Algebros pratybos

Rimantas Grigutis

5 pratybos. *Dalumas polinomams. Hornerio schema.Polinomų faktorizacija. Euklido algoritmas. Interpoliacijos uždavinys*

Hornerio schema ir polinomo racionaliosios šaknys

1 **Teorema** . *Tegu polinomas* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in Q[x]$ *ir visi polinomo* $f(x)$ *koeficientai yra sveikieji skaičiai. Jei skaičius* $\frac{p}{q}$ *yra polinomo* $f(x)$ *šaknis, tai* p *yra* a_0 *daliklis, o* q *yra* a_n *daliklis.*

Šia teorema yra ieškomos racionaliosios polinomo $f(x)$ šaknys:
(1) Randami visi a_0 ir a_n teigiami dalikliai:
a_0 teigiami dalikliai: $1, ..., |a_0|$
a_n teigiami dalikliai: $1, ..., |a_n|$;
(2) Sudaromas kandidatų į polinomo $f(x)$ šaknis sąrašas :$\pm\dfrac{\langle a_0 \text{ teigiamas daliklis}\rangle}{\langle a_n \text{ teigiamas daliklis}\rangle}$:
$\pm\frac{1}{1}, ..., \pm\frac{|a_0|}{1}, ..., \pm\frac{1}{|a_n|}, ..., \pm\frac{|a_0|}{|a_n|}$.
(3) Hornerio schema tikrinami visi gauti kandidatai į šaknis.

2 **Pavyzdys**. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 9x + 18$.
(1) 18 dalikliai: $1, 2, 3, 6, 9, 18$
2 dalikliai: $1, 2$
(2) kandidatai į šaknis: $\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{3}{1}, \pm\frac{6}{1}, \pm\frac{9}{1}, \pm\frac{18}{1}; \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{6}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{18}{2}$. Išbraukus vienodus skaičius turėsime:$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18; \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}$.
(3) Hornerio schema:

	2	-3	-2	-9	18	$2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 9x + 18$
1	2	-1	-3	-12	6	
2	2	1	0	-9	**0**	$(x-2)(2x^3 + x^2 - 9)$
2	2	5	0	-9		
$\frac{3}{2}$	2	4	6	**0**		$(x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)(2x^2 + 4x + 6)$

3 **Teorema.** *Tegu* $f(x) \in K[x]$ *ir* $\deg f(x) = 2$ *arba* 3. *Polinomas* $f(x)$ *yra neredukuojamas polinomas virš* K *tada ir tik tada, kai* $f(x)$ *neturi šaknų iš* K.

4 **Pavyzdys**. Polinomas $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$ yra neredukuojamas virš $\mathbf{Q}$, nes neturi racionaliųjų šaknų.

5 **Pavyzdys.** Polinomas $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 + x + 40$ neturi racionaliųjų šaknų, bet nėra neredukuojamas polinomas virš **Q,** nes $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 + x + 40 = (x^2 - 3x + 8)(x^2 + 2x + 5)$.

6 **Teorema** (Eisensteino neredukuojamo polinomo požymis). *Tegu p - pirminis skaičius ir*

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{Z}[x]$, $a_n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$, $a_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$, *kai* $i = 0, ..., n-1$, $a_0 \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p^2)$. *Tada polinomas $f(x)$ yra neredukuojamas virš* $\mathbf{Q}$.

7 Pavyzdys. Polinomas $f(x) = x^5 + 6x^2 + 8x + 2$ yra neredukuojamas virš Q, nes jam tinka Eisensteino požymis su $p = 2$.

Polinomas $f(x) = 2x^{10} + 25x^3 + 10x^2 - 30$. yra neredukuojamas virš Q, nes jam tinka Eisensteino požymis su $p = 5$.

8 **Teorema**(Redukcinis neredukuojamo polinomo požymis). *Tegu p - pirminis skaičius,*

$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in Z[x]$, $a_n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$ ir $f_p(x) = \bar{a}_n x^n + \cdots + \bar{a}_0 \in Z_p[x]$, čia $\bar{a}_i =_p K_{a_i}$.

