Algebra pratybos.

Rimantas Grigutis

10 pratybos. Tiesinės transformacijos $\mathbf{R}^3$ ir jų matricos

Duota tiesinės transformacijos $\mathcal{A}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ matrica A standartinėje bazėje.
1. Raskite charakteristinį polinomą $\chi_{\mathcal{A}}(t)=\det(A-tI)$
2. Raskite $\mathcal{A}$ tikrines reikšmes.
3. Raskite $\mathcal{A}$ tikrinius vektorius, atitinkančius visas realias tikrines reikšmes.
4. Raskite $\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})$ su visomis realiomis tikrinėmis reikšmėmis λ
5. Raskite $\mathcal{A}$ Žordano matricą.
6. Raskite $\mathcal{A}$ Žordano bazę.

Sprendimas
1. Randame $\chi_{\mathcal{A}}(t)=\det(A-tI)$.
2. Randame $\mathcal{A}$ tikrines reikšmes $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.
3. Randame $r_1=$rank$(A-\lambda_1 I)$
$r_2=$rank$(A-\lambda_2 I)$
$r_3=$rank$(A-\lambda_3 I)$.
4. Apskaičiuojame $d_1=\dim\ker(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})=3-r_1$
$d_2=\dim\ker(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{I})=3-r_2$
$d_3=\dim\ker(\mathcal{A}-\lambda_3\mathcal{I})=3-r_3.$
5. Pagal klasifikacinę lentelę randame Žordano matricą J_A.
6. Vadovaudamiesi klasifikacine lentele randame Žordano bazę $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$
7. Patikriname: $J_A=C^{-1}AC$, čia $C=\left(\mathbf{v}_1^T|\mathbf{v}_2^T|\mathbf{v}_3^T\right)$ - bazių keitimo matrica.

Uždaviniai.

1. $\begin{pmatrix}-5 & 12 & -18\\ -6 & 13 & -18\\ -3 & 6 & -8\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}4 & -12 & 18\\ 6 & -14 & 18\\ 3 & -6 & 7\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}0 & 4 & -6\\ -2 & 6 & -6\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix}-2 & 12 & -18\\ -6 & 16 & -18\\ -3 & 6 & -5\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}-16 & 38 & -42\\ -4 & 11 & -12\\ 3 & -6 & 7\end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix}20 & -46 & 54\\ 8 & -19 & 24\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}-24 & 58 & -66\\ -8 & 21 & -24\\ 3 & -6 & 7\end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix}28 & -66 & 78\\ 12 & -29 & 36\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 3 & -8 & 12 \\ 4 & -9 & 12 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 6 & -20 & 30 \\ 10 & -24 & 30 \\ 5 & -10 & 11 \end{pmatrix}$

10.1 Pavyzdys

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

charakteringasis polinomas $\chi_{\mathcal{A}}(t) = -t^3 - t^2 + 8t + 12 = -(t-3)(t+2)^2$
tikrinės reikšmės : $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$
tikriniai vektoriai : $\mathbf{u}_1 = (-1,1,1)$ atitinka $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{u}_3 = (0,1,1)$ atitinka $\lambda_3 = 3$
$\operatorname{rank}(A - (-2)I) = 2 \Longrightarrow \dim\ker(\mathcal{A} - (-2)\mathcal{I}) = 1.$

$$(A-(-2)I)^2 = \left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 25 \\ 25 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Sistemos $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 25 \\ 25 & 0 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, bendrasis sprendinys $\begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,
o fundamentalioji sprendinių sistema $\mathbf{f}_1^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tikriname

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauname Žordano bazę: $\mathbf{v}_1 = (-1;0;1)$, $\mathbf{v}_2 = (1;-1;-1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,1)$.
Žordano matrica

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

10.2 Pavyzdys

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 12 \\ 4 & -9 & 12 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

charakteringasis polinomas $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^3 + t^2 - t - 1 = (t-1)\,(t+1)^2$
tikrinės reikšmės : $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1.$
tikriniai vektoriai : $\mathbf{u}_1 = (2;1;0)\,, \mathbf{u}_2 = (-3;0;1)$ atitinka $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{u}_3 = (2;2;1)$ atitinka $\lambda_3 = 3:$
Kai $\lambda_1 = -1$, tai

$$A - (-1)I = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 4 & -8 & 12 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Sistemos $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 & | & 0 \\ 4 & -8 & 12 & | & 0 \\ 2 & -4 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$
bendrasis sprendinys yra $\begin{pmatrix} 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ir fundamantalioji sistema yra

$$\mathbf{u}_1^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2^T = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}(A - (-1)I) = 1 \Longrightarrow \dim\ker(\mathcal{A} - (-1)\mathcal{I}) = 2.$
Kai $\lambda_3 = 1$, tai

$$A - (1)I = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 12 \\ 4 & -10 & 12 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Sistemos $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 12 & | & 0 \\ 4 & -10 & 12 & | & 0 \\ 2 & -4 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

bendrasis sprendinys yra $\begin{pmatrix} 2x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ir fundamantalioji sistema yra $\mathbf{u}_1^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{rank}(A - (1)I) = 2 \Longrightarrow \dim\ker(\mathcal{A} - (-1)\mathcal{I}) = 1$

Gauname Žordano bazę: $\mathbf{v}_1 = (2;1;0)$, $\mathbf{v}_2 = (-3;0;1)$, $\mathbf{v}_3 = (2;2;1)$

Žordano matrica

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -8 & 12 \\ 4 & -9 & 12 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

10.3 Pavyzdys

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

charakteringasis polinomas $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^3 - 4t^2 + 6t - 4 = (t-2)(t^2 - 2t + 2)$

tikrinės reikšmės : $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 + i, \lambda_3 = 1 - i$.

tikriniai vektoriai :

$\mathbf{u}_1 = (0;1;1)$atitinka $\lambda_1 = 2$,

$\mathbf{u}_2 = (1+i; 1+i; 1) = (1;1;1) + i\,(1;1;0)$ atitinka $\lambda_2 = 1 + i$,

$\mathbf{u}_3 = (1-i; 1-i; 1) = (1;1;1) - i\,(1;1;0)$ atitinka $\lambda_3 = 1 - i$.

Tada kanoninė bazė yra

$\mathbf{v}_1 = (0;1;1)$

$\mathbf{v}_2 = (1;1;1)$

$\mathbf{v}_3 = (1;1;0)$

ir kanoninė matrica yra

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$