

12 pratybos. Tiesinės transformacijos \mathbf{R}^3 ir jų matricos

Duota tiesinės transformacijos $\mathcal{A} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ matrica A standartinėje bazėje.

1. Raskite charakteristinį polinomą $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tI)$
2. Raskite \mathcal{A} tikrines reikšmes.
3. Raskite \mathcal{A} tikrinius vektorius, atitinkančius visas realias tikrines reikšmes.
4. Raskite $\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$ su visomis realiomis tikrinėmis reikšmėmis λ
5. Raskite \mathcal{A} Žordano matricą.
6. Raskite \mathcal{A} Žordano bazę.

Sprendimas

1. Randame $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tI)$.
2. Randame \mathcal{A} tikrines reikšmes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
3. Randame $r_1 = \text{rank}(A - \lambda_1 I)$
 $r_2 = \text{rank}(A - \lambda_2 I)$
 $r_3 = \text{rank}(A - \lambda_3 I)$.
4. Apskaičiuojame $d_1 = \dim \ker(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I}) = 3 - r_1$
 $d_2 = \dim \ker(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{I}) = 3 - r_2$
 $d_3 = \dim \ker(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{I}) = 3 - r_3$.
5. Pagal klasifikacinę lentelę randame Žordano matricą J_A .
6. Vadovaudamiesi klasifikacine lentele randame Žordano bazę $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$
7. Patikriname: $J_A = C^{-1}AC$, čia $C = (\mathbf{v}_1^T | \mathbf{v}_2^T | \mathbf{v}_3^T)$ - bazių keitimo matrica.

Uždaviniai.

1. $\begin{pmatrix} -5 & 12 & -18 \\ -6 & 13 & -18 \\ -3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 4 & -12 & 18 \\ 6 & -14 & 18 \\ 3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -2 & 12 & -18 \\ -6 & 16 & -18 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -16 & 38 & -42 \\ -4 & 11 & -12 \\ 3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 20 & -46 & 54 \\ 8 & -19 & 24 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} -24 & 58 & -66 \\ -8 & 21 & -24 \\ 3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 28 & -66 & 78 \\ 12 & -29 & 36 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$9. \begin{pmatrix} 3 & -8 & 12 \\ 4 & -9 & 12 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad 10. \begin{pmatrix} 6 & -20 & 30 \\ 10 & -24 & 30 \\ 5 & -10 & 11 \end{pmatrix}$$

12.1 Pavyzdys

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

charakteringasis polinomas $\chi_{\mathcal{A}}(t) = -t^3 - t^2 + 8t + 12 = -(t-3)(t+2)^2$

tikrinės reikšmės : $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$

tikriniai vektoriai : $\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 1)$ atitinka $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 1)$ atitinka

$\lambda_3 = 3$

$$\text{rank}(A - (-2)I) = 2 \implies \dim \ker(\mathcal{A} - (-2)\mathcal{I}) = 1.$$

$$(A - (-2)I)^2 = \left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 25 \\ 25 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sistemos } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 25 \\ 25 & 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ bendrasis sprendinys } \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{o fundamentalioji sprendinių sistema } \mathbf{f}_1^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tikriname

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gauname Žordano bazę: $\mathbf{v}_1 = (-1; 0; 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1; -1; -1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$.

Žordano matrica

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

12.2 Pavyzdys

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 12 \\ 4 & -9 & 12 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

charakteringasis polinomas $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^3 + t^2 - t - 1 = (t - 1)(t + 1)^2$

tikrinės reikšmės : $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$.

tikriniai vektoriai : $\mathbf{u}_1 = (2; 1; 0), \mathbf{u}_2 = (-3; 0; 1)$ atitinka $\lambda_1 = -1, \mathbf{u}_3 = (2; 2; 1)$ atitinka $\lambda_3 = 3$:

Kai $\lambda_1 = -1$, tai

$$A - (-1)I = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 4 & -8 & 12 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sistemos } \begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 & | & 0 \\ 4 & -8 & 12 & | & 0 \\ 2 & -4 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

bendrasis sprendinys yra $\begin{pmatrix} 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ir fundamentali sistema yra

$$\mathbf{u}_1^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2^T = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(A - (-1)I) = 1 \implies \dim \ker(\mathcal{A} - (-1)\mathcal{I}) = 2$.

Kai $\lambda_3 = 1$, tai

$$A - (1)I = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 12 \\ 4 & -10 & 12 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sistemos } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -8 & 12 & 0 \\ 4 & -10 & 12 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{bendrasis sprendinys yra } \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ir fundamentalioji sistema yra } \mathbf{u}_1^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{rank}(A - (1)I) = 2 \implies \dim \ker(\mathcal{A} - (-1)\mathcal{I}) = 1$$

Gauname Žordano bazę: $\mathbf{v}_1 = (2; 1; 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-3; 0; 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2; 2; 1)$

Žordano matrica

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -8 & 12 \\ 4 & -9 & 12 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.3 Pavyzdys

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

charakteringasis polinomas $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^3 - 4t^2 + 6t - 4 = (t - 2)(t^2 - 2t + 2)$

tikrinės reikšmės : $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 + i, \lambda_3 = 1 - i$.

tikriniai vektoriai :

$\mathbf{u}_1 = (0; 1; 1)$ atitinka $\lambda_1 = 2$,

$\mathbf{u}_2 = (1 + i; 1 + i; 1) = (1; 1; 1) + i(1; 1; 0)$ atitinka $\lambda_2 = 1 + i$,

$\mathbf{u}_3 = (1 - i; 1 - i; 1) = (1; 1; 1) - i(1; 1; 0)$ atitinka $\lambda_3 = 1 - i$.

Tada kanoninė bazė yra

$$\mathbf{v}_1 = (0; 1; 1)$$

$$\mathbf{v}_2 = (1; 1; 1)$$

$$\mathbf{v}_3 = (1; 1; 0)$$

ir kanoninė matrica yra

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$