:\mathbb{R}^k\to[0,+\infty)$, kad visiems $\overline{x}\in\mathbb{R}^k$ yra teisinga lygybė

$$F_Q(\overline{x})=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_k}f(u_1,\ldots,u_k)du_1\cdots du_k.$$

Funkciją f vadiname tankio funkcija. Iš 12.1 teiginio 2) punkto išplaukia lygybė

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\ldots,x_k)dx_1\cdots dx_k=1.$$

Atsitiktinį vektorių vadiname absoliučiai tolydžiuoju, jei jo skirstinys yra abs. tolydusis.

Pastaba 3. Tarkime $\overline{Y}$ yra $k-$matis absoliučiai tolydusis atsitiktinis vektorius su tankio funkcija f. Tarkime $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ yra mačioji funkcija tokia, kad atsitiktinis dydis $g(\overline{Y})$ yra integruojamas. Tuomet

$$\mathbf{E}g(\overline{Y})=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}g(x_1,\ldots,x_k)f(x_1,\ldots,x_k)dx_1\cdots dx_k. \tag{12.2}$$

Pritaikę šią lygybę aibės $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ indikatoriui $g(\overline{x})=\mathbb{I}_{\{\overline{x}\in B\}}$, gauname lygybę

$$\mathbf{P}\{\overline{Y}\in B\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{I}_{\{\overline{x}\in B\}}f(x_1,\ldots,x_k)dx_1\cdots dx_k. \tag{12.3}$$

Šių lygybių čia neįrodysime. Įrodymą galima rasti vadovėliuose [Kubilius], [Dudley].

Pastaba 4. Tarkime, $\overline{X}=(X_1,\ldots,X_k)$ yra absoliučiai tolydusis atsitiktinis vektorius su tankio funkcija $p_{\overline{X}}$. Tarkime, kad kuriai nors atvirai aibei $B_X\subset\mathbb{R}^k$ teisinga lygybė $\mathbf{P}\{\overline{X}\in B_X\}=1$, o funkcija $\varphi:B_X\to\mathbb{R}^k$ yra diferencijuojama ir jos Jakobianas (išvestinių matricos determinantas) $J_\varphi(\overline{x})\neq0$ visiems $\overline{x}\in B_X$. Tuomet atsitiktinis vektorius $\overline{Y}=\varphi(\overline{X})$ yra absoliučiai tolydusis ir turi tankį

$$p_{\overline{Y}}(\overline{y})=p_{\overline{X}}(\varphi^{-1}(\overline{y}))\frac{1}{J(\varphi^{-1}(\overline{y}))},\qquad \overline{y}\in B_Y, \tag{12.4}$$

ir $P(\overline{Y} \in B_Y) = 1$. Čia B_Y žymi funkcijos φ reikšmių aibę, o $\varphi^{-1} : B_Y \to B_X$ žymi funkciją, kuri yra atvirkštinė funkcijai φ.

(12.4) formulę galima įrodyti tokiu būdu. Tarkime $B \subset B_Y$ yra atviroji aibė. Teisingos lygybės

$$
\begin{aligned}
P(\overline{Y} \in B) = P(\overline{X} \in \varphi^{-1}(B)) &= \int \mathbb{I}_{\{\overline{x} \in \varphi^{-1}(B)\}} p_{\overline{X}}(\overline{x}) dx_1 \cdots dx_k \\
&= \int \mathbb{I}_{\{\overline{y} \in B\}} p_{\overline{X}}\big(\varphi^{-1}(\overline{y})\big) |J_{\varphi^{-1}}(\overline{y})| dy_1 \cdots dy_k \\
&= \int \mathbb{I}_{\{\overline{y} \in B\}} p_{\overline{X}}\big(\varphi^{-1}(\overline{y})\big) \frac{1}{|J_\varphi(\varphi^{-1}(\overline{y}))|} dy_1 \cdots dy_k. \qquad (12.5)
\end{aligned}
$$

Čia taikėme kintamųjų keitimo daugialypiame integrale taisyklę (antroji eilutė) ir tą faktą, kad funkcijos φ^{-1} išvestinių matrica yra atvirkštinė funkcijos φ išvestinių matricai ir todėl jų determinantų sandauga $J_{\varphi^{-1}}(\overline{y}) \cdot J_\varphi(\varphi^{-1}(\overline{y})) = 1$, žr. [Kabaila].

Iš (12.5) lygybių išplaukia, kad stačiakampės aibės (žr. (12.1A)) $A_{\overline{z}}$, kur $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^k$, tikimybė

$$
\begin{aligned}
P(\overline{Y} \in A_{\overline{z}}) = P(\overline{Y} \in A_{\overline{z}} \cap B_Y) &= \int \mathbb{I}_{\{\overline{y} \in A_{\overline{y}} \cap B_Y\}} p_{\overline{Y}}(\overline{y}) dy_1 \cdots dy_k \\
&= \int_{-\infty}^{z_1} \cdots \int_{-\infty}^{z_k} \mathbb{I}_{\{\overline{y} \in B_Y\}} p_{\overline{Y}}(\overline{y}) dy_1 \cdots dy_k.
\end{aligned}
$$

Taigi, funkcija $\overline{y} \to \mathbb{I}_{\{\overline{y} \in B_Y\}} p_{\overline{Y}}(\overline{y})$ yra atsitiktinio vektoriaus $\overline{Y}$ tankio funkcija.

Toliau, paprastumo dėliai, nagrinėsime tik dvimačius atsitiktinius vektorius $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$, t.y., atvejį, kai $k = 2$.

APB 12.3. Atsitiktinio dydžio Y_i, $i = 1, 2$, pasiskirstymo funkcija yra vadinama marginaliaja pasikirstymo funkcija,

$$
\begin{aligned}
F_{Y_1}(x_1) &= P(Y_1 \le x_1) = P(Y_1 \le x_1,\ Y_2 < +\infty) = \lim_{t \to +\infty} F_{\overline{Y}}(x_1, t), \\
F_{Y_2}(x_2) &= P(Y_2 \le x_2) = P(Y_1 < +\infty,\ Y_2 \le x_2) = \lim_{t \to +\infty} F_{\overline{Y}}(t, x_2).
\end{aligned}
$$

Pastaba 5. Jei $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$ yra absoliučiai tolydusis ats. vektorius su tankio funkcija $p_{\overline{Y}}(u_1, u_2)$, tai atsitiktiniai dydžiai Y_1 ir Y_2 yra absoliučiai tolydieji, o jų tankio funkcijos

$$
p_{Y_1}(u_1) = \int_{\mathbb{R}} p_{\overline{Y}}(u_1, t) dt, \qquad p_{Y_2}(u_2) = \int_{\mathbb{R}} p_{\overline{Y}}(t, u_2) dt.
$$

Tai išplaukia iš Matematinės analizės kurso Fubinio teoremos:

$$\begin{aligned} F_{Y_1}(x_1) &= P(\overline{Y} \in (-\infty, x_1] \times (-\infty, +\infty)) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_2 \ p_{\overline{Y}}(u_1, u_2) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} p_{Y_1}(u_1) du_1. \end{aligned}$$

Teiginys 12.2. *Atsitiktiniam vektoriui $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$ teiginiai yra ekvivalentūs.*
(i) Visiems $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ teisinga lygybė $F_{\overline{Y}}(x_1, x_2) = F_{Y_1}(x_1)F_{Y_2}(x_2)$.
(ii) Marginalieji atsitiktiniai dydžiai Y_1 ir Y_2 yra nepriklausomi.
Įrodymas. Tarkime, kad Y_1 ir Y_2 yra nepriklausomi. Tuomet

$$F_{\overline{Y}}(x_1, x_2) = P(Y_1 \le x_1, Y_2 \le x_2) = P(Y_1 \le x_1)P(Y_2 \le x_2) = F_{Y_1}(x_1)F_{Y_2}(x_2).$$

Taigi, (ii)⇒(i).
Įrodome (ii)⇒(i). Nagrinėkime stačiakampį $(a_1, a_2] \times (b_1, b_2] \subset \mathbb{R}^2$. Iš lygybės $F_{\overline{Y}}(x_1, x_2) = F_{Y_1}(x_1)F_{Y_2}(x_2)$ ir (12.1) formulės gauname

$$\begin{aligned} P(\overline{Y} \in (a_1, a_2] \times (b_1, b_2]) &= F_{\overline{Y}}(b_1, b_2) + F_{\overline{Y}}(a_1, a_2) - F_{\overline{Y}}(a_1, b_2) - F_{\overline{Y}}(b_1, a_2) \\ &= \big(F_{Y_1}(a_2) - F_{Y_1}(a_1)\big)\big(F_{Y_2}(b_2) - F_{Y_2}(b_1)\big) \\ &= P(Y_1 \in (a_1, a_2])P(Y_2 \in (b_1, b_2]). \end{aligned}$$

Įrodėme, kad

$$P(\{Y_1 \in A\} \cap \{Y_2 \in B\}) = P(Y_1 \in A)P(Y_2 \in B), \tag{12.6}$$

kai $A = (a_1, a_2]$ ir $B = (b_1, b_2]$ yra intervalai. Mums reikia įrodyti šia lygybę bet kuriai Borelio aibių porai $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Matome, kad vektoriaus $\overline{Y}$ skirstinys $P_{\overline{Y}}$ sutampa su skirstiniu $P_{Y_1} \times P_{Y_2}$ stačiakampių aibių $(a_1, a_2] \times (b_1, b_2]$ klasėje. Kadangi stačiakampių aibių klasė generuoja Borelio aibių $\sigma-$algebrą $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, tai iš bendrų mato teorijos rezultatų ([Dudley], [Kubilius]) išplaukia, kad $P_{\overline{Y}}(D) = P_{Y_1} \times P_{Y_2}(D)$ visoms Borelio aibėms $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ėmę $D = A \times B$, kur $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, gauname (12.6) lygybę visoms $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Taigi, atsitiktiniai dydžiai Y_1 ir Y_2 yra nepriklausomi. *Įrodymas baigtas.*

Teiginys 12.3. *Tarkime, kad Y_1, Y_2 yra nepriklausomi absoliučiai tolydieji atsitiktiniai dydžiai su tankio funkcijomis $p_1(u)$ ir $p_2(u)$. Tuomet atsitiktinis vektorius $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$ yra absoliučiai tolydusis ir funkcija $p(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2)$, kur $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, yra šio ats. vektoriaus tankio funkcija.*

Įrodymas. Iš **12.2** teiginio išplaukia lygybės

$$\begin{aligned} F_{\overline{Y}}(x_1, x_2) = F_{Y_1}(x_1)F_{Y_2}(x_2) &= \int_{-\infty}^{x_1} p_1(u)du \int_{-\infty}^{x_2} p_2(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} p_1(u_1)p_2(u_2)du_1du_2. \end{aligned}$$

Paskutinėje lygybėje taikėme Fubinio teorema (žinomą iš Matematinės analizės kurso). *Įrodymas baigtas.*

Teiginys 12.4. *Tarkime, kad $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$ yra absoliučiai tolydusis atsitiktinis vektorius su tankio funkcija $p_{\overline{Y}}(x_1, x_2) = g_1(x_1)g_2(x_2)$. Tuomet atsitiktiniai dydžiai Y_1 ir Y_2 yra nepriklausomi ir turi tankio funkcijas $p_1(u) = c_1^{-1}|g_1(u)|$ ir $p_2(u) = c_2^{-1}|g_2(u)|$. Čia $c_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |g_i(u)|du$, $i = 1, 2$.*

Įrodymas. Kadangi $p_{\overline{Y}}$ yra tankis, tai, pritaikę Fubinio teoremą, turime

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} p_{\overline{Y}}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} |g_1(x_1)| \cdot |g_2(x_2)|dx_1dx_2 = c_1c_2.$$

Taigi, galime rašyti $p_{\overline{Y}}(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2)$, nes $c_1c_2 = 1$. Iš čia gauname

$$\begin{aligned} F_{Y_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{x_1} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 p_1(x_1)p_2(x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} p_1(x_1)dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x_2)dx_2 = \int_{-\infty}^{x_1} p_1(x_1)dx_1, \end{aligned}$$

nes $\int p_2(x_2)dx_2 = 1$. Taigi, p_1 yra atsitiktinio dydžio Y_1 tankio funkcija. Panašiai įsitikiname, kad p_2 yra atsitiktinio dydžio Y_2 tankio funkcija. Be to yra teisinga lygybė

$$\begin{aligned} F_{\overline{Y}}(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{x_1} dx_1 \int_{-\infty}^{x_2} dx_2 p_1(x_1)p_2(x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} p_1(x_1)dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{x_2} p_2(x_2)dx_2 \\ &= F_{Y_1}(x_1)F_{Y_2}(x_2). \end{aligned}$$

Iš **12.2** teiginio išplaukia, kad ats. dydžiai Y_1 ir Y_2 yra nepriklausomi.
Įrodymas baigtas.

