Tiesinė algebra ir geometrija bioinformatikams. Pratybos.

Rimantas Grigutis

## 8 pratybos. Vektorių sistemos.

Nagrinėjama eilučių vektorinė erdvė $\mathrm{R}^n = \{(a_1, ..., a_n) \, | a_i \in R\}$ - ir dvi bazės joje $v_1, ..., v_n$ ir $u_1, ..., u_n$

1. **Vektoriaus koordinatės bazėje.**

Vektorius $v$ reiškiamas bazės $v_1, ..., v_n$ vektoriais:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Stulpelis $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ vadinamas vektoriaus $v$ *koordinatiniu stulpeliu* (arba tiesiog koordinatėmis) bazėje $v_1, ..., v_n$.

2. **Bazių keitimo matrica**

Bazės $u_1, ..., u_n$ vektorius irgi galima reikšti bazės $v_1, ..., v_n$ vektoriais.

$$u_1 = (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} c_{11} \\ \cdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, ..., u_n = (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} c_{1n} \\ \cdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matricą

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

sudarytą iš vektorių $u_1, ..., u_n$ koordinatinių stulpelių bazėje $v_1, ..., v_n$ vadina bazės $v_1, ..., v_n$ *keitimo* baze $u_1, ..., u_n$ *matrica*:

$$\boxed{(u_1, ..., u_n) = (v_1, ..., v_n) \cdot C}$$

3. **Vektoriaus koordinatės skirtingose bazėse.**

Tegu vektorius $v$ bazėje $v_1, ..., v_n$ reiškiamas

$$v=(v_1,...,v_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},$$

o bazėje $u_1,...,u_n$ reiškiamas

$$v=(u_1,...,u_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}.$$

Tada

$$(v_1,...,v_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=(u_1,...,u_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=(v_1,...,v_n)\cdot C\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

ir

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\boxed{\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}}.$$

4. **Keitimo matricos ir vektoriaus koordinačių reiškimas bazių vektorių koordinatėmis standartinėje bazėje.**

1) Vektoriai $e_1=(1,0,...0),...,e_n=(0,0,...,1)$ vadinami standartine $\mathrm{R}^n$ baze.

Turime

$$v_1=(a_{11},...,a_{1n})=(e_1,...,e_n)\begin{pmatrix}a_{11}\\ \cdots\\ a_{1n}\end{pmatrix}=(e_1,...,e_n)(a_{11},...,a_{1n})^T=$$
$$(e_1,...,e_n)\,v_1^T$$
$$...$$
$$v_n=(a_{n1},...,a_{nn})=(e_1,...,e_n)\begin{pmatrix}a_{n1}\\ \cdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}=(e_1,...,e_n)(a_{n1},...,a_{nn})^T=$$
$$(e_1,...,e_n)\,v_n^T.$$

ir

$$u_1 = (b_{11}, ..., b_{1n}) = (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} b_{11} \\ \cdots \\ b_{1n} \end{pmatrix} = (e_1, ..., e_n) (b_{11}, ..., b_{1n})^T = (e_1, ..., e_n) u_1^T$$

$$...$$

$$u_n = (b_{n1}, ..., b_{nn}) = (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} b_{n1} \\ \cdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = (e_1, ..., e_n) (b_{n1}, ..., b_{nn})^T =$$

$$(e_1, ..., e_n) u_n^T.$$

Tada

$$(v_1, ..., v_n) = (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = (e_1, ..., e_n) C_1,$$

čia $C_1 = \left( v_1^T \; |...| \; v_n^T \right)$,

$$(u_1, ..., u_n) = (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} = (e_1, ..., e_n) C_2$$