Jei $\bar{f}_p(x)$ yra neredukuojamas polinomas virš $\mathbf{Z}_p$, tai polinomas $f(x)$ neredukuojamas virš $\mathbf{Q}$.

9 **Pavyzdys.** Polinomui $f(x) = 7x^3 + 12x^2 + 3x + 45$ netinka Eizensteino požymis, bet jis yra neredukuojamas polinomas virš Q pagal redukcinį požymį su $p = 2$, nes $\bar{f}_2(x) = x^3 + x + 1$ yra neredukuojamas polinomas virš $\mathbf{Z}_2$ (jis yra 3-iojo laipsnio polinomas neturintis šaknų iš $\mathbf{Z}_2$).

Interpoliacijos uždavinys.

Duota lentelė

α_1	$\cdots$	α_n
β_1	$\cdots$	β_n

,

čia $\alpha_1, ..., \alpha_n$ yra skirtingi skaičiai, o $\beta_1, ..., \beta_n$ - bet kokie skaičiai. Egzistuoja vienintelis mažesnio nei n laipsnio toks polinomas $f(x)$, kad $f(\alpha_i) = \beta_i$ su visais $i = 1, ..., n$. Šį polinomą vadina interpoliaciniu polinomu.

Interpoliacinis polinomas konstruojamas taip:

(1) Tegu $g(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$.

(2) Turime $g'(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_1)\cdots(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i - \alpha_n)$, $1 \le i \le n$.

(3) Tegu $f_i(x) = c_i(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_{i-1})(x - \alpha_{i+1})\cdots(x - \alpha_n)$, ir $f_i(\alpha_i) = 1$, $1 \le i \le n$.

(4) Turime $c_i = \frac{1}{(\alpha_i - \alpha_1)\cdots(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i - \alpha_n)} = \frac{1}{g'(\alpha_i)}$ ir

$f_i(x) = \frac{1}{g'(\alpha_i)} \cdot \frac{g(x)}{(x - \alpha_i)}$.

(5) *Lagrange* interpoliacinis polinomas yra $f(x) = \beta_1 f_1(x) + \cdots + \beta_n f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{g'(\alpha_i)} \cdot \frac{g(x)}{(x - \alpha_i)}$.

10 **Pavyzdys**. Rasime interpoliacinį polinomą lentelei:

1	-1	0	2
4	-4	2	8

1) $g(x) = (x - 1)(x + 1)(x)(x - 2)$

2) $g\prime(1) = (1 + 1)(1)(1 - 2) = -2$ ir $c_1 = -\frac{1}{2}$
$g\prime(-1) = (-1 - 1)(-1)(-1 - 2) = -6$ ir $c_2 = -\frac{1}{6}$
$g\prime(0) = (0 - 1)(0 + 1)(0 - 2) = 2$ ir $c_3 = \frac{1}{2}$
$g\prime(2) = (2 - 1)(2 + 1)(2) = 6$ ir $c_4 = \frac{1}{6}$

3) $f_1(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)(x)(x - 2) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$
$f_2(x) = -\frac{1}{6}(x - 1)(x)(x - 2) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$
$f_3(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x + 1)(x - 2) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1$
$f_4(x) = \frac{1}{6}(x - 1)(x + 1)(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x$

4) $f(x) =$
$(4)\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right) + (-4)\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right) + (2)\left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right) + (8)\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x\right) =$
$x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

11 **Euklido algoritmo pavyzdys**

Rasime polinomų $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ ir $g(x) = x^3 - 1$ BDD.

$$
\begin{array}{rrrrrr|rr}
 & x^4 & +x^3 & +2x^2 & +x & +1 & x^3 & -1 \\ \cline{7-8}
- & -x^4 & & & -x & & -x & +1 \\ \cline{2-6}
- & & x^3 & +2x^2 & +2x & +1 & & \\
 & & x^3 & & & -1 & & \\ \cline{3-6}
 & & & 2x^2 & & +2x & +2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
 & x^3 & & & -1 & 2x^2 & +2x & +2 \\ \cline{6-8}
- & x^3 & +x^2 & +x & & & \frac{1}{2}x & -\frac{1}{2} \\ \cline{2-5}
- & & -x^2 & -x & -1 & & & \\
 & & -x^2 & -x & -1 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 & & &
\end{array}
$$

$\mathrm{BDD}(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, x^3 - 1) = 2x^2 + 2x + 2.$

Uždaviniai.