PVZ 12.1. *Nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos skirstinys.* Tarkime Y_1 ir Y_2 yra nepriklausomi absoliučiai tolydieji atsitiktiniai dydžiai su tankio funkcijomis p_1 ir p_2. Nagrinėkime atsitiktinį dydį $Z = Y_1 + Y_2$. Jo pasiskirstymo funkcija

$$P(Z \le x) = P(Y_1 + Y_2 \le x) = P(\overline{Y} \in B_x),$$

čia žymime $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$ ir $B_x = \{(x_1, x_2): \ x_1 + x_2 \le x\} \subset \mathbb{R}^2$. Iš **12.3** teiginio išplaukia, kad ats. vektorius $\overline{Y}$ turi tankį $p_1(x_1)p_2(x_2)$. Todėl

$$\begin{aligned} P(Z \le x) = P(\overline{Y} \in B_x) &= \int\int \mathbb{I}_{\{(x_1,x_2)\in B_x\}} p_1(x_1)p_2(x_2)dx_1dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 p_1(x_1) \int_{-\infty}^{x-x_1} p_2(x_2)dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{Y_2}(x - x_1)p_1(x_1)dx_1. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Antrojoje eilutėje atlikę kintamųjų keitimą $v = x_2 + x_1$, $dv = dx_2$, gauname

$$P(Z \le x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 p_1(x_1) \int_{-\infty}^{x} p_2(v - x_1)dv = \int_{-\infty}^{x} p(v)dv,$$

kur $p(v) = \int_{\mathbb{R}} p_2(v - x_1)p_1(x_1)dx_1$ tinka būti atsitiktinio dydžio Z tankiu.

PVZ 12.2. *Nepriklausomų normaliųjų atsitiktinių dydžių sumos skirstinys.* Tarkime, $Y_1 \sim N(m_1, a^2)$ ir $Y_2 \sim N(m_2, b^2)$, t.y. Y_1, Y_2 yra normalieji atsitiktiniai dydžiai su $\mathbf{E}Y_i = m_i$, $\mathbf{D}Y_1 = a^2$, $\mathbf{E}Y_2 = m_2$, $\mathbf{D}Y = b^2$, kur $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ ir $a, b > 0$. Tarsime, kad Y_1 ir Y_2 yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Mus domina atsitiktinio dydžio $Z = Y_1 + Y_2$ skirstinys.

Galime rašyti $Z = Z' + m_1 + m_2$, kur $Z' = Y_1' + Y_2'$ ir $Y_i' = Y_i - m_i$. Anksčiau esame apskaičiavę normaliųjų dydžių $Y_1' \sim N(0, a^2)$ ir $Y_2' \sim N(0, b^2)$ tankius

$$p_1(x_1) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2a^2}, \qquad p_2(x_2) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-x_2^2/2b^2}.$$

Iš (12.7) formulės išplaukia

$$\begin{aligned} P(Z' \le x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{x_1+x_2\le x\}} p_1(x_1)p_2(x_2)dx_1dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{ay_1+by_2\le x\}} \frac{1}{2\pi} e^{-y_1^2/2} e^{-y_2^2/2} dy_1dy_2. \end{aligned} \tag{12.8}$$

Čia atlikome kintamųjų keitimą $(ay_1, by_2) = (x_1, x_2)$, kuris mums leido "išsivaduoti" iš a ir b eksponentės argumente. Dabar pointegralinė funkcija yra proporcinga $e^{-r^2/2}$, kur $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ yra taško (y_1, y_2) atstumo iki koordinačių centro kvadratas. Toliau taip "pasuksime" koordinates (įvesime naujas koordinates naudodami posūkio transformaciją), kad aibė, kurioje integruojame $B = \{(y_1, y_2) : ay_1 + by_2 \le x\}$ turėtų paprastą užrašą (naujosiose koordinatėse).

PIEŠINYS

Atlikę kintamųjų keitimą

$$y_1 = z_1 \cos\alpha - z_2 \sin\alpha, \qquad y_2 = z_1 \sin\alpha + z_2 \cos\alpha,$$

matome, kad srities B taškų naujosios koordinatės tenkina sąryšį $\{(z_1, z_2) : z_1 \le h\}$, kur h žymi atsumą nuo taško $(y_1, y_1) = (0, 0)$ iki tiesės $\{(y_1, y_2) : \ ay_1 + by_2 = x\}$. Nesunkiai randame $h = x/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Kadangi šios transformacijos Jakobiano reikšmė yra 1, o $z_1^2 + z_2^2 = r^2$, tai su naujosiomis koordinatėmis (12.8) integralas atrodo taip

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \int_{-\infty}^{h} \frac{1}{2\pi} e^{-(z_1^2+z_2^2)/2} dz_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{h} e^{-z_1^2/2} dz_1.$$

Tai yra standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio X_0 tikimybė

$$P(X_0 \le h) = P\Big(X_0 \le \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\Big) = P(cX_0 \le x), \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Matome, kad Z' turi tokią pačią pasiskirstymo funkciją, kaip ir cX_0. Taigi, $Z' \sim N(0, c^2)$. Darome išvadą, kad atsitiktinis dydis $Z = Z' + m_1 + m_2$ turi normalųjį skirstinį su vidurkiu $m_1 + m_2$ ir dispersija $a^2 + b^2$, t.y., $Z \sim N(m_1 + m_2, a^2 + b^2)$.

APB 12.4. Nagrinėkime atsitiktinį vektorių $\overline{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$, kurio marginalieji atsitiktiniai dydžiai $Y_1, \ldots, Y_k$ yra integruojami. Vektorių $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$, kurio koordinatės yra marginaliųjų atsitiktinių dydžių vidurkiai $\mu_i = \mathbf{E}Y_i$, vadiname atsitiktinio vektoriaus $\overline{Y}$ vidurkiu. Žymime $\mathbf{E}\overline{Y} = \mu$.

Atsitiktinio vektoriaus dispersijos vaidmenį, tam tikra prasme, vaidina matrica $\mathbf{R}_{\overline{Y}} = \| R_{ij} \|$, kurios elementus sudaro marginaliųjų atsitiktinių dydžių kovariacijos ir dispersijos, $R_{ij} = \mathbf{E}(Y_i - \mathbf{E}Y_i)(Y_j - \mathbf{E}Y_j)$. Šią matricą vadiname atsitiktinio vektoriaus $\overline{Y}$ kovariacijų matrica.

Pastaba 6. Kovariacijų matrica yra neneigiamai apibrėžta. Šį faktą įrodysime dvimačiam atsitiktiniam vektoriui ($k = 2$). Aukštesnio matavimo vektoriams ($k > 2$) įrodymas yra visai toks pats. Primename, kad matricą $\mathbf{R}_{\overline{Y}}$ vadiname neneigiamai apibrėžta, jei bet kuriam $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ yra teisinga nelygybė

$$(t_1, t_2)\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \ge 0. \tag{12.9}$$

Kadangi kairioji (12.9) nelygybės pusė yra lygi sumai

$$t_1^2 + t_1 t_2 R_{12} + t_2 t_1 R_{21} + t_2^2 R_{22} = \mathbf{D}(t_1 Y_1 + t_2 Y_2),$$

tai (12.9) nelygybė yra išvada to fakto, kad bet kurio atsitiktinio dydžio (šiuo atveju, tai atsitiktinis dydis $t_1 Y_1 + t_2 Y_2$) dispersija yra neneigiama.

Teiginys 12.5. *Tarkime, kad atsitiktinio vektoriaus $\overline{Y}$ marginalieji atsitiktiniai dydžiai turi antruosius momentus, t.y.* $\mathbf{E}Y_i^2 < \infty$, *visiems* $i = 1, 2, \ldots, k$. *Yra teisinga nelygybė*

$$||\mathbf{E}\overline{Y}|| \leq \mathbf{E}||\overline{Y}||. \tag{12.10}$$

Čia $||\overline{x}|| = (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{1/2}$ *žymi vektoriaus* $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ *ilgį.*

Įrodymas. Nagrinėsime dvimatį atsitiktinį vektorių $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$. Jei vektoriaus $\overline{Y}$ reikšmių aibė

$$\left\{\overline{y}^{(1)} = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}),\ \ldots,\ \overline{y}^{(n)} = (y_1^{n)}, y_2^{(n)})\right\}$$

yra baigtinė, tai

$$\mathbf{E}Y_1 = \sum_{j=1}^n y_1^{(j)} p_j, \qquad \mathbf{E}Y_2 = \sum_{j=1}^n y_2^{(j)} p_j.$$

Čia $p_j = \mathbf{P}(\overline{Y} = \overline{y}^{(j)})$ žymi reikšmės $\overline{y}^{(j)}$ tikimybę.
Iš tapatybės

$$\mathbf{E}\overline{Y} = (\mathbf{E}Y_1, \mathbf{E}Y_2) = \Big(\sum_{j=1}^n y_1^{(j)} p_j,\ \sum_{j=1}^n y_2^{(j)} p_j\Big) = \sum_{j=1}^n \Big(y_1^{(j)},\ y_2^{(j)}\Big) p_j$$

ir trikampio nelygybės $||\overline{x} + \overline{y}|| \leq ||\overline{x}|| + ||\overline{y}||$ išplaukia nelygybė

$$||\mathbf{E}\overline{Y}|| \leq \sum_{j=1}^n ||(y_1^{(j)},\ y_2^{(j)}) p_j|| = \sum_{j=1}^n ||(y_1^{(j)},\ y_2^{(j)})|| p_j.$$

Dešinėje pusėje gauname vidurkį $\mathbf{E}||\overline{Y}||$. Nelygybę (12.10) įrodėme atsitiktinam vektoriui, kurio reikšmių aibė yra baigtinė (paprastąjam atsitiktiniam vektoriui). Panašiai įrodome atsitiktiniam vektoriui, kurio reikšmių aibė yra skaiti (baigtinę sumą pakeis konverguojanti eilutė). Taigi, nelygybė (12.10) yra teisinga diskretiesiems atsitiktiniams vektoriams (t.y. vektoriams, kurių reikšmių aibės yra baigtinės arba skaičios). Iš čia išplaukia, kad nelygybė (12.10) yra teisinga bet kuriam atsitiktiniam vektoriui, kurio marginalieji atsitiktiniai dydžiai yra integruojami, nes atsitiktinio dydžio vidurkį apibrėžėme, kaip jį aproksimuojančių diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkių ribą.

PVZ 12.3. *Dvimatis normalusis atsitiktinis vektorius.* Tarkime, X_1 ir X_2 yra nepriklausomi standartiniai normalieji atsitiktiniai dydžiai. Atsitiktinį vektorių

$\overline{X} = (X_1, X_2)$ vadiname normaliuoju atsitiktiniu vektoriumi. Jo kovariacijų matrica $\mathbf{R}_{\overline{X}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nagrinėkime naują atsitiktinį vektorių $\overline{Y}$,

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \mathbb{A} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

kuris gaunamas iš $\overline{X}$ atlikus tiesinę transformaciją $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ ir postūmį (d_1, d_2). Taigi,

$$Y_1 = d_1 + a_{11}X_1 + a_{12}X_2, \qquad Y_2 = d_2 + a_{21}X_1 + a_{22}X_2.$$

Iš **12.2** pavyzdžio žinome, kad $Y_1 \sim N(d_1, a_{11}^2 + a_{12}^2)$ ir $Y_2 \sim N(d_2, a_{21}^2 + a_{22}^2)$. Lengvai randame atsitiktinio vektoriaus $\overline{Y}$ kovariacijų matricą $\mathbf{R}_{\overline{Y}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$, kur T žymi transponuotą matricą.

Iš **12.3** teiginio žinome, kad atsitiktinis vektorius $\overline{X}$ turi tankį $p_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2}$. 4 pastaboje nurodyta, kaip apskaičiuoti atsitiktinio vektoriaus $\overline{Y}$ tankį p. Atlikę reikalingus skaičiavimus (Matematinės analizės kurso pratimas) gauname

$$p(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi |B|^{1/2}} \exp\Big\{-\frac{1}{2}\big(b_{11}(y_1 - d_1)^2 + 2b_{12}(y_1 - d_1)(y_2 - d_2) + b_{22}(y_2 - d_2)^2\big)\Big\}.$$

Čia matrica $\mathbf{B} = \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)$ yra atvirkštinė matricai $\mathbf{R}_{\overline{Y}}$, o $|B|$ žymi matricos B determinantą.

