

13 Pratybos. Kvadratinės formos

1. Raskite kvadratinių formų:

a) rangą;

b) kanonines išraiškas ir užrašykite tiesinius kintamųjų keitinius, kuriuos atlikus, gautos tos išraiškos;

c) normaliąsias išraiškas ir užrašykite tiesinius kintamųjų keitinius, kuriuos atlikus, gautos tos išraiškos :

1) $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$

4) $x_1x_2 + x_2x_3, n = 3 ;$

5) $x_1x_2, n = 2 ; x_1x_2 + x_3x_4, n = 4; x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{2n-1}x_{2n};$

6) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$

2. Ar kongruenčios šios kvadratinės formos:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3,$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2 + 4y_1y_2 - 4y_1y_3 - 10y_2y_3.$$

3. Užrašykite tiesinį kintamųjų keitinį, kurį atlikus, iš kvadratinės formos f gaunama kvadratinė forma g .

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 14x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3,$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + 5y_2^2 + 19y_3^2 + 4y_1y_2 + 12y_1y_3 - 6y_2y_3.$$

4. Su kuriomis parametro λ reikšmėmis šios kvadratinės formos yra teigiamai apibrėžtos:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

5. Neorientuotam grafiui \mathbf{G} , kurio viršūnės v_1, \dots, v_n , priskiriame kvadratinę formą $F_G = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$, čia

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ sujungtos} \\ 0, & \text{jeigu viršūnės } v_i \text{ ir } v_j \text{ nesujungtos} \end{cases}$$

Irodykite, kad grafo

1)

$$\mathbf{A}_n: \circ - \circ - \dots - \circ - \circ, \text{ čia } n \text{ viršūnių,}$$

kvadratinė forma F_{A_n} yra teigiamai apibrėžta.

2)

$$\mathbf{D}_n: \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \dots - \circ \\ | \\ \circ \end{array}, \text{ čia } n \text{ viršūnių,}$$

kvadratinė forma F_{D_n} yra teigiamai apibrėžta.

3)

$$\mathbf{E}_n: \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \dots - \circ - \circ \\ | \\ \circ \end{array}, \text{ čia } n = 6, 7, 8 \text{ viršūnių,}$$

kvadratinė forma F_{E_n} yra teigiamai apibrėžta.

4)

$$\tilde{\mathbf{E}}_7: \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ \circ \end{array} - \circ - \circ - \circ,$$

kvadratinė forma $F_{\tilde{E}_7}$ yra teigiamai pusapibrėžta, t.y. $F_{\tilde{E}_7}(x_1, x_2) \geq 0$ su visais x_1, x_2 .

5)

$$\tilde{\mathbf{E}}_8: \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \dots - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ \circ \end{array},$$

kvadratinė forma $F_{\tilde{E}_8}$ yra teigiamai pusapibrėžta, t.y. $F_{\tilde{E}_8}(x_1, x_2) \geq 0$ su visais x_1, x_2 .

6)

$$\tilde{\mathbf{E}}_6: \begin{array}{ccccccc} & & & \circ & & & \\ & & & | & & & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & , \\ & & & | & & & \\ & & & \circ & & & \end{array}$$

kvadratinė forma $F_{\tilde{E}_6}$ yra teigiamai pusapibrėžta, t.y. $F_{\tilde{E}_6}(x_1, x_2) \geq 0$ su visais x_1, x_2 .

7)

$$\tilde{\mathbf{D}}_n: \begin{array}{ccccccc} & & \circ & & & & \circ \\ & & | & & & & | \\ \circ & - & \circ & - & \dots & - & \circ & , \text{ čia } n + 1 \text{ viršūnė,} \\ & & | & & & & | \\ & & \circ & & & & \circ \end{array}$$

kvadratinė forma $F_{\tilde{D}_n}$ yra teigiamai pusapibrėžta, t.y. $F_{\tilde{D}_n}(x_1, x_2) \geq 0$ su visais x_1, x_2 .

8)

$$\tilde{\mathbf{A}}_n: \begin{array}{ccc} \circ & - & \circ \\ | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \\ \circ & - & \circ \end{array}, \text{ čia } n + 1 \text{ viršūnė,}$$

kvadratinė forma $F_{\tilde{A}_n}$ yra teigiamai pusapibrėžta, t.y. $F_{\tilde{A}_n}(x_1, x_2) \geq 0$ su visais x_1, x_2 .