Tiesinės algebros ir geometrijos pratybos. Bioinformatika.

Rimantas Grigutis

4 pratybos. *Matricos.*

1. Duotos matricos $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,
$A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Jeigu įmanoma apskaičiuokite $A_i \pm A_j$ ir $A_i \cdot A_j$, $A_j^{-1}, 1 \leq i, j \leq n$.

2. Tegu $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$. Įrodykite, kad $A^n = \begin{pmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{pmatrix}$, kai $n \geq 1$.

3. Tegu $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Įrodykite, kad $A^n = \frac{3^n-1}{2}A + \frac{3-3^n}{2}I_2$, kai $n \geq 1$.

4. Raskite A^{-1}, kai
1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Su kuria racionalia λ reikšme matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ yra išsigimusi?

6. Išspręskite : $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Raskite : 1)$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $\quad$ 2) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

8. Kvadratinė matrica $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & b \\ 0 & 0 & \cdots & c \\ \vdots & & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n$. Įrodykite, kad $A^n = 0$.

9. Duotos elementariosios matricos $E_{ij}, E_i(\alpha), E_{ij}(\alpha) \in M_n$:

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & \cdots & 0 & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_i(\alpha) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \alpha & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

1) Kaip keisis matrica A padauginus ją iš kairės iš elementariosios matricos?
2) Kaip keisis matrica A padauginus ją iš dešinės iš elementariosios matricos?
3) Raskite elementariųjų matricų atvirkštines matricas.
4) Raskite matricą $A \in M_3 : A = E_3(5)\, E_{23}(2)\, E_{12}$. Raskite A^{-1}.
5) Apskaičiuokite:
5.1) $E_{12}E_{23}$ 5.2) $E_1(5)\, E_{12}$ 5.3) $E_{12}(3)\, E_{21}(-3)$ 5.4) $(E_1(100))^{-1}$
5.5) E_{12}^{-1} 5.6) $(E_{12}(7))^{-1}$ 5.7) $(E_{12}(7)\, E_{31}(1))^{-1}$.

10. Tegu tiesinių lygčių sistema $AX = B$ yra *nesuderinta*. Tiesinių lygčių sistema $A^T AX = A^T B$ vadinama *normaliąja sistema* atitinkančia $AX = B$. Normaliosios sistemos sprendiniai vadinami sistemos $AX = B$ *mažiausių kvadratų sprendiniais*.

10.1. Raskite sistemos mažiausių kvadratų sprendinius.

$$1) \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ y = 2 \\ x + y = 3.05 \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{cc} x + 2y & = 4 \\ x + y & = 5 \\ 3x + 5y & = 12 \end{array} \right. .$$

10.2. Duoti taškai (x_i, y_i) turėtų būti tiesėje $y = mx + b$. Raskite mažiausių kvadratų tiesę šiems taškams:

1) $(1, 2)\,; (2, 6)\,; (3, 5)$ 2) $(0, 0)\,; (1, 0)\,; (2, -1)\,; (3, 4)\,; (4, 8)\,.$

10.3. Duoti taškai (x_i, y_i) turėtų būti parabolėje $y = ax^2 + bx + c$. Raskite mažiausių kvadratų parabolę šiems taškams:

1) $(0, 0)\,; (1, 0)\,; (2, -1)\,; (3, 4)\,; (4, 8)$ 2) $(-1, 3)\,; (0, 1)\,; (1, 0)\,; (2, -4)\,.$