III. RIBINĖS TEOREMOS

Analizuojant sudėtingus statistinius eksperimentus, kuriant didelių sistemų tikimybinius modelius, susiduriama su atsitiktiniais įvykiais, kurie priklauso nuo labai didelio skaičiaus, žymėkime jį N, įvairių veiksnių. Pvz.: atliekame N nepriklausomų statistinių eksperimentų; tiriame dujų, kurias sudaro N molekulių, fizikines savybes; vertiname draudimo kompanijos, aptarnaujančios N sandorių, bankroto tikimybę ir kt. Jei skaičius N yra didelis, tikslaus modelio tyrimas tampa ypač sudėtingas. Tuomet bandoma rasti dėsningumus, kurie atsiskleidžia, kai $N \to \infty$. Jie nebeatsižvelgia į kiekvienos individualios dalelės ar veiksnio (molekulės, sandorio) ypatumus, tačiau tinka sistemos būsenai aprašyti. Tokius dėsningumus kartais vadiname asimptotiniais. Jie supaprastina modelį, tačiau atsako į rūpimus klausimus (pvz. nustato bankroto tikimybės apytikslę reikšmę, dujų slėgį).

Šių dienų matematinio griežtumo reikalavimus atitinkančių asimptotinių tikimybinių dėsningumų tyrimų pradžia siejama su prancūzų matematiko Emil Borel vardu.

13. Borelio-Kantelio Lema

Čia nagrinėsime tikimybinės erdvės $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mačiųjų aibių (atsitiktinių įvykių) sistemą $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$.

Nagrinėsime aibes

$$\limsup_n A_n = \{\omega : \exists \text{ natūraliųjų skaičių seka } i_n \uparrow \infty, \text{kuriai } w \in A_{i_n}, \forall n\},$$
$$\liminf_n A_n = \{\omega : \exists \text{ natūralusis skaičius } n, \text{kuriam } w \in A_i, \forall i \geq n\}.$$

Aišku, kad $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

Pastaba. Jei $\omega \in \limsup_n A_n$, tai $\forall n$ turime $\omega \in \cup_{k \geq n} A_k$. Pažymėję $C_n = \cup_{k \geq n} A_k$, gauname $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty} C_n$. Iš čia išplaukia sąryšis

$$\limsup_n A_n \subset \cap_{n=1}^{\infty}\Big(\cup_{k=n}^{\infty} A_k\Big).$$

Kitą vertus, jei ω yra tokia, kad $\omega \in C_n$ kiekvienam n, tai $\forall n$ atsiras $i_n \geq n$, kuriam $\omega \in A_{i_n}$ ir todėl $\omega \in \limsup_n A_n$. Iš čia išplaukia sąryšis $\cap_{n=1}^{\infty} C_n \subset \limsup_n A_n$. Darome išvadą, kad

$$\limsup_n A_n = \cap_{n=1}^{\infty}\Big(\cup_{k=n}^{\infty} A_k\Big). \tag{13.1}$$

Pastebėkime, kad aibių seka $C_1, C_2, \dots$ tenkina sąlygą

$$C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots \tag{13.2}$$

Pratimas. Įrodykite, kad aibėms $D_k = \cap_{n=k}^{\infty} A_n$ yra teisinga lygybė

$$\liminf_n A_n = \cup_{k=1}^{\infty} D_k = \cup_{k=1}^{\infty}\Big(\cap_{n=k}^{\infty} A_n\Big) \tag{13.3}$$

ir

$$D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \cdots \tag{13.4}$$

Teiginys 13.1. *Teisingos lygybės*

$$\overline{\liminf_n A_n} = \limsup_n \overline{A}_n, \tag{13.5}$$

$$\overline{\limsup_n A_n} = \liminf_n \overline{A}_n. \tag{13.6}$$

Čia $\overline{B} = \Omega \setminus B$ žymi aibės B papildinį.

Įrodymas. Naudosime žinomas formules

$$\overline{\cup_i A_i} = \cap_i \overline{A}_i, \qquad \overline{\cap_i A_i} = \cup_i \overline{A}_i. \tag{13.7}$$

Pritaikę (13.3), (13.7) ir (13.1) gauname (13.5),

$$\begin{aligned}\overline{\liminf_n A_n} &= \overline{\cup_{k=1}^\infty D_k} = \cap_{k=1}^\infty \overline{D}_k = \cap_{k=1}^\infty \overline{\cap_{n=k}^\infty A_n} \\ &= \cap_{k=1}^\infty \Big(\cup_{n=k}^\infty \overline{A}_n\Big) = \limsup_n \overline{A}_n.\end{aligned}$$

(13.6) lygybę gauname iš (13.5) lygybės, perėję prie aibių papildinių. *Įrodymas baigtas.*

Lema 13.2 (Borelio-Kantelio). *Duota mačiųjų aibių seka $A_1, A_2, \dots$.*
(i) jei $\sum_n P(A_n) < \infty$, tai $P(\limsup_n A_n) = 0$.
(ii) Jei $\{A_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ yra nepriklausomų įvykių rinkinys ir $\sum_n P(A_n) = \infty$ (eilutė diverguoja), tai $P(\limsup_n A_n) = 1$.

Įrodymas. Pradžioje įrodome (i) teiginį. Iš (13.1) lygybės, mato tolydumo ir (13.2) išplaukia lygybės

$$P(\limsup_n A_n) = P(\cap_{n=1}^\infty C_n) = \lim_n P(C_n).$$

Kadangi

$$P(C_n) = P(\cup_{k=n}^\infty A_k) \le \sum_{k \ge n} P(A_k) \qquad \text{ir} \qquad \sum_{k \ge n} P(A_k) \to 0,$$

kai $n \to \infty$ (nes eilutė $\sum_k P(A_k)$ konverguoja), tai $\lim_n P(C_n) = 0$. Gavome lygybę $P(\limsup_n A_n) = 0$.

Įrodykime (ii) teiginį. Kadangi $P(\limsup_n A_n) = 1 \Leftrightarrow P(\overline{\limsup_n A_n}) = 0$, tai pakaks įrodyti, kad (ii) teiginyje minimai aibių sekai $A_1, A_2, \dots$ yra teisinga lygybė $P(\overline{\limsup_n A_n}) = 0$. Iš (13.6) lygybės išplaukia

$$P(\overline{\limsup_n A_n}) = P(\liminf_n \overline{A}_n) = P(\cup_{k=1}^\infty D'_k), \tag{13.8}$$

kur $D'_k = \cap_{n=k}^{\infty} \overline{A}_n$. Kadangi aibių seka $\{D'_k\}$ turi savybę (13.4), tai iš mato tolydumo savybės išplaukia lygybė

$$P(\cup_{k=1}^{\infty} D'_k) = \lim_{k\to\infty} P(D'_k). \tag{13.9}$$

Nagrinėkime aibę D'_k ir jos tikimybę $P(D'_k)$. Bet kuriam $N > k$ turime

$$D'_k \subset \cap_{n=k}^{N} \overline{A}_n \;\Rightarrow\; P(D'_k) \le P(\cap_{n=k}^{N} \overline{A}_n). \tag{13.10}$$

Kadangi įvykiai $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots$ yra nepriklausomi, tai

$$P(\cap_{n=k}^{N} \overline{A}_n) = P(\overline{A}_k) \cdots P(\overline{A}_N) = (1 - P(A_k)) \cdots (1 - P(A_N)).$$

Toliau taikome nelygybę $1 + x \le e^x$, kai $x = -P(A_n)$, $n = k, k+1, \dots$. Gauname

$$P(\cap_{n=k}^{N} \overline{A}_n) \le e^{-P(A_k)} \cdots e^{-P(A_N)} = \exp\{-\sum_{n=k}^{N} P(A_n)\} \to 0, \tag{13.11}$$

kai $N \to \infty$, nes $\sum_{n=k}^{N} P(A_n) \to +\infty$, kai $N \to \infty$. Taip yra todėl, kad neneigiamų narių eilutė $\sum_n P(A_n)$ diverguoja.

Iš (13.10) ir (13.11) išplaukia lygybė $P(D'_k) = 0$ visiems k. Todėl (13.9) riba yra 0. Galop iš (13.8) gauname norimą lygybę $P(\overline{\limsup_n A_n}) = 0$. *Įrodymas baigtas.*

14. Didžiųjų skaičių dėsnis

PVZ 14.1. Įprastinio šešiasienio žaidimų kauliuko sienelės yra nudažytos arba balta arba juoda spalva. Kiek yra baltų sienelių, o kiek juodų nėra žinoma. Pavadinkime nežinomą baltų sienelių skaičių B. Tuomet juodų sienelių skaičius $J = 6 - B$. Mums reikia nuspręsti kokios yra skaičių B ir J reikšmės, pasiremiant kauliuko metimo eksperimentais. Kiekvieno eksperimento metu sužinome atsivertusios sienelės spalvą.

Tarkime atlikome N nepriklausomų eksperimentų (skirtingų eksperimentų rezultatai neįtakoja vienas kito). Eksperimentų rezultatus registruojame taip. Jei $i-$tame eksperimente iškrito balta sienelė, rašome $\mathbb{I}_i = 1$, o jei juoda - rašome $\mathbb{I}_i = 0$. Tuomet suma $S_N = \mathbb{I}_1 + \cdots + \mathbb{I}_N$ skaičiuoja baltų sienelių atsivertimo skaičių.

Galime tikėtis, kad santykis $\frac{S_N}{N}$ turėtų apytiksliai atitikti baltųjų sienelių dalį visų sienelių aibėje, t.y., skaičių $\frac{B}{6}$ (jei baltų sienelių daug, tai jos dažniau pasirodo). Taigi, tikėtina, jog

$$\frac{S_N}{N} \approx \frac{B}{6}.$$

Beje, skaičius $\frac{B}{6}$ yra lygus tikimybei įvykio, kad kauliuko metimo metu atsivertė balta sienelė.

Toks būdas baltųjų sienelių skaičiui B vertinti (arba baltos sienelės atsivertimo tikimybei $\frac{B}{6}$ vertinti) yra pagrįstas. Tai yra plačiai naudojamo dėsningumo, vadinamojo didžiųjų skaičių dėsnio, atskiras atvejis. Didžiųjų skaičių dėsnis pagrindžia statistinės analizės metodą, kuris tiriamo objekto savybes nustato empirinių eksperimentų pagrindu.

Laikysime, kad šio skyrelio atsitiktiniai dydžiai yra apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

APB 14.1. Tarkime $X_1, X_2, \ldots$ yra vienodai pasiskirsčiusių integruojamų atsitiktinių dydžių seka. Pažymėkime $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ir $a = \mathbf{E}X_1$ (aišku, kad $a = \mathbf{E}X_i$ visiems i). Jei

$$(14.1) \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_n \mathbf{P}\Big(\big|\frac{S_n}{n} - a\big| > \varepsilon\Big) = 0,$$

tai sakome, kad sekai $\{X_n\}$ yra teisingas silpnasis didžiųjų skaičių dėsnis.

Suma S_n yra atsitiktinis dydis, taigi $S_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Jei

$$(14.2) \qquad \mathbf{P}\Big(\big\{\omega : \lim_n \frac{S_n(\omega)}{n} = a\big\}\Big) = 1,$$

tai sakome, kad sekai $\{X_n\}$ yra teisingas stiprusis didžiųjų skaičių dėsnis. Galima įrodyti, kad aibė $\{\omega : \lim_n \frac{S_n(\omega)}{n} = a\}$ yra mačioji ir todėl jos tikimybę galime apibrėžti.

Abi lygybės (14.1) ir (14.2) skirtingu būdu teigia panašų dalyką: jei n reikšmė yra didelė, tai skaičių rinkinio $\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$ aritmetinis vidurkis yra artimas neatsitiktiniam skaičiui $a = \mathbf{E}X_1$, nors patys rinkinio elementai yra atsitiktinių dydžių reikšmės.

Vėliau įrodysime, kad (14.2)⇒(14.1), taigi žodžiai "silpnasis" ir "stiprusis" yra vartojami tinkamai.

