Tiesinė algebra ir geometrija bioinformatikams. Pratybos.

Rimantas Grigutis

9 pratybos. Poerdviai ir veiksmai su jais

Nagrinjami šie uždaviniai:

1. Homogeninės tiesnių lygčių sistemos(h.t.l.s.) sprendinių poerdvis H**:**

(i) H.t.l.s. bendrasis sprendinys

(ii) Fundamentalioji sprendinių sistema(f.s.s)

(iii) H bazė ir dimensija.

2. Duotai tiesiškai nepriklausomai sistemai surasti h.t.l.s., kurios f.s.s. yra duotoji sistema.

3. Poerdvių sumos bazės ir dimensijos radimas.

4. Poerdvių sankirtos bazės ir dimensijos radimas

1. Gausso metodu sprendžiama homogeninė tiesinių lygčių sistema užrašyta savo išplėstąja matrica:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\
1 & -5 & -2 & 7 & -5 & 0 \\
2 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\
7 & 13 & 18 & -31 & 13 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{ccc}
(-1) & (-2) & (-7) \\
\hookleftarrow & | & | \\
 & \hookleftarrow & | \\
 & & \hookleftarrow
\end{array}
\sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\
0 & -6 & -4 & 10 & -6 & 0 \\
0 & -3 & -2 & 5 & -3 & 0 \\
0 & 6 & 4 & -10 & 6 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{cc}
\Lsh & \\
| & \\
(-2) & (2) \\
 & \hookleftarrow
\end{array}
\sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\
0 & -3 & -2 & 5 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Bendrasis sistemos sprendinys yra

$$
\begin{gathered}
x_1 = -\tfrac{4}{3}x_3 + \tfrac{4}{3}x_4 \\
x_2 = -\tfrac{2}{3}x_3 + \tfrac{5}{3}x_4 - x_5 \\
x_3 = x_3 \\
x_4 = x_4 \\
x_5 = x_5
\end{gathered}
$$

Sprendinių poerdvio H dimensija lygi $\dim H = n - \text{rank} A = 5 - 2 = 3$.

Fundamentalioji sprendinių sistema yra poerdvio H bazė, kurią sudaro 3 vektoriai:

$$\left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}; 1; 0; 0\right)^T, \left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 0; 1; 0\right)^T, (0; -1; 0; 0; 1)^T.$$

2. Duota tiesiškai nepriklausoma stulpelių sistema : $\mathbf{u}_{r+1}, ..., \mathbf{u}_n \in \mathbf{R}_n$. Reikia rasti tokią matricą A iš matricų aibės $\mathbf{M}_{r\times n}$, kad

$$\begin{gathered} \text{rank} A = r \\ A\mathbf{u}_{r+1} = \cdots = A\mathbf{u}_n = \mathbf{o}. \end{gathered}$$

Sprendimas remiasi tokiu teiginiu iš matricų teorijos:

9.1 Teiginys.Jei $B = \underbrace{(C|I_{n-r})}_{n \text{ stulpelių}}$ ir $A = \left(I_r| - C^T\right)$, tai $A \cdot B^T = O$.

Čia C$\in \mathbf{M}_{(n-r)\times r}, C^T \in \mathbf{M}_{r\times(n-r)}, B \in \mathbf{M}_{(n-r)\times n}, A \in \mathbf{M}_{r\times n}$.

Norint rasti vektorių sistemai $\mathbf{u}_{r+1}, ..., \mathbf{u}_n$ rasti matricą A reikia matricą, sudarytą iš eilučių $\mathbf{u}_{r+1}^T, ..., \mathbf{u}_n^T$, Gauso veiksmais suvesti prie matricos $B = \underbrace{(C|I_{n-r})}_{n \text{ stulpelių}}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{r+1}^T \\ \cdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix} \overset{\text{Gausso veiksmai}}{\rightsquigarrow} \underbrace{(C|I_{n-r})}_{n \text{ stulpelių}} = B.$$

Tada ieškomoji matrica $A = \left(I_r| - C^T\right)$.

9.2 Pavyzdys. Tegu $\mathbf{u}_3 = (-2; -4; 1; 0; 0)^T, \mathbf{u}_4 = (-9; -12; 0; 1; 1)^T, \mathbf{u}_5 = (-6; -7; 0; 0; 1)^T$.

Tada

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_3^T \\ \mathbf{u}_4^T \\ \mathbf{u}_5^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -12 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \Lsh \\ (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

čia $n = 5, r = 2$ ir $C = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -5 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$.

