Tiesinė algebra ir geometrija bioinformatikams. Pratybos.

Rimantas Grigutis

14 pratybos. Realieji kvaternionai ir posūkiai $\mathbf{R}^3$.

Nagrinėjami du uždaviniai

14.1(tiesioginis uždavinys). *Pasukti vektorių* $\mathbf{x}$ *kampu* φ *vektoriaus* $\mathbf{u}$ *kryptimi.*

Sprendimas. Pasukus vektorių $\mathbf{x}$ kampu φ vektoriaus $\mathbf{u}$ kryptimi turėsime vektorių

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\boldsymbol{\alpha}^{-1},$$

čia $\boldsymbol{\alpha} = \cos\frac{\varphi}{2} + \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\sin\frac{\varphi}{2}$.

14.2(atvirkštinis uždavinys). *Kokį posūkį atlieka transformacija* $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$, *čia* $\boldsymbol{\alpha} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Sprendimas. Transformacija $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$ erdvę pasuka kampu $\varphi = 2\arccos(a)$ vektoriaus $\mathbf{u} = (b; c; d)$ kryptimi.

Uždaviniai. Pasukite vektorių $\mathbf{x}$ kampu φ vektoriaus $\mathbf{u}$ kryptimi

1 $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$, $\varphi = 20°, \mathbf{x} = (0, 0, 20)$
Ats.: $\left(\ 4.8;\ \ -4.8;\ \ 18.8\ \right)$

2 $\mathbf{u} = (-1, 1, 0)$, $\varphi = 20°, \mathbf{x} = (0, 0, -20)$
Ats.:$\left(\ -4.8;\ \ -4.8;\ \ -18.8\ \right)$

3. $\mathbf{u} = (-1, -1, 0)$, $\varphi = 40°, \mathbf{x} = (0, 0, 30)$
Ats.: $\left(\ -13.6;\ \ 13.6;\ \ 23.0\ \right)$

4. $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$, $\varphi = 40°, \mathbf{x} = (0, 0, -30)$
Ats.: $\left(\ 13.6;\ \ 13.6;\ \ -23.0\ \right)$

5. $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\varphi = 50°, \mathbf{x} = (0, 0, 40)$
Ats.: $\left(\ 7.1;\ \ -21.7;\ \ 32.9\ \right)$

6. $\mathbf{u} = (-1, 0, 1)$, $\varphi = 50°, \mathbf{x} = (0, 0, -40)$
Ats.: $\left(\ 7.1;\ \ -21.7;\ \ -32.9\ \right)$

7. $\mathbf{u}=(-1,0,-1)$, $\varphi=70°, \mathbf{x}=(0,0,50)$
Ats.: $\left(\ 16.5;\quad 33.2;\quad 33.6\ \right)$

8. $\mathbf{u}=(1,0,-1)$, $\varphi=70°, \mathbf{x}=(0,0,-50)$
Ats.: $\left(\ 16.5;\quad 33.2;\quad -33.6\ \right)$

9. $\mathbf{u}=(0,-1,-1)$, $\varphi=80°, \mathbf{x}=(0,0,60)$
Ats.: $\left(\ -41.8;\quad 24.8;\quad 35.2\ \right)$

Pavyzdys. Pasuksime vektorių $\mathbf{x}=\mathbf{i}$ kampu $\varphi=90°$ vektoriaus $\mathbf{u}=(0;1;1)$ kryptimi.

Šio posūkio kvaternionas yra

$$\boldsymbol{\alpha}=\cos\frac{90°}{2}+\frac{(0;1;1)}{\sqrt{2}}\sin\frac{90°}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{(0;1;1)}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}$$

Tada

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\boldsymbol{\alpha}^{-1}=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}\right)(\mathbf{i})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\mathbf{j}-\frac{1}{2}\mathbf{k}\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)(\mathbf{i})\left(\sqrt{2}-\mathbf{j}-\mathbf{k}\right)=$$
$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\mathbf{i}-\mathbf{k}+\mathbf{j}\right)\left(\sqrt{2}-\mathbf{j}-\mathbf{k}\right)=\frac{1}{4}\left(2\mathbf{i}-\sqrt{2}\mathbf{k}+\sqrt{2}\mathbf{j}-\sqrt{2}\mathbf{k}-\mathbf{i}-\mathbf{1}+\sqrt{2}\mathbf{j}+\mathbf{1}-\mathbf{i}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\mathbf{j}-2\sqrt{2}\mathbf{k}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}=$$
$$\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Atsakymas: $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\alpha}}((1;0;0))=\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.