Teorema (Čebyševo) 14.1. *Tarkime, kad $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių seka, kuriems $\mathbf{E}X_i^2 < \infty$ visiems i. Be to skaičių seka $\{\mathbf{D}X_n\}$ yra aprėžta. Tuomet*

$$(14.3) \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_n \mathbf{P}\Big(\big|\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{n}\big| > \varepsilon\Big) = 0.$$

Įrodymas. Pažymėkime C skaičių sekos $\{\mathbf{D}X_n\}$ viršutinįjį rėžį. Tuomet $\mathbf{D}X_i \le C$ visiems i. Iš Čebyševo nelygybės (9.2) išplaukia

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\big|\frac{S_n-\mathbf{E}S_n}{n}\big| > \varepsilon\Big) &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{E}\Big(\frac{S_n-\mathbf{E}S_n}{n}\Big)^2 = \frac{\mathbf{D}S_n}{n^2\varepsilon^2}\\ &= \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\big(DX_1+\cdots+DX_n\big) \le \frac{1}{n^2\varepsilon^2}nC\\ &= \frac{C}{n\varepsilon^2} \to 0,\end{aligned}$$

kai $n \to \infty$. *Įrodymas baigtas.*

Išvada 14.2. *Tarkime, kad $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka ir $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$. Tuomet jei teisingas silpnasis didžiųjų skaičių dėsnis (14.1).*

Teorema 14.3. *Tarkime, kad $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka ir $\mathbf{E}X_1^4 < \infty$. Tuomet jei teisingas stiprusis didžiųjų skaičių dėsnis (14.2).*

Pastaba. Didžiųjų skaičių dėsniui apibrėžti reikalingas parametras $a = \mathbf{E}X_1$. Taigi, didžiųjų skaičių dėsnį galime apibrėžti tik integruojamų atsitiktinių dydžių sekai. Pasirodo, kad bet kuriai nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių integruojamų atsitiktinių dydžių sekai teisingas stiprusis didžiųjų skaičių dėsnis. Šio fakto įrodymas yra sudėtingas ir jo nepateikiame. Įrodymas tampa žymiai paprastesnis, jei pareikalaujame ketvirtojo momento egziztavimas, $\mathbf{E}X_1^4 < \infty$ (griežtesnis, labiau apribojantis reikalavimas, nei integruojamumo reikalavimas $\mathbf{E}|X_1| < \infty$).

Įrodymas. Žymėkime $Y_i = X_i - a$, kur $a = \mathbf{E}X_i$ ir $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Tuomet $\mathbf{E}Y_i = 0$ ir $\mathbf{E}Y_i^4 < \infty$. Be to (14.2) lygybė yra ekvivalenti lygybei

$$P\Big(\{\omega : \quad \exists \lim_n \frac{Z_n(\omega)}{n} = 0\}\Big) = 1. \tag{14.3}$$

Fiksuokime ω ir nagrinėkime skaičių seką $\{n^{-1}Z_n(\omega)\}$. Tarkime, kad ši seka nekonverguoja į 0. Tuomet atsiras $\varepsilon > 0$ ir begalinė indeksų seka $1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$, kuriai $|i_k^{-1}Z_{i_k}(\omega)| > \varepsilon$ visiems $i_1, i_2, \ldots$. Pastebėkime, kad nelygybė liks teisinga, jei $\varepsilon > 0$ pakeistume skaičiumi r^{-1}, kur r yra didelis natūralusis skaičius. Toks, kad $r^{-1} < \varepsilon$. Gavome, kad

$$\omega \in \limsup_n A_n, \qquad \text{kur} \qquad A_n = \big\{\omega : \ |n^{-1}Z_n(\omega)| > r^{-1}\big\}.$$

Pažymėkime $E_r = \limsup_n A_n$.

Nagrinėkime aibę

$$B = \{\omega : \quad \text{seka } n^{-1}Z_n(\omega) \quad \text{nekonverguoja į} \quad 0\}.$$

Galima įrodyti, kad B yra mačioji aibė ($B \in \mathcal{F}$). Iš aibių E_r apibrėžimo išplaukia lygybė

$$B = \cup_{r=1}^{\infty} E_r.$$

Todėl

$$\mathbf{P}(B) = P(\cup_{r=1}^{\infty} E_r) \le \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}(E_r). \tag{14.4}$$

Tikimybėms $\mathbf{P}(E_r)$ skaičiuoti taikome Borelio-Kantelio lemą. Iš eilutės konvergavimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty \tag{14.5}$$

išplaukia lygybė $\mathbf{P}(E_r) = 0$, nes $E_r = \limsup_n A_n$. Įstatę $\mathbf{P}(E_r) = 0$ į (14.4), gauname $\mathbf{P}(B) = 0$. Ši lygybė yra ekvivalenti (14.3) lygybei. Šioje vietoje įrodymą galėtume laikyti baigtu, jei būtume tikri, kad (14.5) yra teisinga.

Taigi, lieka įrodyti (14.5). Eilutės konvergavimas išplaukia iš nelygybių

$$\mathbf{P}(A_n) \le Cr^4 n^{-2}, \qquad n = 1, 2, \dots ,$$

kur C yra tam tikra konstanta. Nelygybėms įrodyti taikome Markovo teoremą

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\Big(\big|\frac{Z_n}{n}\big| > r^{-1}\Big) \le r^4 n^{-4}\mathbf{E}|Z_n|^4$$

ir ketvirtojo momento įvertį

$$\mathbf{E}|Z_n|^4 = n\mathbf{E}|Y_1|^4 + 3n(n-1)(\mathbf{E}Y_1^2)^2 \le Cn^2, \tag{14.6}$$

kur žymime $C = \mathbf{E}|Y_1|^4 + 3(\mathbf{E}Y_1^2)^2$.

(14.6) formulės nelygybė akivaizdi. (14.6) formulės lygybę patikriname tiesioginiu skaičiavimu. Pasinaudodami tuo, kad atsitiktiniai dydžiai $Y_1, \dots, Y_n$ yra vienodai pasiskirstę, nepriklausomi ir $\mathbf{E}Y_i = 0$, gauname tapatybes

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}Z_n^4 &= \mathbf{E}(Y_1 + \cdots + Y_n)Z_n^3 = n\mathbf{E}Y_1 Z_n^3, \\
\mathbf{E}Y_1 Z_n^3 &= \mathbf{E}Y_1(Y_1 + \cdots + Y_n)Z_n^2 = \mathbf{E}Y_1^2 Z_n^2 + (n-1)\mathbf{E}Y_1 Y_2 Z_n^2, \\
\mathbf{E}Y_1^2 Z_n^2 &= \mathbf{E}Y_1^2(Y_1 + \cdots + Y_n)Z_n = \mathbf{E}Y_1^3 Z_n + (n-1)\mathbf{E}Y_1^2 Y_2 Z_n \\
&= \mathbf{E}Y_1^4 + (n-1)\mathbf{E}Y_1^2 Y_2^2, \\
\mathbf{E}Y_1 Y_2 Z_n^2 &= \mathbf{E}Y_1 Y_2(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)Z_n = 2\mathbf{E}Y_1^2 Y_2 Z_n + (n-2)\mathbf{E}Y_1 Y_2 Y_3 Z_n \\
&= 2\mathbf{E}Y_1^2 Y_2^2.
\end{aligned}$$

Iš šių tapatybių išplaukia (14.6) formulės lygybė. *Įrodymas baigtas.*

15. Atsitiktinių dydžių sekų konvergavimas

Nagrinėsime tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ apibrėžtų atsitiktinių dydžių rinkinį $X_0, X_1, X_2, \ldots$.

APB 15.1. Sakome, kad atsitiktinių dydžių seka $\{X_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ konverguoja į atsitiktinį dydį X_0 beveik visur (su tikimybe 1), jei

$$\mathbf{P}\Big(\big\{\omega : \lim_n X_n(\omega) = X_0(\omega)\big\}\Big) = 1.$$

Sakome, kad atsitiktinių dydžių seka $\{X_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ konverguoja į atsitiktinį dydį X_0 pagal tikimybę, jei

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_n \mathbf{P}\Big(\big\{\omega : |X_n(\omega) - X_0(\omega)| > \varepsilon\big\}\Big) = 0.$$

Sakome, kad atsitiktinių dydžių seka $\{X_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ konverguoja į atsitiktinį dydį X_0 pagal pasiskirstymą, jei kiekvienai tolydžiajai aprėžtai funkcijai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra teisinga lygybė

$$\lim_n \mathbf{E} f(X_n) = \mathbf{E} f(X_0).$$

Šiuo atveju dar sakome, kad skirstinių seka $P_{X_1}, P_{X_2}, \ldots$ silpnai konverguoja į skirstinį P_{X_0}.

Toliau vietoje ilgo sakinio "atsitiktinių dydžių seka $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ konverguoja į atsitiktinį dydį X_0" vartosime žymėjimą $X_n \to X_0$.

Teiginys 15.1. *Jei $X_n \to X_0$ su tikimybe 1, tai $X_n \to X_0$ pagal tikimybę. Jei $X_n \to X_0$ pagal tikimybę, tai $X_n \to X_0$ pagal pasiskirstymą.*

Įrodymas. Tarkime, kad $X_n \to X_0$ su tikimybe 1. Tuomet įvykio

$$A = \{\omega : \lim_n X_n(\omega) = X_0(\omega)\}$$

tikimybė $P(A) = 1$.

Fiksuokime $\varepsilon > 0$ ir nagrinėkime aibes

$$A_n = \{\omega : |X_n(\omega) - X_0(\omega)| > \varepsilon\}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Mums reikia įrodyti, kad $P(A_n) \to 0$, kai $n \to \infty$. Kadangi $P(A) = 1$, tai $P(A_n) = P(A_n^*)$, kur $A_n^* = A_n \cap A$. Beto $A_n^* \subset B_n$, kur $B_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k^*$. Todėl $P(A_n^*) \le P(B_n)$ ir mums pakanka įrodyti, kad

$$\lim_n P(B_n) = 0. \tag{15.1}$$

Pastebėję, jog $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$ ir pasinaudoję mato tolydumo savybe, gauname

$$\lim_n P(B_n) = P(\cap_{k=1}^{\infty} B_k).$$

Dešinė šios lygybės pusė lygi 0, kai

$$\cap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset. \tag{15.2}$$

Taigi, tam, kad įrodytume (15.1) lygybę, pakanka patikrinti (15.2) lygybę.

Jei rastume $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n$ tai atsirastų ir indeksų seka $i_1 < i_2 < \cdots$ tokia, kad $\omega \in A_{i_k}^*$ visiems $k = 1, 2, \ldots$. Taip yra todėl, kad, žr. (13.1),

$$\cap_{n=1}^{\infty} B_n = \cap_{n=1}^{\infty}\Big(\cup_{k=n}^{\infty} A_k^*\Big) = \limsup_n A_n^*.$$

Taigi, jei $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n$, tai $|X_{i_k}(\omega) - X_0(\omega)| > \varepsilon$ visiems $k = 1, 2, \ldots$. Toks $\omega \notin A$. Bet tai prieštarautų tam faktui, jog $\cap_{n=1}^{\infty} B_n \subset A$, kuris yra teisingas, nes $A_n^* \subset A$ visiems n. Darome išvadą, kad lygybė (15.2) yra teisinga. Todėl yra teisinga ir (15.1) lygybė, o iš jos išplaukia riba $\lim_n \mathbf{P}(A_n) = 0$. Taigi, gavome, kad $X_n \to X_0$ pagal tikimybę.

Tarkime, kad $X_n \to X_0$ pagal tikimybę. Įrodysime, kad $X_n \to X_0$ pagal pasiskirstymą. Kiekvienam $\varepsilon > 0$ yra teisinga lygybė

$$\lim_n \mathbf{P}(A_{n,\varepsilon}) = 0, \qquad \text{kur} \qquad A_{n,\varepsilon} = \{\omega : \ |X_n(\omega) - X_0(\omega)| \geq \varepsilon\}. \tag{15.3}$$

Fiksuokime tolydžiąją aprėžtą funkciją f. Jeigu įrodytume, kad kiekvienam $\delta > 0$ galime rasti tokį skaičių N_δ, kad visiems $n \geq N_\delta$ yra teisinga nelygybė

$$\mathbf{E}|f(X_n) - f(X_0)| \leq \delta, \tag{15.4}$$

tai iš čia išplauktų, kad $\mathbf{E}f(X_n) \to \mathbf{E}f(X_0)$, kai $n \to \infty$.

