

5 pratybos. Kompleksiniai skaičiai

Apibrėžimas. n -ojo laipsnio iš vieneto šaknies ε eile vadinamas toks mažiausias natūralusis skaičius m , kad $\varepsilon^m = 1$.

Pavyzdys. Rasime visas 3-ojo laipsnio šaknis iš vieneto.

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1 \\ \varepsilon_1 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ \varepsilon_2 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\end{aligned}$$

Žinodami, kad $\beta_0 = 2 + i$ yra kubinė šaknis iš $2+11i$ rasime kitas dvi kubines šaknis iš $2+11i$.

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \beta_0 \varepsilon_1 = (2 + i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) = \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) i \\ \beta_2 &= \beta_0 \varepsilon_2 = (2 + i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) i.\end{aligned}$$

Apibrėšime rodiklines ir logaritmines funkcijas kompleksiniams skaičiams.

Apibrėžimai.

1. Skaičiaus e reiškinys skaitine eilute (begaline suma):

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

2. Funkcijų e^x , $\sin x$, $\cos x$ reiškinys eilutėmis, kai $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}e^x &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \sin x &= \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x &= \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\end{aligned}$$

3. Funkcijos e^{ix} apibrėžimas:

$$e^{ix} = \left(\frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) = \cos x + i \sin x$$

4. Funkcijos e^{a+ib} apibrėžimas:

$$e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

5. *Kompleksinio skaičiaus eksponentinė forma:*

$$z = r (\cos x + i \sin x) = r e^{ix} = e^{\ln r} e^{ix} = e^{\ln r + ix}$$

6. *Logaritminės funkcijos apibrėžimas:*

$$\ln z = \ln (r (\cos x + i \sin x)) = \ln (e^{\ln r + ix}) = \ln r + ix$$

7. *Rodiklinės-laipnsinės funkcijos z^β , čia z ir β - kompleksiniai skaičiai, apibrėžimas:*

$$z^\beta = (e^{\ln z})^\beta = e^{\beta \ln z}.$$

Pavyzdžiai.

1. $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$
2. $e^{-\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i.$
3. $\ln(i) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z.$
 kai $k = 0$, tai $\ln(i) = \frac{\pi}{2}i.$
4. $i^i = e^{i \ln i} = e^{i\left(i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}, k \in Z$
 kai $k = 0$, tai $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$

Uždaviniai

1. Apskaičiuokite. Atsakymą pateikite algebrine forma $a+ib$.

- | | |
|---------------------------|-------------------------------------|
| 01. $(5 + 7i) + (3 - 4i)$ | 02. $(3 + i) - (2 + i)$ |
| 03. $(3 + 2i)(1 - i)$ | 04. $(1 + i)^2$ |
| 05. $\overline{3 + 6i}$ | 06. $ 1 + 2i $ |
| 07. $\frac{1}{i}$ | 08. $\frac{1}{1+i}$ |
| 09. $\frac{2+i}{3-i}$ | 10. $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$ |

2. Raskite kompleksinio skaičiaus z trigonometrinę išraišką.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 01. $z = 1$ | 02. $z = -1$ | 03. $z = 5i$ |
| 04. $z = 3 + 3i$ | 05. $z = -2 + 2i$ | 06. $z = 1 + i\sqrt{3}$ |
| 07. $z = -1 + i\sqrt{3}$ | 08. $z = -3 - i\sqrt{3}$ | 09. $z = 2 + i$ |
| 10. $z = -4 + 3i$ | 11. $z = -2 - 3i$ | 12. $z = -5 + 5i$ |

3. Raskite kvadratinės šaknis. Atsakymą pateikite algebrine forma $a+ib$.

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|----------------------|
| 01. $z = \sqrt{16 + 30i}$ | 02. $z = \sqrt{9 - 40i}$ | 03. $z = \sqrt{-5i}$ |
|---------------------------|--------------------------|----------------------|

4. Raskite kompleksiniams skaičiams z atitinkančią geometrinę vietą.

01. $|z + 1 - i| \geq 1$ 02. $|z - 1 - 2i| < 2$
 04. $|z + 2 - i| = |z - 1 + 3i|$ 05. $|z - i| \geq |z - 1 + 2i|$
 07. $|z + i| > 1, \operatorname{Re} z < 2, \operatorname{Im} z \geq 3$ 08. $|z + 2i| = |2iz - 1|$

5. Apskaičiuokite.

01. $e^{1+i\pi}$ 02. e^{2-i} 03. $2e^{\frac{2\pi i}{3}}$
 04. $4e^{\frac{-i\pi}{4}}$ 05. $e^{-\frac{\pi}{2}i}$ 06. $e^{(5+12i)x}, x \in R$
 07. $(e^{1+i} \cdot e^{1-i})^{2-i}$ 08. 1^i 09. 2^i
 10. i^i 11. $(1-i)^{-i}$ 12. $\ln(i)$
 13. $\ln(\ln(i))$ 14. $\ln(\ln(e^i))$ 15. $\ln(3+4i)$
 16. $\ln((3+4i)^{1-i})$ 17. $\ln\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$ 18. $\ln(-1)$
 19. $\ln(1+i)$ 20. $\ln(1+i\sqrt{3})$ 21. $(\cos 0, 7 + i \sin 0, 7)^{53}$
 22. $(1-i)^{2009}$ 23. $(\sqrt{3}+i)^{50}$ 24. $\left(\frac{i\sqrt{3}-1}{2}\right)^9$
 25. $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$ 26. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{17}$ 27. $\frac{(2-2i)^8}{(-\sqrt{3}+i)^{12}}$
 28. $\frac{(1+i)^{20}}{(1-i\sqrt{3})^{10}}$ 29. $\sqrt[3]{8i}$ 30. $\sqrt[5]{\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}}$
 31. $\sqrt[4]{\frac{3+i\sqrt{3}}{-1+i}}$ 32. $\sqrt[5]{\frac{1-i}{\sqrt{3}-3i}}$ 33. $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-3i}{-3-i\sqrt{3}}}$
 34. $\sqrt[3]{\frac{(-1-i)^5}{(\sqrt{3}+i)^4}}$ 35. $\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(-1+i)^{10}}}$ 36. $\sqrt[3]{\frac{(1-i\sqrt{3})^8}{(-\sqrt{3}-i)^5}}$

6. Išspręskite lygtis

01. $z^5 = 6i$ 02. $z^3 = 8i$ 03. $z^4 = -4i$
 04. $z^5 = 1 + i$ 05. $z^6 = 8$ 06. $(z-1)^4 = -1$
 07. $z^5 = -32$ 08. $e^{iz} = 3i$

7. Raskite visas n -ojo laipsnio šaknis iš vieneto, kai $n \in [2; 20]$.

8. Raskite visas primityviasias n -ojo laipsnio šaknis iš vieneto, kai $n \in [2; 20]$.

9. Raskite n -ojo laipsnio šaknų iš vieneto eiles, kai $n \in [2; 20]$.