Algebros pratybos.

Rimantas Grigutis

6 pratybos. Vektorių sistemos.

Nagrinėjama eilučių vektorinė erdvė $\mathbf{R}^n = \{(a_1, ..., a_n)\,|a_i \in \mathbf{R}\}$ - ir dvi bazės joje: $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ ir $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$

1. **Vektoriaus koordinatės bazėje.**

Vektorius $\mathbf{v}$ reiškiamas bazės $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ vektoriais:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Stulpelis $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ vadinamas vektoriaus v *koordinatiniu stulpeliu* (arba tiesiog koordinatėmis) bazėje $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$.

2. **Bazių keitimo matrica**

Bazės $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ vektorius irgi galima reikšti bazės $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ vektoriais.

$$\mathbf{u}_1 = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} c_{11} \\ \cdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, ..., \mathbf{u}_n = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} c_{1n} \\ \cdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matricą

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

sudarytą iš vektorių $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ koordinatinių stulpelių bazėje $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ vadina bazės $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ *keitimo* baze $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ *matrica*:

$$\boxed{(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \cdot C}$$

3. **Vektoriaus koordinatės skirtingose bazėse.**

Tegu vektorius $\mathbf{v}$ bazėje $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ reiškiamas

$$\mathbf{v}=(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},$$

o bazėje $\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_n$ reiškiamas

$$\mathbf{v}=(\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}.$$

Tada

$$(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=(\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n)\cdot C\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

ir

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\boxed{\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}}.$$

4. **Keitimo matricos ir vektoriaus koordinačių reiškimas bazių vektorių koordinatėmis standartinėje bazėje.**

1) Vektoriai $\mathbf{e}_1=(1,0,...0),...,\mathbf{e}_n=(0,0,...,1)$ vadinami standartine $\mathbf{R}^n$ baze.

Turime

$$\mathbf{v}_1=(a_{11},...,a_{1n})=(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n)\begin{pmatrix}a_{11}\\ \cdots\\ a_{1n}\end{pmatrix}=(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n)(a_{11},...,a_{1n})^T=$$
$$(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n)\mathbf{v}_1^T$$
$$...$$
$$\mathbf{v}_n=(a_{n1},...,a_{nn})=(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n)\begin{pmatrix}a_{n1}\\ \cdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}=(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n)(a_{n1},...,a_{nn})^T=$$
$$(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n)\mathbf{v}_n^T.$$

ir

$$\mathbf{u}_1 = (b_{11}, ..., b_{1n}) = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_{11} \\ \cdots \\ b_{1n} \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) (b_{11}, ..., b_{1n})^T = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) \mathbf{u}_1^T$$

$$...$$

$$\mathbf{u}_n = (b_{n1}, ..., b_{nn}) = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_{n1} \\ \cdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) (b_{n1}, ..., b_{nn})^T = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) \mathbf{u}_n^T.$$

Tada

$$(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) C_1,$$

čia $C_1 = \left(\mathbf{v}_1^T \ |...| \ \mathbf{v}_n^T\right)$,

$$(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) C_2$$

čia $C_2 = \left(\mathbf{u}_1^T \ |...| \ \mathbf{u}_n^T\right)$ ir

$$(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) C_2 = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \cdot C = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) C_1 C$$

taigi

$$C_2 = C_1 C$$

Iš čia turime, kad bazės $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ keitimo baze $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ matrica yra

$$C = C_1^{-1} C_2,$$

o bazės $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ keitimo baze $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ matrica yra

$$\boxed{C^{-1} = C_2^{-1} C_1.}$$

2) Jei $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, ir $\mathbf{v}^T$ yra vektoriaus $\mathbf{v}$ koordinatės standartinėje bazėje, tai

$$(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)\,\mathbf{v}^T = \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)\,C_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

ir

$$\mathbf{v}^T = C_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

Tada

$$\boxed{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = C_1^{-1}\mathbf{v}^T}$$

3) Vektoriaus koordinatės skirtingose bazėse(duotos vektoriaus $\mathbf{v}$ koordinatės bazėje $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ ir ieškomos koordinatės bazėje $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$):

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = C_2^{-1}C_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = C_2^{-1}C_1C_1^{-1}\mathbf{v}^T = C_2^{-1}\mathbf{v}^T$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = C_2^{-1}\mathbf{v}^T}$$

5. **Tiesiškai nepriklausomos vektorių sistemos papildymas iki bazės.**
Norint vektorių sistemą papildyti iki bazės, reikia:
1. Sistemos vektorius eilutėmis užrašyti matrica;
2. Gauso veiksmais matricą suvesti prie laiptuoto pavidalo; Tegu $i_1, ..., i_s$ yra nelaiptuose esantys stulpeliai.
3. Duotą vektorių sistemą papildyti stadartinės bazės vektoriais $\mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_s}$.

Pavyzdys. $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 3)\,, \mathbf{v}_2 = (2, 3, -5)\,, \mathbf{v}_3 = (4, 1, 1)\,.$ Tada

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 5 & -11\\ 0 & 5 & -11\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 5 & -11\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Gavome, kad vektoriai $\mathbf{v}_1$ ir $\mathbf{v}_2$ yra tieisškai nepriklausomi ir vektorių sistema $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3$ yra $\mathbf{R}^3$ bazė (3-iame stulpelyje nėra laipto).

Uždaviniai.

1. Įrodykite, kad aritmetinės erdvės $\mathbf{R}^4$ vektorių sistema $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 0, 1)\,; \mathbf{u}_2 = (1, -2, 1, 3)\,; \mathbf{u}_3 = (3, 4, -1, 2)$ yra tiesiškai nepriklausoma ir apskaičiuokite šių vektorių tiesinę kombinaciją $\mathbf{u} = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3$.