Fiksuokime $\delta > 0$ ir įrodykime (15.4). Pasirinkime $C > 0$ tokį, kad $|f(x)| \leq C$ visiems x. Galime rasti tokį skaičių $K > 0$, kuriam

$$\mathbf{P}(D_K) < \delta/20C, \qquad \text{kur} \qquad D_K = \{\omega : \ |X_0(\omega)| > K\}. \tag{15.5}$$

Taip yra todėl, kad aibių $D_n = \{\omega \ |X_0(\omega)| > n\}$ seka yra monotoninė, $D_1 \supset D_2 \supset \cdots$, jos sankirta $\cap_{n=1}^{\infty} D_n = \emptyset$, ir iš mato tolydumo savybės išplaukia

$$\lim_n \mathbf{P}(D_n) = \mathbf{P}(\cap_{n=1}^{\infty} D_n) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0. \tag{15.*}$$

Kompaktiškame intervale $\{x : |x| \le K+1\}$ tolydžioji funkcija f yra tolygiai tolydi. Todėl galime rasti tokį $0 < \varepsilon \le 1$, kuriam

$$|t-s| < \varepsilon \;\Rightarrow\; |f(t)-f(s)| < \delta/10, \tag{15.6}$$

kai $s, t \in [-K-1, K+1]$. Iš (15.3) išplaukia, kad galime rasti tokį numerį N, kad

$$P(A_{n,\varepsilon}) < \delta/20C, \qquad \text{kai} \qquad n > N. \tag{15.7}$$

Dabar esame pasiruošę įrodyti (15.4). Pažymėkime

$$\Delta_n(\omega) = \big|f(X_n(\omega)) - f(X_0(\omega))\big|$$

ir įveskime aibę $G = \overline{D}_K \cap \overline{A}_{n,\varepsilon}$. Išskaidome vidurkį į dvi dalis

$$\mathbf{E}|f(X_n) - f(X_0)| = \mathbf{E}\Delta_n = \mathbf{E}\Delta_n \mathbb{I}_G + \mathbf{E}\Delta_n \mathbb{I}_{\overline{G}}. \tag{15.8}$$

Pasinaudoję tapatybe $\overline{G} = D_K \cup A_{n,\varepsilon}$ ir nelygybe $\Delta_n \le 2C$ iš (15.5) ir (15.7) nelygybių gauname

$$\mathbf{E}\Delta_n \mathbb{I}_{\overline{G}} \le 2CP(D_K \cup A_{n,\varepsilon}) \le 2C\Big(P(D_K) + \mathbf{P}(A_{n,\varepsilon})\Big) \le \delta/5, \tag{15.9}$$

kai $n > N$. Likusi vidurkio dalis

$$\mathbf{E}\Delta_n \mathbb{I}_G \le \delta/10, \tag{15.10}$$

nes

$$\Delta_n(\omega) \le \delta/10, \tag{15.11}$$

kai $\omega \in G$. Tam, kad tuo įsitikintume fiksuokime $\omega \in G$. Kadangi $\omega \notin D_K$, tai $|X_0(\omega)| \le K$. Kadangi $\omega \notin A_{n,\varepsilon}$, tai iš nelygybių

$$|X_n(\omega) - X_0(\omega)| < \varepsilon \le 1 \tag{15.12}$$

išplaukia $|X_n(\omega)| \le K+1$. Skaičiams $X_0(\omega), X_n(\omega) \in [-K-1, K+1]$, tenkinantiems (15.12) galime pritaikyti nelygybę (15.6). Ją pritaikę, gauname (15.11). Įstatę nelygybes (15.9) ir (15.10) į dešinę (15.8) tapatybės pusę, gauname (15.4) nelygybę. *Įrodymas baigtas.*

PVZ 15.1. Nagrinėkime tikimybinę erdvę $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, kur $\mathcal{B}([0,1])$ žymi intervalo $[0,1]$ poaibių Borelio $\sigma-$algebrą, o λ žymi Lebego matą: $\lambda([a,b]) = b-a$, kai $0 \le a \le b \le 1$. Šioje tikimybinėje erdvėje apibrėžiame atsitiktinių dydžių seką, kurią sudaro iš eilės išrikiuoti atsitiktinių dydžių rinkiniai:

$$
\begin{aligned}
&X_{1.1}(\omega) = \mathbb{I}_{\{0\le\omega\le 1\}},\\
&X_{2.i}(\omega) = \mathbb{I}_{\{(i-1)/2\le\omega\le i/2\}}, \qquad i = 1,2,\\
&\dots\\
&X_{n.i}(\omega) = \mathbb{I}_{\{(i-1)/n\le\omega\le i/n\}}, \qquad i = 1,\dots,n,\\
&\dots.
\end{aligned}
$$

Nesunku matyti, kad bet kuriam $\varepsilon > 0$ yra teisinga lygybė $\lambda(\{\omega : |X_{n.i}(\omega)| > \varepsilon\}) = n^{-1}$. Taigi mūsų seka konverguoja pagal tikimybę į atsitiktinį dydį $X_0(\omega) \equiv 0$. Kitą vertus, bet kuriam $\omega \in [0,1]$ ir bet kuriam n atrasime tokį numerį i_n, kad $X_{n.i_n}(\omega) = 1$. Iš čia išplaukia, kad mūsų seka nekonverguoja į X_0 su tikimybe 1.

Pastaba. Atsitiktinių dydžių sekos $\{X_n\}$ konvergavimas su tikimybe 1 ir konvergavimas pagal tikimybę yra formuluojamas tikimybinės erdvės Ω įvykių (vienaip ar kitaip apsprendžiančių reikšmių sekos $\{X_n(\omega)\}$ konvergavimą) terminais. Konvergavimas pagal pasiskirstymą nėra susietas su konkrečia tikimybine erdve ir jos įvykių tikimybėmis. Jis atspindi konverguojančios atsitiktinių dydžių sekos narių skirstinių (pasiskirstymo funkcijų) konvergavimą.

Teiginys 15.2. *Teiginiai (i) ir (ii) yra ekvivalentūs.*
(i) Atsitiktinių dydžių seka $\{X_n,\ n = 1,2,\dots\}$ *konverguoja pagal pasiskirstymą į atsitiktinį dydį* X_0.
(ii) Pasiskirstymo funkcijų seka $F_n(x) = \mathbf{P}(X_n \le x)$ *tenkina sąlygą: jei taške* $x \in \mathbb{R}$ *funkcija* $F_0(x) = P(X_0 \le x)$ *yra tolydžioji, tai* $\exists \lim_n F_n(x) = F_0(x)$.
Įrodymas. Įrodome (i)⇒(ii). Tarkime, kad taške x funkcija F_0 yra tolydžioji, t.y., kiekvienam $\varepsilon > 0$ atsiras toks $\delta > 0$, kad

$$|x-y| \le \delta \ \Rightarrow\ |F_0(x) - F_0(y)| < \varepsilon. \tag{15.12}$$

Jei įrodytume, kad bet kuriam $\varepsilon > 0$ yra teisingos nelygybės

$$F_0(x) - \varepsilon \le \liminf_n F_n(x) \le \limsup_n F_n(x) \le F_0(x) + \varepsilon, \tag{15.13}$$

tai iš čia išplauktų teiginys (ii), nes suskaičiavę (15.13) nelygybių kairiosios ir dešiniosios pusių ribas, kai $\varepsilon \downarrow 0$, gautume

$$F_0(x) = \liminf_n F_n(x) = \limsup_n F_n(x) = F_0(x).$$

Fiksuokime $\varepsilon > 0$ ir įrodykime (15.13). Pasirenkame tokį skaičių $\delta > 0$, kad būtų teisinga antroji (15.12) nelygybė. Apibrėžkime tolydžiasias funkcijas $g, h : \mathbb{R} \to [0,1]$. Funkcija

$$g(y) = 1, \qquad \text{kai} \qquad y \le x - \delta \qquad \text{ir} \qquad g(y) = 0, \qquad \text{kai} \qquad y \ge x.$$

Be to g yra tiesinė intervale $x-\delta \le y \le x$, t.y. šiame intervale jos grafikas yra tiesė, jungianti taškus $(x-\delta, 1)$ ir $(x, 0)$. Funkcija $h(y) = g(y-\delta)$. Iš nelygybės

$$\mathbb{I}_{\{y \le x\}} \le h(y) \le \mathbb{I}_{\{y \le x+\delta\}}$$

išplaukia nelygybės

$$F_n(x) = \mathbf{E}\mathbb{I}_{\{X_n \le x\}} \le \mathbf{E}h(X_n), \qquad \mathbf{E}h(X_0) \le \mathbf{E}\mathbb{I}_{\{X_0 \le x+\delta\}} = F_0(x+\delta).$$

Pasirėmę teiginiu (i), gauname

$$\limsup_n F_n(x) \le \limsup_n \mathbf{E}h(X_n) = \lim_n \mathbf{E}h(X_n) = \mathbf{E}h(X_0) \le F_0(x+\delta). \tag{15.14}$$

Panašiai, iš nelygybių

$$\mathbb{I}_{\{y \le x-\delta\}} \le g(y) \le \mathbb{I}_{\{y \le x\}}$$

išplaukia nelygybės

$$F_n(x) = \mathbf{E}\mathbb{I}_{\{X_n \le x\}} \ge \mathbf{E}g(X_n), \qquad \mathbf{E}g(X_0) \ge \mathbf{E}\mathbb{I}_{\{X_0 \le x-\delta\}} = F_0(x-\delta).$$

Pasirėmę teiginiu (i), gauname

$$\liminf_n F_n(x) \ge \liminf_n \mathbf{E}g(X_n) = \lim_n \mathbf{E}g(X_n) = \mathbf{E}g(X_0) \ge F_0(x-\delta). \tag{15.15}$$

Pritaikę (15.12) nelygybę, gauname

$$F_0(x) - \varepsilon \le F_0(x-\delta) \qquad \text{ir} \qquad F_0(x+\delta) \le F_0(x) + \varepsilon. \tag{15.16}$$

Galop, iš (15.14), (15.15) ir (15.16) nelygybių išplaukia (5.13). Įrodėme, kad (i)$\Rightarrow$(ii).

Įrodysime, kad (ii)$\Rightarrow$(i). Fiksuokime tolydžiąją aprėžtą funkciją $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Turime įrodyti, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ atsiras toks natūralusis skaičius N, kad visiems $n \ge N$ yra teisinga nelygybė

$$|\mathbf{E}g(X_n) - \mathbf{E}g(X_0)| < \varepsilon. \tag{15.17}$$

Fiksuokime $\varepsilon > 0$. Kadangi funkcija g yra aprėžta, rasime skaičių $C > 0$, tenkinantį $|g(x)| \le C$ visiems $x \in \mathbb{R}$. Jau žinome, kad $\mathbf{P}(\{\omega : \ |X_0(\omega)| > n\}) \to 0$, kai $n \to \infty$. Todėl galime rasti tokį natūralųjį skaičių N_1, kad

$$\mathbf{P}(\{\omega : \ |X_0(\omega)| \ge N_1\}) \le \varepsilon/10C.$$

Kadangi funkcija F_0 yra monotoninė (tai pasiskirstymo funkcijų savybė), tai jos trukio taškų aibė baigtinė arba skaiti. Todėl bet kuriam intervale rasime be galo daug taškų, kuriuose F_0 yra tolydžioji (tolydumo taškų). Tarkime a, b yra tolydumo taškai, iš intervalų $(-\infty, -N_1]$ ir $[N_1, +\infty)$. Tuomet

$$\mathbf{P}(X_0 \leq a) \leq \varepsilon/10C \qquad \text{ir} \qquad \mathbf{P}(X_0 \geq b) \leq \varepsilon/10C. \tag{15.18}$$

Intervale $[a, b]$ tolydžioji funkcija g yra tolygiai tolydi. Todėl galime rasti tokį skaičių $\delta > 0$, kad bet kuriem $s, t \in [a, b]$ turime

$$|s - t| < \delta \;\Rightarrow\; |g(t) - g(s)| < \varepsilon/20. \tag{15.19}$$

Intervalą $(a, b]$ išskaidysime į baigtinį skaičių smulkesnių intervalų $(y_k, y_{k+1}]$

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b$$

taip, kad atstumas tarp gretimų taškų $y_{k+1} - y_k < \delta/2$. Kiekviename intervale (y_k, y_{k+1}) pažymime kurį nors jam priklausantį funkcijos F_0 tolydumo tašką x_k. Be to pasirenkame $x_0 = a$ ir $x_{m+1} = b$. Gauname taškų rinkinį

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m+1} = b.$$

Nesunku matyti, kad $|x_i - x_{i+1}| < \delta$. Kadangi $\lim_n F_n(x_i) = F_0(x_i)$ visiems $i = 0, 1, \ldots, m+1$, tai galime rasti tokį natūralųjį skaičių N_2, kad visiems $n > N_2$ yra teisingos nelygybės

$$|F_n(x_i) - F_0(x_i)| < \varepsilon/10(m+2)C, \qquad i = 0, 1, \ldots, m+1. \tag{15.20}$$

Dabar jau esame pasiruošę įrodyti (15.17). Išskaidykime vidurkius

$$\mathbf{E}g(X_n) = I_{n1} + I_{n2} + I_{n3},$$

kur

$$I_{n1} = \mathbf{E}g(X_n)\mathbb{I}_{\{X_n \leq a\}}, \quad I_{n2} = \mathbf{E}g(X_n)\mathbb{I}_{\{X_n > b\}}, \quad I_{n3} = \mathbf{E}g(X_n)\mathbb{I}_{\{a < X_n \leq b\}}.$$

Iš tapatybės

$$\mathbf{E}g(X_n) - \mathbf{E}g(X_0) = \sum_{k=1}^{3}(I_{nk} - I_{0k})$$

ir nelygybių

$$|I_{nk} - I_{0k}| \leq \varepsilon/3, \qquad k = 1, 2, 3 \tag{15.21}$$

išplaukia nelygybė (15.17).