Tada

$$A=\left(I_r|-C^T\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

ir homogeninė tiesinių lygčių sistema yra

$$\left\{\begin{pmatrix} x_1+2x_3+3x_4+6x_5=0 \\ x_2+4x_3+5x_4+7x_5=0 \end{pmatrix}\right..$$

Patikrinimas:

$$A\cdot B^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -12 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Vektorinės erdvės $\mathbf{R}^n$ poerdvių $U=[\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_r]$ ir $W=[\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_s]$ sumos bazė yra vektorių sistemos $\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_r,\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_s$ maksimalus tieisškai nepriklausomas posistemis, kurį galima surasti suvedant matricą

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{u}_r \\ \mathbf{w}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{w}_s \end{pmatrix} \text{ prie laiptuoto pavidalo.}$$

4. Rasime poerdvių $U=[\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_r]$ ir $W=[\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_s]$ sankirtos bazę.
Žinime, kad

$$U\cap W=\{\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n: x_1\mathbf{u}_1+\cdots+x_r\mathbf{u}_r=y_1\mathbf{w}_1+\cdots+y_s\mathbf{w}_s\}$$

Norint rasti sankirtos bazę reikia nagrinėti lygtis

$$x_1\mathbf{u}_1+\cdots+x_r\mathbf{u}_r=y_1\mathbf{w}_1+\cdots+y_s\mathbf{w}_s$$
$$x_1\mathbf{u}_1+\cdots+x_r\mathbf{u}_r+y_1\left(-\mathbf{w}_1\right)+\cdots+y_s\left(-\mathbf{w}_s\right)=\mathbf{o}$$
$$\left(\mathbf{u}_1^T;...;\mathbf{u}_r^T;-\mathbf{w}_1^T;...;-\mathbf{w}_s^T\right)\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{x}_r \\ \mathbf{y}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{y}_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tegu paskutinės homogeninės lygčių sistemos fundamentalioji sprendinių sistema yra $(x_{1i}; ...; x_{ri}; y_{1i}; ...; y_{si})$ (sistemoje yra t vektorių).

Tada $\dim U \cap W = t$ ir vektorių sistema $\{\mathbf{v}_i = x_{1i}\mathbf{u}_1 + \cdots + x_{ri}\mathbf{u}_r : i = 1, ..., t\}$ yra $U \cap W$ bazė. Pastebėkime, kad $\mathbf{v}_i = y_{1i}\mathbf{w}_1 + \cdots + x_{ri}\mathbf{w}_r$

9.3 Pavyzdys. Tegu $\mathbf{u}_1 = (1; 0; 1)\,, \mathbf{u}_2 = (2; -1; 3)$ yra U bazė, o $\mathbf{w}_1 = (2; -1; 1)\,, \mathbf{w}_2 = (-3; 0; 4)$ yra W bazė. Tada sprendžiame homogeninę lygčių sistemą:

$$\left(\mathbf{u}_1^T | \mathbf{u}_2^T | -\mathbf{w}_1^T | -\mathbf{w}_2^T | \mathbf{o}^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ | \\ \hookleftarrow \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -7 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ | \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Bendrasis sistemos sprendinys yra

$$\begin{matrix} x_1 = -3x_4 \\ x_2 = \frac{7}{4}x_4 \\ x_3 = \frac{7}{2}x_4 \\ x_4 = x_4 \end{matrix}$$

Fundamentaliąją sprendinių sistemą sudaro vienas sprendinys: $(-6; 7; 7; 2)$ ir $\dim U \cap W = 1$, o sankirtos bazę sudaro vienas vektorius

$$\mathbf{v}_1 = -6\mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_2 = (8; -7; 15)\,.$$

Uždaviniai.

1. Raskite homogeninės tiesinių lygčių sistemos sprendinių poerdvio dimensiją ir bazę(fundamentaląją sprendinių sistemą).

1.1) $\begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0 \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$ 1.2) $\begin{cases} 14x_1 + 34x_2 - 7x_3 + 63x_4 = 0 \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 0 \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0 \end{cases}$

1.3) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ 1.4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$.

2. Raskite tiesinę homogeninę lygčių sistemą, kurios fundamentalioji sprendinių sistema yra:

$$2.1)\ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$2.2.)\ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.\ 2.3)\ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -34 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4)\ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \\ -37 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.5)\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Raskite poerdvių $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ ir $W = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3]$ sumos ir sankirtos dimensijas ir bazes, kai:

$$3.1)\ \begin{array}{ll} \mathbf{u}_1 = (1,-1,0,2)\,, & \mathbf{w}_1 = (2,8,2,4)\,, \\ \mathbf{u}_2 = (2,3,1,4)\,, & \mathbf{w}_2 = (5,5,2,10)\,, \\ \mathbf{u}_3 = (0,5,1,0)\,, & \mathbf{w}_3 = (3,-3,0,6)\,. \end{array}$$

$$3.2)\ \begin{array}{ll} \mathbf{u}_1 = (2,1,3,1)\,, & \mathbf{w}_1 = (1,-1,2,1)\,, \\ \mathbf{u}_2 = (-1,2,-4,2)\,, & \mathbf{w}_2 = (2,0,1,-3)\,, \\ \mathbf{u}_3 = (2,3,-1,0)\,, & \mathbf{w}_3 = (-1,0,2,-2)\,. \end{array}$$