čia $C_2 = \left( u_1^T \; |...| \; u_n^T \right)$ ir

$$(e_1, ..., e_n) C_2 = (u_1, ..., u_n) = (v_1, ..., v_n) \cdot C = (e_1, ..., e_n) C_1 C$$

taigi

$$C_2 = C_1 C$$

Iš čia turime, kad bazės $v_1, ..., v_n$ keitimo baze $u_1, ..., u_n$ matrica yra

$$C = C_1^{-1} C_2,$$

o bazės $u_1, ..., u_n$ keitimo baze $v_1, ..., v_n$ matrica yra

$$\boxed{C^{-1} = C_2^{-1} C_1.}$$

2) Jei $v \in R^n$, ir $v^T$ yra vektoriaus $v$ koordinatės standartinėje bazėje, tai

$$(e_1, ..., e_n)\, v^T = v = (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (e_1, ..., e_n)\, C_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

ir

$$v^T = C_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Tada

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = C_1^{-1} v^T}$$

3) Vektoriaus koordinatės skirtingose bazėse:( duotos vektoriaus v koordinatės bazėje $v_1, ..., v_n$ ir ieškomos koordinatės bazėje $u_1, ..., u_n$ :

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = C_2^{-1} C_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = C_2^{-1} C_1 C_1^{-1} v^T = C_2^{-1} v^T$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = C_2^{-1} v^T}$$

5. **Tiesiškai nepriklausomos vektorių sistemos papildymas iki bazės.**
Norint vektorių sistemą papildyti iki bazės, reikia:
1. Sistemos vektorius eilutėmis užrašyti matrica;
2. Gauso veiksmais matricą suvesti prie laiptuoto pavidalo; Tegu $i_1, ..., i_s$ yra nelaiptuose esantys stulpeliai.
3. Duotą vektorių sistemą papildyti stadartinės bazės vektoriais $v_{i_1}, ..., v_{i_s}$.

**Pavyzdys.** $v_1 = (1, -1, 3)\,, v_2 = (2, 3, -5)\,, v_3 = (4, 1, 1)\,.$ Tada

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -11 \\ 0 & 5 & -11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gavome, kad vektoriai $v_1$ ir $v_2$ yra tieisškai nepriklausomi ir vektorių sistema $v_1, v_2, e_3$ yra $\mathrm{R}^3$ bazė (3-ias stulpelyje nėra laipto).

**Uždaviniai.**

1. Įrodykite, kad aritmetinės erdvės $\mathbf{R}^4$ vektorių sistema $u_1 = (2,1,0,1)\,; u_2 = (1,-2,1,3)\,; u_3 = (3,4,-1,2)$ yra tiesiškai nepriklausoma ir apskaičiuokite šių vektorių tiesinę kombinaciją $u = 2u_1 - 3u_2 + 4u_3$.

2. Patikrinkite, ar aritmertinės erdvės $\mathbf{R}^n$ vektorių sistema $u_1, u_2, ..., u_n$ yra tiesiškai priklausoma :

a) $u_1 = (3,4,-2)\,; u_2 = (2,-1,3)\,; u_3 = (7,2,4)\,.$

b) $\mathrm{u}_1 = (1,2,1,1)\,, u_2 = (2,3,1,0)\,; u_3 = (3,1,1,-2)\,; u_4 = (4,2,-1,-6)\,.$

3. Apskaičiuokite aritmertinės erdvės $\mathbf{R}^n$ vektorių sistemos $u_1, u_2, ..., u_n$ rangą:

a) $u_1 = (1,1,1)\,; u_2 = (1,2,3)\,; u_3 = (-1,1,-2)\,.$

b) $u_1 = (2,1,1,-1)\,; u_2 = (2,2,3,4)\,; u_3 = (-1,-2,-1,-3)\,; u_4 = (-1,-1,1,2)$

*Matricos rangas*

4. Apskaičiuokite matricos $A$ rangą elementariųjų pertvarkių būdu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

*Vektorinės erdvės bazė*

5. Ar vektorių sistema $u_1 = (1,-1,2,1)\,; u_2 = (2,3,1,4)\,; u_3 = (5,-1,-1,2)\,, u_4 = (3,2,2,1)$ sudaro aritmetinė erdvės $\mathbf{R}^4$ bazę?