Lieka įrodyti nelygybes (15.21). Nagrinėkime skirtumą

$$|I_{n1} - I_{01}| \le |I_{n1}| + |I_{01}| \le C\,\mathbf{P}(X_n \le a) + C\,\mathbf{P}(X_0 \le a). \tag{15.22}$$

Iš (15.18) ir (15.20) išplaukia nelygybės $F_0(a) \le \varepsilon/10C$ ir

$$\mathbf{P}(X_n \le a) = F_n(a) \le F_0(a) + \frac{\varepsilon}{10C} \le \frac{\varepsilon}{5C}.$$

Įstatę šias nelygybes į (15.22) formulę, gauname nelygybę (15.21), kai $k = 1$. Taip pat įrodome (15.21) nelygybę ir kai $k = 2$.

Įrodykime (15.21) nelygybę, kai $k = 3$. Apibrėžkime funkciją $g^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g^*(x) = \sum_{k=1}^{m+1} g(x_k)\mathbb{I}_{\{x_{k-1}<x\le x_k\}}.$$

Pastebėkime, kad $g^*(x) = 0$, kai $x \in \mathbb{R}\setminus[a,b]$. Intervaluose $x \in (x_{k-1}, x_k]$ funkcijos g^* reikšmė $g^*(x) = x_k$ yra pastovi, $k = 1, 2, \ldots, m+1$. Iš (15.19) ir nelygybių $|x_{k-1} - x_k| < \delta$ išplaukia nelygybė $|g(x) - g^*(x)| \le \varepsilon/20$ visiems $x \in [a,b]$. Todėl

$$\begin{aligned} |I_{n3} - I_{n0}| &\le |\mathbf{E}g^*(X_n) - \mathbf{E}g^*(X_0)| + \mathbf{E}|g(X_n) - g^*(X_n)| \\ &\quad + \mathbf{E}|g(X_0) - g^*(X_0)| \\ &\le |\mathbf{E}g^*(X_n) - \mathbf{E}g^*(X_0)| + \varepsilon/10. \end{aligned} \tag{15.23}$$

Liko įvertinti skirtumą $\delta_n = \mathbf{E}g^*(X_n) - \mathbf{E}g^*(X_0)$. Nesunku pastebėti, kad

$$\mathbf{E}g^*(X_n) = \sum_{k=1}^{m+1} g(x_k)\Big(F_n(x_k) - F_n(x_{k-1})\Big)$$

Todėl

$$\begin{aligned} \delta_n &= \sum_{k=1}^{m+1} g(x_k)\Big(F_n(x_k) - F_n(x_{k-1})\Big) - \sum_{k=1}^{m+1} g(x_k)\Big(F_0(x_k) - F_0(x_{k-1})\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} g(x_k)\Big((F_n(x_k) - F_0(x_k)) - (F_n(x_{k-1}) - F_0(x_{k-1}))\Big). \end{aligned}$$

Pritaikę (15.20) nelygybes ir nelygybę $|g(x)| \le C$, gauname

$$|\delta_n| \le \sum_{k=1}^{m+1} |g(x_k)| \frac{\varepsilon}{5(m+2)C} \le \frac{\varepsilon}{5}.$$

Iš čia ir (15.23) nelygybės išplaukia (15.21) nelygybė, kai $k = 3$.
Įrodymas baigtas.

Pastaba. Apibrėždami konvergavimą $X_n \to X_0$ pagal pasiskirstymą, reikalavome, kad konverguotų kiekvienos tolydžiosios ir aprėžtos funkcijos vidurkių seka

$$\lim_n \mathbf{E} f(X_n) = \mathbf{E} f(X_0). \tag{15.24}$$

Taigi, norėdami patikrinti ar $X_n \to X_0$ pagal pasiskirstymą, turime patikrinti (15.24) lygybę visoms tolydžiosioms aprėžtoms funkcijoms. Šį darbą galėtume palengvinti, jei pavyktų surasti siauresnę funkcijų klasę $\mathcal{H}$, kuri turėtų savybę: jei (15.24) lygybė yra teisinga visoms funkcijoms f iš $\mathcal{H}$, tai ji teisinga visoms tolydžiosioms aprėžtoms funkcijoms. Svarbi tokių funkcijų klasė yra trigonometrinės funkcijos $x \to \sin(tx)$, $x \to \cos(tx)$, $t \in \mathbb{R}$. Trigonometrinių funkcijų vidurkius nagrinėsime kitoje paskaitoje.

16. Charakteringosios funkcijos

Tirsime atsitiktinį dydį X, apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Atvaizdžiai $\omega \to \sin t\,X(\omega)$ ir $\omega \to \cos t\,X(\omega)$ yra atsitiktiniai dydžiai. Nagrinėkime funkcijas

$$f_1(t) = \mathbf{E}\sin(tX), \qquad f_2(t) = \mathbf{E}\cos(tX).$$

APB 16.1. Funkciją

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad f_X(t) = i f_1(t) + f_2(t)$$

vadiname atsitiktinio dydžio charakteringaja funkcija. Čia $i = \sqrt{-1}$ žymi menamą vienetą.
Pastaba 1. Primename, kad kompleksinius skaičius $z \in \mathbb{C}$ galime užrašyti taip

$$z = a + ib = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi,$$

kur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ir $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$. Čia φ žymi kampą, kurį erdvėje $\mathbb{R}^2$ sudaro abcisių ašis su tiese jungiančia koordinačių centrą $(0, 0)$ su tašku (a, b). Kai $\rho = 1$, turime $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Apibrėžę kompleksinio kintamojo $z \in \mathbb{C}$ eksponentinę funkciją $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tokiu būdu

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots ,$$

galime įrodyti (pasinaudodami, pvz., funkcijų $\varphi \to \sin\varphi$ ir $\varphi \to \cos\varphi$ skleidiniais Teiloro eilute), kad $e^{i\varphi} = i\sin\varphi + \cos\varphi$, kai $\varphi \in \mathbb{R}$. Pasiremdami šia lygybe, galime rašyti

$$f_X(t) = \mathbf{E}e^{itX}.$$

Pastaba 2. Dvimatį atsitiktinį vektorių $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$ galime interpretuoti, kaip kompleksinį atsitiktinį dydį (matųjį atvaizdį, igyjantį reikšmes kompleksinių skaičių aibėje su erdvės $\mathbb{R}^2$ Borelio aibių $\sigma-$algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$), $Y = Y_1 + iY_2$. Jo vidurkis apibrėžiamas, kaip realiosios ir menamosios dalių vidurkių suma, $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}Y_1 + i\mathbf{E}Y_2$. Nesunku patikrinti, kad bet kuriam kompleksiniam skaičiui $z = a + ib$ yra teisinga tapatybė $\mathbf{E}zY = z\mathbf{E}Y$. Kadangi kompleksinio skaičiaus modulis $|Y| = (Y_1^2 + Y_2^2)^{1/2} = ||\overline{Y}||$, tai iš 12.5 teiginio išplaukia nelygybė $|\mathbf{E}Y| \le \mathbf{E}||\overline{Y}|| = \mathbf{E}|Y|$. Pritaikę šią nelygybę charakteringajai funkcijai, gauname visiems $t \in \mathbb{R}$

$$|f_X(t)| \le \mathbf{E}|e^{itX}| = 1.$$

PVZ 16.1. Tarkime, kad atsitiktinio dydžio X skirstinys yra Puasono skirstinys $\mathcal{P}(\lambda)$. Suskaičiuosime jo charakteringąją funkciją

$$\begin{aligned} f_X(t) = \mathbf{E}e^{itX} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^z, \qquad z = e^{it}\lambda. \end{aligned}$$

Čia pasinaudojome tuo faktu, kad eksponentinė funkcija turi savybę $(e^z)^n = e^{nz}$, kai $z \in \mathbb{C}$. Gavome Puasono atsitiktinio dydžio charakteringąją funkciją

$$f_X(t) = \exp\{-\lambda + e^{it}\lambda\} = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}.$$

Teiginys 16.1. *Atsitiktinio dydžio X charakteringoji funkcija $f_X(t)$ turi tokias savybes.*

(i) Funkcija $f_X(t)$ yra tolygiai tolydi, t.y., kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja $\delta > 0$ toks, kad jei $|t - s| < \delta$, tai $|f_X(t) - f_X(s)| < \varepsilon$.

(ii) Tarkime $a, b \in \mathbb{R}$. Atsitiktinio dydžio $aX + b$ charakteringoji funkcija $f_{aX+b}(t) = e^{itb}f_X(at)$.

(iii) Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, tai jų sumos $X + Y$ charakteringoji funkcija $f_{X+Y}(t) = f_X(t)f_Y(t)$.

(iv) Jei $\mathbf{E}|X|^k < \infty$, kuriam nors $k = 1, 2, \ldots$, tai funkcija $f_X(t)$ yra $k-$kartų diferencijuojama. Jos išvestinės

$$f^{(r)}(t) = i^r\mathbf{E}X^r e^{itX}, \qquad r = 1, 2, \ldots, k, \tag{16.1}$$

yra tolydžiosios funkcijos.

Pastaba 3. Iš (16.1) lygybės išplaukia lygybė $\mathbf{E}X^r = i^{-r} f^{(r)}(0)$, kai $r = 1, 2, \ldots, k$.

Įrodymas. Įrodome teiginį (i). Jau žinome, žr (15.*), kad $\mathbf{P}(|X| > n) \to 0$, kai $n \to \infty$. Fiksuokime $\varepsilon \in (0, 1)$ ir natūralųjį skaičių N tokį, kad $\mathbf{P}(A) \le \varepsilon/4$, kur $A = \{\omega : |X(\omega)| > N\}$. Naudodamiesi 2 pastaba, eksponentinės funkcijos savybėmis $|e^{i\varphi}| = 1$, kai $\varphi \in \mathbb{R}$, ir $e^{z_1 z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$, galime rašyti

$$\begin{aligned}
|f_X(t) - f_X(s)| &= |\mathbf{E}(e^{itX} - e^{isX})| = |\mathbf{E}(e^{i(t-s)X} - 1)e^{isX}| \\
&\le \mathbf{E}|(e^{i(t-s)X} - 1)e^{isX}| \le \mathbf{E}|e^{i(t-s)X} - 1| \\
&= I_1 + I_2, \qquad (16.2)
\end{aligned}$$

čia pažymėta

$$I_1 = \mathbf{E}|e^{i(t-s)X} - 1|\, \mathbb{I}_{\{\omega \in A\}}, \qquad I_2 = E|e^{i(t-s)X} - 1|\, \mathbb{I}_{\{\omega \in \overline{A}\}}.$$

Kadangi $|e^{i\varphi} - 1| \le |e^{i\varphi}| + 1 = 2$ visiems $\varphi \in \mathbb{R}$, tai pirmasis dėmuo neviršija

$$I_1 \le 2\mathbf{E}\mathbb{I}_{\{\omega \in A\}} = 2\mathbf{P}(A) \le \varepsilon/2. \qquad (16.3)$$

Antrąjį dėmenį I_2 vertiname pasiremdami nelygybėmis

$$|e^{i\varphi} - 1| = |i \sin\varphi + \cos\varphi - 1| \le |\sin\varphi| + |\cos\varphi - 1| \le |\varphi| + \varphi^2$$

ir tuo faktu, kad $|X(\omega)| \le N$, kai $\omega \in \overline{A}$. Gauname

$$\begin{aligned}
I_2 &\le \mathbf{E}\Big(|t - s||X| + (t - s)^2 X^2\Big)\mathbb{I}_{\{\omega \in \overline{A}\}} \\
&\le |t - s|N + (t - s)^2 N^2 \le \varepsilon/2, \qquad (16.4)
\end{aligned}$$

kai $|t - s| < \varepsilon/4N < 1$ ir $\varepsilon < 1$.

