Tiesinė algebra ir geometrija bioinformatikams. Pratybos.

Rimantas Grigutis

6 pratybos. *Vektoriai erdvėje. Vektori vektorinė sandauga, savybės. Trijų vektorių mišrioji sandauga, savybės. Vektoriaus koordinatės bazės atžvilgiu.*

1. Duoti du vektoriai $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ ir $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$. Apskaičiuokite $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

2. Duoti trys vektoriai $\mathbf{u} = (3, -2, -5)$, $\mathbf{v} = (1, 4, -4)$ ir $\mathbf{w} = (0, 3, 2)$. Apskaičiuokite $\mathbf{u}\cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

3. Duoti trys vektoriai $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, -3)$ ir $\mathbf{w} = (2, 6, 7)$. Apskaičiuokite

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{u}\times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}), (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\times\mathbf{w}, (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\times(\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \mathbf{u}\times (\mathbf{v}-2\mathbf{w}), (\mathbf{u} \times \mathbf{v})-2\mathbf{w}$.

4. Raskite vektorių ortogonalų vektoriams $\mathbf{u}$ ir $\mathbf{v}$:

$\mathbf{u} =$	$(1, -1, 2)$	$(3, -1, 4)$	$(2, 3, 0)$	$(-6, 4, 2)$	$(-2.1.5)$
$\mathbf{v} =$	$(0, 3, 1)$	$(6, -2, 8)$	$(-1, 2, 2)$	$(3, 1, 5)$	$(3, 0, -3)$

5. Ar vektoriai $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}$ yra vienoje plokštumoje?

$\mathbf{u} =$	$(-1, -2, 1)$	$(5, -2, 1)$	$(4, -8, 1)$
$\mathbf{v} =$	$(3, 0, 2)$	$(4, -1, 1)$	$(2, 1, -2)$
$\mathbf{w} =$	$(5, -4, 0)$	$(1, -1, 0)$	$(3, -4, 12)$

6. Raskite trikampio ABC plotą:

$A =$	$(2, 2, 0)$	$(2, 6, -1)$	$(1, -1, 2)$
$B =$	$(-1, 0, 2)$	$(1, 1, 1)$	$(0, 3, 4)$
$C =$	$(0, 4, 3)$	$(4, 6, 2)$	$(6, 1, 8)$

7. Raskite lygiagretainio, kurio kraštinėmis yra vektoriai $\mathbf{u}$ ir $\mathbf{v}$, plotą:

$\mathbf{u}$	$(-1, 2, 4)$	$(3, -1, 6)$	$(-1, 2, 5)$
$\mathbf{v}$	$(3, 4, -2)$	$(2, 4, 3)$	$(5, -1, 2)$

8. Raskite gretasienio, kurio briaunomis yra vektoriai $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, tūrį:

$\mathbf{u}$	$(2, -6, 2)$	$(3, 1, 2)$
$\mathbf{v}$	$(0, 4, -2)$	$(4, 5, 1)$
$\mathbf{w}$	$(2, 2, -4)$	$(1, 2, 4)$

9. Raskite piramidės $PQRS$ tūrį:

$$\begin{array}{ccc} P & (-1,2,0) & (0,0,0) \\ Q & (2,1,3) & (1,2,-1) \\ R & (1,0,1) & (3,4,0) \\ S & (3,-2,3) & (-1,-3,4) \end{array}$$

10. Duoti taškai $A = (5,0,-1)$ ir $B = (-3,1,4)$. Raskite vektoriaus $\mathbf{AB}$ projekciją vektoriaus $\mathbf{u} = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ tiesę.

11. Duoti vektoriai $\mathbf{u} = (-1,2,4)$, $\mathbf{v} = (0,0,-7)$, $\mathbf{w} = (4,-7,9)$. Raskite vektoriaus $\mathbf{u} + \mathbf{v} - 4\mathbf{w}$ ilgį, jo normuotą vienetinį vektorių ir krypties kosinusus.

12. Duota $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 3$. Raskite

$$\begin{array}{cc} \mathbf{u}\cdot(\mathbf{w} \times \mathbf{v}) & \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} & (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) & \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w} \times \mathbf{w}) \end{array}$$

13. Duotas vektorius $\mathbf{a} = (2,1,-1)$. Raskite vektoriaus $\mathbf{u}$ koordinates, jei jis tenkina sąlygas

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} &= 3 \\ \mathbf{a} \times \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

14. Įrodykite, jei $\mathbf{u}$ ir $\mathbf{v}$ yra stameni vektoriui $\mathbf{w}$, tai $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

15. Įrodykite, jei vektorius $\mathbf{v}$ statmenas vektoriui $\mathbf{w}$, o vektorius $\mathbf{u}$ lygiagretus vektoriui $\mathbf{w}$, tai $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$.

16. Kokias sąlygas turi tenkinti vektoriai $\mathbf{u}$ ir $\mathbf{v}$, kad vektoriai $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ir $3\mathbf{u}+4\mathbf{v}$ būtų kolinearūs?

17. Parodykite, kad $(\mathbf{u} + \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{z}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

18. Suprastinkite: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v})$.