6. Įrodykite, kad aritmertinės erdvės $\mathbf{R}^4$ vektorių sistema $u_1, u_2, ..., u_n$ sudaro bazę ir raskite vektoriaus $u$ koordinates toje bazėje:

$u_1 = (3,5,1,2)\,; u_2 = (-1,2,2,3)\,; u_3 = (2,1,3,4)\,; u_4 = (-2,-3,1,-5)\,, u = (-2,3,1,-4)\,.$

$u_1 = (1,2,-1,-2)\,; u_2 = (2,3,0,-1)\,; u_3 = (1,2,1,4)\,; u_4 = (1,3,-1,0)\,; u = (7,14,-1,2)\,.$

7. Raskite vektorių $u_1, u_2, ..., u_m$ tiesinio apvalkalo $\langle u_1, u_2, ..., u_m \rangle$ bazę ir dimensiją, kai

a) $u_1 = (1,4,-7,3)\,; u_2 = (-3,10,-9,-7)\,; u_3 = (2,-3,1,5)\,; u_4 = (0,11,-15,1)\,.$

b) $u_1 = (0,1,1,1)\,, u_2 = (1,1,1,2)\,; u_3 = (-2,0,1,1)\,; u_4 = (-1,3,2,-1)\,; u_5 = (1,1,0,-1)\,.$

*Vektorių sistemos papildymas iki bazės.*

8. Vektorinėje erdvėje $\mathbf{R}^4$ raskite dvi bazes, turinčias vektorius $(1,1,0,0)$ ir $(0,0,1,1)$.

10. Papildykite sistemą iki bazės.

1) $(0,0,1,1,1), (1,2,1,2,0)$ aritmetinėje erdvėje virš $GF(3)$;

2) $(3,1,-1,1), (-1,2,3,-4), (7,7,3,-5)$ aritmetinėje erdvėje $\mathbf{R}^4$;

3) $(2,1,1), (3,-2,2)$ aritmetinėje erdvėje virš $\mathbf{R}^3$;

4) $(3,1,0,2), (2,1,1,3)$ aritmetinėje erdvėje virš $GF(5)$.

*Bazių keitimo matrica*

11. Raskite aritmetinės erdvės $\mathrm{R}^n$ bazės $u_1, u_2, ..., u_n$ keitimo baze $u_1', u_2', ..., u_n'$ matricą:

$$\text{a)}\ \begin{array}{ll} u_1 = (1,2,1), & u_1' = (3,-1,-1), \\ u_2 = (-2,3,2), & u_2' = (0,-1,-4), \\ u_3 = (3,2,-1), & u_3' = (5,5,-3). \end{array}$$

$$\text{b)}\ \begin{array}{ll} u_1 = (1,2,1), & u_1' = (3,5,8), \\ u_2 = (2,3,3), & u_2' = (5,14,13), \\ u_3 = (3,8,2), & u_3' = (1,9,2). \end{array}$$

12. Žinodami aritmetinės erdvės $\mathrm{R}^n$ vektoriaus $u$ koordinates bazėje $u_1, u_2, u_3$ apskaičiuokite jo koordinates bazėje $u_1', u_2', u_3'$

$$\text{a)}\ \begin{array}{rr} u = (1,2,-1), & u_1' = 2u_1 - u_2 + 2u_3, \\ & u_2' = u_1 + u_3, \\ & u_3' = u_1 - 2u_2 + 2u_3. \end{array}$$

$$\text{b)}\ \begin{array}{rr} u = (0,4,-3), & u_1' = 2u_1 - u_2 + u_3, \\ & u_2' = u_1 + -2u_2 + u_3, \\ & u_3' = 3u_1 + u_2 + 2u_3. \end{array}$$