2. Patikrinkite, ar aritmertinės erdvės $\mathbf{R}^n$ vektorių sistema $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ yra tiesiškai priklausoma :

a) $\mathbf{u}_1 = (3, 4, -2)\,; \mathbf{u}_2 = (2, -1, 3)\,; \mathbf{u}_3 = (7, 2, 4)\,.$

b) $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 1, 1)\,, \mathbf{u}_2 = (2, 3, 1, 0)\,; \mathbf{u}_3 = (3, 1, 1, -2)\,; \mathbf{u}_4 = (4, 2, -1, -6)\,.$

3. Apskaičiuokite aritmertinės erdvės $\mathbf{R}^n$ vektorių sistemos $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ rangą:

a) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)\,; \mathbf{u}_2 = (1, 2, 3)\,; \mathbf{u}_3 = (-1, 1, -2)\,.$

b) $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 1, -1)\,; \mathbf{u}_2 = (2, 2, 3, 4)\,; \mathbf{u}_3 = (-1, -2, -1, -3)\,; \mathbf{u}_4 = (-1, -1, 1, 2)$

Matricos rangas

4. Apskaičiuokite matricos A rangą elementariųjų pertvarkių būdu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Vektorinės erdvės bazė

5. Ar vektorių sistema $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 2, 1)\,; \mathbf{u}_2 = (2, 3, 1, 4)\,; \mathbf{u}_3 = (5, -1, -1, 2)\,, \mathbf{u}_4 = (3, 2, 2, 1)$ sudaro aritmetinė erdvės $\mathbf{R}^4$ bazę?

6. Įrodykite, kad aritmertinės erdvės $\mathbf{R}^4$ vektorių sistema $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ sudaro bazę ir raskite vektoriaus $\mathbf{u}$ koordinates toje bazėje:

$\mathbf{u}_1 = (3, 5, 1, 2)\,; \mathbf{u}_2 = (-1, 2, 2, 3)\,; \mathbf{u}_3 = (2, 1, 3, 4)\,; \mathbf{u}_4 = (-2, -3, 1, -5)\,, \mathbf{u} = (-2, 3, 1, -4)\,.$

$\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1, -2)\,; \mathbf{u}_2 = (2, 3, 0, -1)\,; \mathbf{u}_3 = (1, 2, 1, 4)\,; \mathbf{u}_4 = (1, 3, -1, 0)\,; \mathbf{u} = (7, 14, -1, 2)\,.$

7. Raskite vektorių $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m$ tiesinio apvalkalo $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m]$ bazę ir dimensiją, kai

a) $\mathbf{u}_1 = (1, 4, -7, 3)\,; \mathbf{u}_2 = (-3, 10, -9, -7)\,; \mathbf{u}_3 = (2, -3, 1, 5)\,; \mathbf{u}_4 = (0, 11, -15, 1)\,.$

b) $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 1, 1)\,, \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1, 2)\,; \mathbf{u}_3 = (-2, 0, 1, 1)\,; \mathbf{u}_4 = (-1, 3, 2, -1)\,; \mathbf{u}_5 = (1, 1, 0, -1)\,.$

Vektorių sistemos papildymas iki bazės.

8. Vektorinėje erdvėje $\mathbf{R}^4$ raskite dvi bazes, turinčias vektorius $(1,1,0,0)$ ir $(0,0,1,1)$.

10. Papildykite sistemą iki bazės.

1) $(0,0,1,1,1), (1,2,1,2,0)$ aritmetinėje erdvėje virš $\mathbf{Z}_3$;

2) $(3,1,-1,1), (-1,2,3,-4), (7,7,3,-5)$ aritmetinėje erdvėje $\mathbf{R}^4$;

3) $(2,1,1), (3,-2,2)$ aritmetinėje erdvėje virš $\mathbf{R}^3$;

4) $(3,1,0,2), (2,1,1,3)$ aritmetinėje erdvėje virš $\mathbf{Z}_5$.

Bazių keitimo matrica

11. Raskite aritmetinės erdvės $\mathbf{R}^n$ bazės $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ keitimo baze $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, ..., \mathbf{u}'_n$ matricą:

$$\text{a)}\ \begin{array}{ll} \mathbf{u}_1 = (1,2,1), & \mathbf{u}'_1 = (3,-1,-1), \\ \mathbf{u}_2 = (-2,3,2), & \mathbf{u}'_2 = (0,-1,-4), \\ \mathbf{u}_3 = (3,2,-1), & \mathbf{u}'_3 = (5,5,-3). \end{array}$$

$$\text{b)}\ \begin{array}{ll} \mathbf{u}_1 = (1,2,1), & \mathbf{u}'_1 = (3,5,8), \\ \mathbf{u}_2 = (2,3,3), & \mathbf{u}'_2 = (5,14,13), \\ \mathbf{u}_3 = (3,8,2), & \mathbf{u}'_3 = (1,9,2). \end{array}$$

12. Žinodami aritmetinės erdvės $\mathbf{R}^n$ vektoriaus $\mathbf{u}$ koordinates bazėje $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ apskaičiuokite jo koordinates bazėje $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3$

$$\text{a)}\ \begin{array}{ll} \mathbf{u} = (1,2,-1), & \mathbf{u}'_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3, \\ & \mathbf{u}'_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3, \\ & \mathbf{u}'_3 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3. \end{array}$$

$$\text{b)}\ \begin{array}{ll} \mathbf{u} = (0,4,-3), & \mathbf{u}'_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \\ & \mathbf{u}'_2 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \\ & \mathbf{u}'_3 = 3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3. \end{array}$$