1. Duotas polinomas $f\,(x) \in K\,[x]$ ir $c \in K$. Raskite polinomą $q\,(x) \in K[x]$ ir elementą $r \in K$ su kuriais teisinga lygybė

$f\,(x) = (x - c)\,q\,(x) + r$.

1) $f\,(x) = 5x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 3$, $K = \mathbf{Q}$, $c = -2; \frac{3}{2}$.

2) $f\,(x) = x^6 - 4x^5 + 3x^2 + 6x - 7$, $K = \mathbf{Q}$, $c = 2; -\frac{3}{2}$.

3) $f\,(x) = 2x^6 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2$, $K = \mathbf{Z}_3$, $c = 1; 2$.

4) $f\,(x) = 3x^7 + 5x^6 + 4x^4 + 3x^2 + 4x + 5$, $K = \mathbf{Z}_7$, $c = 2; 4$.

2. Hornerio schema raskite racionaliąsias polinomo šaknis.

1) $f\,(x) = 5x^5 - 7x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 7x + 6$.

2) $f\,(x) = 3x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 33x + 10$.

3) $f\,(x) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 2x - 12.$

3. Išskaidykite polinomą dvinario $x - x_0$ laipsniais.

1) $2x^4 + 3x^3 - 6x + 2$, $x_0 = 1$.

2) $x^6 + 9x^5 + 7x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 7x + 93$, $x_0 = -2$.

3) $2x^7 + x^5 - 3x^3 + 4x - 7$, $x_0 = 2$.

4) $3x^6 + 6x^5 + x^4 - 3x^3 + 15x^2 + 30x - 7$, $x_0 = -2$.

5) $6x^5 - 4x^4 + 3x^2 + 5x + 7$, $x_0 = \dfrac{2}{3}$.

6) $x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x - 10$, $x_0 = -\dfrac{3}{2}$.

4. Euklido algoritmo pagalba raskite didžiausią bendrą daliklį $d(x)$.
1) $d(x) =$DBD$(x^8 - 1, x^6 - 1) \in \mathbf{Q}[x]$.
2) $d(x) =$DBD$(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, x^3 - 1) \in \mathbf{Q}[x]$.
3) $d(x) =$DBD$(2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 1, 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2) \in \mathbf{Q}[x]$.
4) $d(x) =$DBD$(x^7 + 2x^5 + 2x^2 - x + 2, x^6 - 2x^5 - x^4 + x^2 + 2x + 3) \in \mathbf{Q}[x]$.
5) $d(x) =$DBD$(x^7 + 1, x^5 + x^3 + x + 1) \in \mathbf{Z}_2[x]$.
6) $d(x) =$DBD$(x^5 + x + 1, x^6 + x^5 + x^4 + 1) \in \mathbf{Z}_2[x]$.
7) $d(x) =$DBD$(x^5 + x + 1, x^6 + x^5 + x^4 + 1) \in \mathbf{Z}_2[x]$.
8) $d(x) =$DBD$(x^8 + 2x^5 + x^3 + x^2 + 1, 2x^6 + x^5 + 2x^3 + 2x^2 + 2) \in \mathbf{Z}_3[x]$.

5. Raskite polinomų kanoninius skaidinius virš $\mathbf{Q}$;
1) $x^5 - 10x^4 + 24x^3 + 9x^2 - 33x - 12$;
2) $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 15x - 2$;
3) $x^6 + 2x^5 - 12x^4 - 24x^3 + 36x^2 + 60x - 24$;
4) $\mathrm{x}^6 + x^5 - 12x^4 - 12x^3 + 36x^2 + 24x - 12$.

6. Parašykite visus neredukuojamus 2-ojo ir 3-ojo laipsnio polinomus virš baigtinių kūnų $\mathbf{Z}_p$, $p = 2, 3, 5$.

7. Raskite interpoliacinius polinomus.

1)

-1	0	1	2	3
6	5	0	3	5

2)

1	2	3	4	6
5	6	1	-4	10