Įstatę (16.3) ir (16.4) nelygybes į (16.2) formulę, gauname

$$|t - s| \le \delta \;\Rightarrow\; |f_X(t) - f_X(s)| \le \varepsilon,$$

kur $\delta = \varepsilon/4N$.

Įrodome (ii). Iš 2 Pastabos išplaukia lygybės

$$f_{aX+b}(t) = \mathbf{E}e^{it(aX+b)} = \mathbf{E}e^{itb}e^{itaX} = e^{itb}\mathbf{E}e^{i(ta)X} = e^{itb} f_X(at).$$

Įrodome (iii). Iš 10.1 Teoremos išplaukia lygybės

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(t) &= \mathbf{E}e^{itX+itY} = \mathbf{E}e^{itX}e^{itY} \\
&= \mathbf{E}\Big(\cos(tX) + i\sin(tX)\Big)\Big(\cos(tY) + i\sin(tY)\Big) \\
&= i^2\mathbf{E}\sin(tX)\sin(tY) + i\mathbf{E}\sin(tX)\cos(tY) \\
&+ i\mathbf{E}\cos(tX)\sin(tY) + \mathbf{E}\cos(tX)\cos(tY) \\
&= i^2\mathbf{E}\sin(tX)\mathbf{E}\sin(tY) + i\mathbf{E}\sin(tX)\mathbf{E}\cos(tY) \\
&+ i\mathbf{E}\cos(tX)\mathbf{E}\sin(tY) + \mathbf{E}\cos(tX)\mathbf{E}\cos(tY) \\
&= \mathbf{E}\Big(\cos(tX) + i\sin(tX)\Big)\mathbf{E}\Big(\cos(tY) + i\sin(tY)\Big) \\
&= f_X(t)f_Y(t).
\end{aligned}
$$

Įrodome (iv). Nagrinėkime pirmąją išvestinę ($k = 1$). Iš lygybės $f_X(t+h) - f_X(t) = \mathbf{E}e^{itX}(e^{ihX} - 1)$ išplaukia

$$
\begin{aligned}
f'_X(t) &= \lim_{h\to 0}\Big(f_X(t+h) - f_X(t)\Big)/h \\
&= \lim_{h\to 0}\mathbf{E}\Big(e^{itX}(e^{ihX} - 1)/h\Big) \\
&= \lim_{h\to 0}\mathbf{E}\Big(X\,e^{itX}(e^{ihX} - 1)/hX\Big).
\end{aligned}
$$

Norėtume sukeisti vidurkio ir ribos ženklus. Kada tai galima daryti?

*Intarpas.**** Nagrinėkime funkcijų seką $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. $f_n(x) = 0$, kai $x \in [n^{-1}, 1]$, $f_n((2n)^{-1}) = 2n$ ir f_n tiesinė intervaluose $[0, (2n)^{-1}]$ ir $[(2n)^{-1}, n^{-1}]$. Aišku, kad $\lim_n f_n(x) = 0$ visiems $x \in [0,1]$ ir $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$. Taigi,

$$
1 = \lim_n \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_n f_n(x)\,dx = 0.
$$

Sąlygas, kurių turime pareikalauti norėdami sukeisti ribos ir vidurkio ženklus, nurodė A.Lebegas XX a. pradžioje teoremoje "apie mažoruotą konvergavimą". Pagrindinė sąlyga: $\exists$ integruojama neneigiama funkcija g tokia, kad $|f_n(x)| \le g(x)$ visiems $x \in [0,1]$ ir visiems n.***

Atsitiktinis dydis $e^{itX}\frac{e^{ihX}-1}{hX}$ yra aprėžtas, nes

$$
\big|e^{itX}\frac{e^{ihX} - 1}{hX}\big| = \big|\frac{e^{ihX} - 1}{hX}\big| \le \big|\frac{\sin hX}{hX}\big| + \big|\frac{1 - \cos hX}{hX}\big| \le 2.
$$

Todėl atsitiktinis dydis, kurio vidurkį skaičiuojame, tenkina nelygybę

$$|X\,e^{itX}(e^{ihX}-1)/hX| \le 2|X|.$$

Sakoma, kad funkcija $\omega \to 2|X(\omega)|$ yra atsitiktinio dydžio $X\,e^{itX}(e^{ihX}-1)/hX$ mažorantė. Pasiremdami fundamentaliu integralo ir mato teorijos teiginiu apie tą pačią možorantę turinčių atsitiktinių dydžių vidurkių sekos konvergavimą (Lebego teorema apie mažoruotą konvergavimą), žr. [Dudley], [Kubilius], darome išvadą, kad riba egzistuoja ir

$$\lim_{h\to 0}\mathbf{E}\Big(X\,e^{itX}(e^{ihX}-1)/hX\Big) = \mathbf{E}\lim_{h\to 0}\Big(X\,e^{itX}(e^{ihX}-1)/hX\Big).$$

Dešinė pusė lygi $\mathbf{E}\Big(X\,e^{itX}\,i\Big)$. Gavome lygybę

$$f'_X(t) = i\mathbf{E}X\,e^{itX}. \tag{16.5}$$

Tai atskiras (16.1) lygybės atvejis, kai $k=1$.

Jei $k \ge 2$, aukštesnių eilių išvestines $f_X^{(r)}(t)$ tirsime nuosekliai taikydami aukščiau pateiktą įrodymo schemą. Pvz., kai $r=2$ rašysime $f_X^{(2)}(t) = \lim_{h\to 0}(f'_X(t+h) - f'_X(t))/h$ ir įstatysime $f'_X(t)$ išraišką (16.5).

Įrodymas baigtas.

Pastaba. Atsitiktinio dydžio charakteringoji funkcija priklauso tik nuo šio dydžio tikimybinio skirstinio (skirtingų atsitiktinių dydžių, turinčių vienodus tikimybinius skirstinius, charakteringosios funkcijos sutampa). Skirtingus tikimybinius matus, apibrėžtus realiųjų skaičių Borelio $\sigma-$algebroje, atitinka skirtingos charakteringosios funkcijos. Be to, atsitiktinių dydžių sekos konvergavimas pagal pasiskirstymą yra ekvivalentus jų charakteringųjų funkcijų sekos konvergavimui. Šiuos teiginius suformuluosime, bet neįrodysime.

Teorema 16.1. *Jei X ir Y yra atsitiktiniai dydžiai su skirstiniais P_X ir P_Y ir charakteringosiomis funkcijomis $f_X(t)$ ir $f_Y(t)$, tai*

$$P_X = P_Y \;\Leftrightarrow\; f_X(t) = f_Y(t) \qquad \textit{visiems} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

PVZ 16.2. Tarkime X yra atsitiktinis dydis su Puasono tikimybiniu skirstiniu $\mathcal{P}(\lambda_1)$, o Y yra atsitiktinis dydis su Puasono tikimybiniu skirstiniu $\mathcal{P}(\lambda_2)$. Jei šie atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi, tai jų sumos $Z = X+Y$ tikimybinis skirstinys yra Puasono skirstinys $\mathcal{P}(\lambda)$, kur $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Tuo nesunku įsitikinti pritaikius 16.1 teoremą. Charakteringoji funkcija $f_\lambda(t)$, atitinkanti Puasono tikimybinį skirstinį $\mathcal{P}(\lambda)$, yra suskaičiuota **16.1** pavyzdyje,

$f_\lambda(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$. Taigi $f_X(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)}$ ir $f_Y(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)}$. Iš **16.1** teiginio išplaukia lygybė

$$f_Z(t) = f_{X+Y}(t) = f_X(t)f_Y(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)}e^{\lambda_2(e^{it}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}.$$

Kadangi atsitiktinio dydžio Z charakteringoji funkcija sutampa su charakteringąją funkcija, atitinkančia Puasono tikimybinį skirstinį $\mathcal{P}(\lambda)$, tai pasirėmę **16.1** teorema, darome išvadą, kad atsitiktinio dydžio Z skirstinys yra Puasono tikimybinis skirstinys $\mathcal{P}(\lambda)$.

Teorema 16.2. *Teiginiai yra ekvivalentūs.*
(i) Atsitiktinių dydžių seka $\{X_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ *konverguoja pagal pasiskirstymą į atsitiktinį dydį* X_0.
(ii) Visiems $t \in \mathbb{R}$ *teisinga lygybė* $\lim_n f_{X_n}(t) = f_{X_0}(t)$.

Ar galime nuspręsti kuri funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ yra kokio nors atsitiktinio dydžio charakteringoji funkcija? Į šį klausimą atsako S. Bochnerio teorema.
Teorema 16.3. *Funkcijai* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *teiginiai yra ekvivalentūs.*
(i) Egzistuoja toks tikimybinis matas (apibrėžtas erdvės $\mathbb{R}$ *Borelio aibių* $\sigma-$*algebroje), kad jį atitinkanti charakteringoji funkcija yra* f.
(ii) f *yra tolydžioji,* $f(0) = 1$ *ir bet kuriam realiųjų skaičių rinkiniui* $t_1, \dots, t_n$ *ir bet kuriam kompleksinių skaičių rinkiniui* $z_1, \dots, z_n$ *yra teisinga nelygybė*

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_j - t_k) z_j \overline{z}_k \geq 0. \tag{16.5A}$$

Čia $\overline{z} = a - ib$ *žymi kompleksinio skaičiaus* $z = a + ib$ *jungtinį skaičių.*
Funkcijos, kurioms yra teisinga (16.5A) lygybė, yra vadinamos teigiamai apibrėžtomis.
Šių teoremų įrodymus galima rasti vadovėlyje [Dudley].

PVZ 16.3. *Standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio* X *charakteringoji funkcija.* Atsitiktinis dydis X turi tankį $p(u) = (2\pi)^{-1/2}e^{-u^2/2}$. Todėl jo charakteringoji funkcija

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbf{E}\cos tX + i\mathbf{E}\sin tX = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\cos tx dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\sin tx dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}e^{-x^2/2}dx. \end{aligned}$$

Nagrinėkime kompleksinio kintamojo $z = x + iy$ funkcijos $z \to e^{-z^2/2}$ (kreivinį) integralą uždaru stačiakampiu kontūru C_N, kurio kampų koordinatės yra $(-N, 0)$,

$(-N,-t)$, $(N,-t)$ ir $(N,0)$. Iš Koši teoremos išplaukia, kad šio kontūro integralo reikšmė yra 0, t.y.,

$$\int_{C_N} e^{-z^2/2}dz = 0. \tag{16.6}$$

Kitą vertus, kontūras susideda iš stačiakampio kraštų ir todėl

$$\int_{C_N} e^{-z^2/2}dz = \int_N^{-N} e^{-x^2/2}dx + i\int_0^{-t} e^{-(-N+iy)^2/2}dy$$
$$+ \int_{-N}^{N} e^{-(x-it)^2/2}dx + i\int_{-t}^{0} e^{-(N+iy)^2/2}dy.$$

Kadangi kairė pusė lygi 0, žr. (16.6), tai yra teisinga lygybė

$$\begin{aligned}\int_{-N}^{N} e^{-x^2/2}dx &= \int_{-N}^{N} e^{-(x-it)^2/2}dx + i\int_0^{-t} e^{-(-N+iy)^2/2}dy \\ &+ i\int_{-t}^{0} e^{-(N+iy)^2/2}dy = I_N^{(1)} + I_N^{(2)} + I_N^{(3)}.\end{aligned} \tag{16.7}$$

Atskirai skaičiuojame ir vertiname integralus I_N:

$$I_N^{(1)} = \int_{-N}^{+N} e^{-(x^2-2itx-t^2)/2}dx = e^{t^2/2}\int_{-N}^{+N} e^{itx}e^{-x^2/2}dx,$$
$$|I_N^{(2)}| \le |t| \max_{|y|<|t|} \left|e^{-(-N+iy)^2/2}\right| \le |t|\, e^{(t^2-N^2)/2},$$

Panašiai įvertiname $|I_N^{(3)}| \le |t|\, e^{(t^2-N^2)/2}$. Kai skaičius $t \in \mathbb{R}$ yra fiksuotas, tai iš gautų įverčių išplaukia ribos

$$I_N^{(2)} \to 0, \qquad I_N^{(3)} \to 0, \qquad I_N^{(1)} \to e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-x^2/2}dx,$$

kai $N \to \infty$. Įstatę šia ribas į (16.7), gauname lygybę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}e^{-x^2/2}dx.$$

Kairė šios lygybės pusė yra lygi skaičiui $\sqrt{2\pi}$. Todėl

$$e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}e^{-x^2/2}dx.$$

Darome išvadą, kad ieškomoji funkcija $f(t) = e^{-t^2/2}$.

17. Centrinė ribinė teorema

Tirsime atsitiktinių dydžių, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, seką $X_1, X_2, \dots$.

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę ir turi baigtinį pirmąjį momentą, t.y., $\mathbf{E}|X_i| < \infty$. Tuomet jų matematinė viltis (vidurkis) yra apibrėžta, žymėkime $a = \mathbf{E}X_i$, ir sekai yra teisingas didžiųjų skaičių dėsnis, t.y., aritmetinių vidurkių seka $n^{-1}S_n \to a$, kai $n \to \infty$. Čia žymime $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Aproksimacija

$$n^{-1}S_n \approx a \tag{17.1}$$

yra labai svarbi statistinių tyrimų išvadoms pagrįsti: surinkę n nepriklausomų stebėjimų duomenų $X_1, X_2, \dots, X_n$ imtį, galime įvertinti tiriamojo parametro a reikšmę. Aišku, kad negalime tikėtis griežtos lygybės $n^{-1}S_n = a$, nes kairėje pusėje turime atsitiktinį dydį $\omega \to n^{-1}S_n(\omega)$, o dešinėje - (neatsitiktinį) skaičių. Taigi, vertinimo paklaida $n^{-1}S_n - a$ yra atsitiktinis dydis, o mūsų aproksimacija (17.1) yra tuo tikslesnė, kuo "mažesnė" yra ši paklaida. Statistinio tyrimo rezultatų patikimumas labai priklauso nuo šios vertinimo paklaidos ir todėl didelis dėmesys yra skiriamas atsitiktinio dydžio $n^{-1}S_n - a$ tikimybinio skirstinio analizei.

Vos porai dešimtmečių prabėgus po Bernulio paskelbtų darbų, kuriuose buvo suformuluotas didžiųjų skaičių dėsnis, De Muavras 1730 m. paskelbė atradęs naują dėsningumą, kuriam paklūsta vertinimo paklaida $n^{-1}S_n - a$ nepriklausomų Bernulio eksperimentų atveju. Vėlesni Laplaso, Gauso ir kitų matematikų ir statistikų tyrimai atskleidė, kad De Muavro atrastas dėsningumas yra universalus, t.y., jis stebimas daugybėje skirtingų statistinių eksperimentų. Daugelio žmonių pastangomis buvo sukurta tinkama matematinė kalba jam aprašyti. Šios kalbos elementai - atsitiktinio dydžio tikimybinis skirstinys ir pasiskirstymo funkcija, konvergavimas pagal pasiskirstymą - yra pateikti ankstesniuose skyreliuose. Vartodami šias sąvokas galime suformuluoti centrinę ribinę teoremą (toks pavadinimas prigijo De Muavro atrastąjam reiškiniui): atsitiktinių dydžių seka $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(n^{-1}S_n - a)$ konverguoja pagal pasiskirstymą į standartinį normalųjį atsitiktinį dydį, t.y., visiems $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(n^{-1}S_n - a) \le x\Big) \to \Phi(x), \qquad \text{kai} \qquad n \to \infty. \tag{17.2}$$

Čia laikome, kad atsitiktinių dydžių X_i dispersija $\sigma^2 = \mathbf{D}X_1 > 0$. Funkcija

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

yra standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Centrinės ribinės teoremos formulavime yra du nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sekos $X_1, X_2, \ldots$ parametrai: vidurkis $a = \mathbf{E}X_i$ ir dispersija $\sigma^2 = \mathbf{D}X_i$. Šiuos parametrus galim apibrėžti atsitiktiniams dydžiams, turintiems antrąjį momentą, t.y., kai $\mathbf{E}X_i^2 < \infty$. Galima įrodyti, kad antrojo momento sąlygos ($\mathbf{E}X_i^2 < \infty$) pakanka, kad būtų teisinga (17.2) riba.

Teorema 17.1. *Tarkime, $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių, turinčių antruosius momentus, seka. Tuomet teisinga (17.2) riba.*

Įrodymas. Įrodysime teoremą tuo atveju, kai patenkinta griežtesnė, nei antrojo momento, sąlyga: tarsime, kad $\mathbf{E}|X_i|^3 < \infty$.

Įveskime atsitiktinius dydžius $Y_i = \sigma^{-1}(X_i - a)$. Kadangi $a = \mathbf{E}X_i$ ir $\sigma^2 = \mathbf{D}X_i$, tai $\mathbf{E}Y_i = 0$ ir $\mathbf{D}Y_i = 1$. Be to, atsitiktiniai dydžiai $Y_1, Y_2, \ldots$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę. Iš lygybės

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(n^{-1}S_n - a) = n^{-1/2}(Y_1 + \cdots + Y_n)$$

išplaukia, kad pakanka įrodyti atsitiktinių dydžių sekos $Z_n = n^{-1/2}(Y_1 + \cdots + Y_n)$ konvergavimą pagal pasiskirstymą į standartinį normalųjį atsitiktinį dydį.

Įrodyme taikysime **16.2** teoremą. Pagal šią teoremą, Z_n konverguoja į standartinį normalųjį atsitiktinį dydį, jei charakteringųjų funkcijų seka $f_n(t) = \mathbf{E}e^{itZ_n}$ konverguoja į standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio charakteringąją funkciją $f(t)$ visiems $t \in \mathbb{R}$. Žinome, žr. **16.3** pvz., kad $f(t) = e^{-t^2/2}$. Taigi, mums reikia įrodyti, kad

$$f_n(t) \to e^{-t^2/2}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{17.3}$$

Kadangi $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai jų sumos charakteringoji funkcija yra lygi dėmenų char. funkcijų sandaugai (**16.1** teiginys),

$$f_n(t) = \mathbf{E}e^{it\frac{Y_1}{\sqrt{n}}} \cdots \mathbf{E}e^{it\frac{Y_n}{\sqrt{n}}} = \psi^n(t), \qquad \text{kur} \qquad \psi(t) = \mathbf{E}e^{it\frac{Y_1}{\sqrt{n}}}.$$

Nagrinėkime nepriklausomų atsitiktinių dydžių, turinčių tą patį standartinį normalųjį skirstinį, rinkinį $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Iš lygybės $\mathbf{E}e^{itV_k} = e^{-t^2/2}$ išplaukia lygybė $\mathbf{E}e^{itV_k/\sqrt{n}} = e^{-t^2/2n}$. Todėl sumos $W_n = n^{-1/2}(V_1 + \cdots + V_n)$ charakteringoji funkcija

$$\mathbf{E}e^{itW_n} = \mathbf{E}e^{it\frac{V_1}{\sqrt{n}}} \cdots \mathbf{E}e^{it\frac{V_n}{\sqrt{n}}} = \varphi^n(t) = e^{-t^2/2}, \qquad \text{kur} \qquad \varphi(t) = e^{-t^2/2n}.$$

Taigi, atsitiktinis dydis W_n turi standartinį normalųjį skirstinį (taikome **16.1** teoremą).

Tolesnė įrodymo eiga remsis tokia įdėja. Standartinį normalųjį dydį W_n galime "išskaidyti" į nepriklausomų normaliųjų dydžių sumą: $W_n = \frac{V_1}{\sqrt{N}} + \cdots + \frac{V_n}{\sqrt{N}}$. Todėl norėdami lyginti W_n ir Z_n galime lyginti atitinkamas sumas $\frac{V_1}{\sqrt{N}} + \cdots + \frac{V_n}{\sqrt{N}}$ ir $\frac{Y_1}{\sqrt{N}} + \cdots + \frac{Y_n}{\sqrt{N}}$. Jei pasisektų įrodyti, kad dėmenys $\frac{V_i}{\sqrt{N}}$ ir $\frac{Y_i}{\sqrt{N}}$ yra artimi, gautume, kad ir sumos nedaug skiriasi. Tuo pasiremdami įrodytume (17.3).

I įrodymo žingsnis. Įvertiname skirtumą $\delta(t) = \psi(t) - \varphi(t)$. Tam naudosime eksponentinės funkcijos skleidinį argumento laipsniais. Visiems natūraliesiems k ir $s \in \mathbb{R}$ yra teisinga lygybė (žr. [Kubilius])

$$e^{is} = 1 + is + \frac{(is)^2}{2!} + \cdots + \frac{(is)^k}{k!} + R_k, \qquad \text{kur} \qquad |R_k| \le \frac{|s|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Pritaikę šią nelygybę tuo atveju kai $k = 2$, gauname

$$\begin{aligned}\psi(t) = \mathbf{E}e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}Y_1} &= \mathbf{E}\Big(1 + i\frac{t}{\sqrt{n}}Y_1 + i^2\frac{t^2}{n}Y_1^2 + R_2(Y_1)\Big)\\ &= 1 + i\frac{t}{\sqrt{n}}\mathbf{E}Y_1 + i^2\frac{t^2}{n}\mathbf{E}Y_1^2 + \mathbf{E}R_2(Y_1)\\ &= 1 - \frac{t^2}{n} + R,\end{aligned}$$

Gauto skleidinio liekana R tenkina nelygybes

$$|R| = |\mathbf{E}R_2(Y_1)| \le \mathbf{E}|R_2(Y_1)| \le n^{-3/2}\frac{|t|^3}{3!}\mathbf{E}|Y_1|^3.$$

Lygiai taip pat įrodome skleidinį

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{n} + R', \qquad \text{kur} \qquad |R'| \le n^{-3/2}\frac{|t|^3}{3!}\mathbf{E}|V_1|^3.$$

Palyginę gautuosius skleidinius matome, kad

$$|\delta_n| \le n^{-3/2}\frac{|t|^3}{3!}(\mathbf{E}|Y_1|^3 + \mathbf{E}|V_1|^3). \tag{17.4}$$

II įrodymo žingsnis. Vertiname skirtumą

$$\begin{aligned}f^n(t) - e^{-t^2/2} &= \psi^n(t) - \varphi^n(t)\\ &= \delta\Big(\psi^{n-1}(t) + \psi^{n-2}(t)\varphi(t) + \cdots + \psi(t)\varphi^{n-2}(t) + \varphi^{n-1}(t)\Big).\end{aligned}$$

Iš nelygybių $|\psi(t)| \leq 1$ ir $|\varphi(t)| \leq 1$ išplaukia nelygybė $|\psi^k(t)\varphi^{n-k-1}(t)| \leq 1$. Todėl

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq n|\delta|.$$

Įstatę (17.4) nelygybę, gauname

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq n^{-1/2}\frac{|t|^3}{3!}(\mathbf{E}|Y_1|^3 + \mathbf{E}|V_1|^3).$$

Aišku, kad bet kuriam (fiksuotams skaičiui) $t \in \mathbb{R}$ dešinės pusės riba, kai $n \to \infty$ yra lygi 0. Įrodėme (17.3) ribą.
Įrodymas baigtas.

17.1 teoremą galima apibendrinti skirtingai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sekoms. Tarkime, $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių, turinčių baigtinius antruosius momentus ($\mathbf{E}X_i^2 < \infty$ visiems i), seka. Sumos $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ dispersiją žymėkime $B_n^2 = \mathbf{D}S_n$.
Suomių matematikas Lindebergas įrodė tokią teoremą.

Teorema 17.2. *Tarkime, $B_n > 0$ visiems n ir kiekvienam $\varepsilon > 0$ teisinga lygybė*

$$\lim_n \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i)^2\mathbb{I}_{\{|X_1 - \mathbf{E}X_i| > \varepsilon B_n\}} = 0. \tag{17.5}$$

Tuomet atsitiktinių dydžių $B_n^{-1}(S_n - \mathbf{E}S_n)$ seka konverguoja pagal pasiskirstymą į standartinį normalųjį atsitiktinį dydį, t.y.,

$$\mathbf{P}\Big(B_n^{-1}(S_n - \mathbf{E}S_n) \leq x\Big) \to \Phi(x), \qquad \textit{kai} \qquad n \to \infty.$$

Sąlyga (17.5) vadiname Lindebergo sąlyga.

LITERATŪRA

[Dudley] Dudley, R.M. *Real analysis and probability*, Chapman & Hall/CRC, 1999.
[Kabaila] Kabaila, V. *Matematinė analizė. I*, Mokslas, 1983.
[Kabaila] Kabaila, V. *Matematinė analizė. II*, Mokslas, 1986.
[Kubilius] Kubilius, J. *Tikimybių teorija ir matematinė statistika*, Mokslas, 1980.