Tiesinės algebros ir geometrijos pratybos.Informatika.Rimantas Grigutis

4 Pratybos. *Determinantai.*

1. Pasinaudoję determinantųsavybėmis įrodykite:

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

2. Įrodykite:

$$\begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{vmatrix} = -8.$$

3. Apskaičiuokite:

$$(a)\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} \qquad (b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. Įrodykite:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & b-c \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix} = -2\left(a-b\right)^2\left(a+b\right).$$

5. Įrodykite:

$$\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ c & c+a & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix} = 2a\left(b^2+c^2\right).$$

6. Su kuriomis racionaliomis a ir b reikšmėmis sistemos

$$\begin{cases} x-2y+bz=3 \\ ax+2z=2 \\ 5x+2y=1 \end{cases}$$

matricos determinantas $\neq 0$. Šio atveju išspręskite sistemą Cramerio formulėmis.
7. Išspręskite lygtis:

$$(a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 2t+6 \\ 2 & 2 & 6-t & t \end{vmatrix}=0. \qquad (b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & 1 \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix}=0$$

8. Išspręskite sistemą Cramerio formulėmis:

$$(a)\begin{cases} -2x+3y-z=1 \\ x+2y-z=4 \\ -2x-y+z=-3 \end{cases}. \qquad (b)\begin{cases} 3x-2y+3z=17 \\ 2x+y-5z=-12 \\ 3x+4y-z=-1 \end{cases}$$

9. Įrodykite:

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a & a \\ b & 1+b & b & b \\ c & c & 1+c & c \\ d & d & d & 1+d \end{vmatrix}=1+a+b+c+d.$$

10. Tegu taškai $P_i=(x_i,y_i)\,, i=1,2,3,4$ yra keturkampio viršūnės išdėstytos prieš laikrodžio rodyklĮ. Įrodykite, kad šio keturkampio plotas yra lygus:

$$\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}\right).$$

11. *FIBONACCI* skaičių apibrėžimas: $f_0=0, f_1=1, f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.
Įrodykite, kad n -osios eilės determinantas

$$f_{n+1} = \underbrace{\left.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}\right\}}_{n \text{ stulpelių}} n \text{ eilučių}$$

kai $n \geq 1$ apibrėžia Fibonaccio skaičius.
Pavyzdys. Parodysime, kad $f_5 = f_4 + f_3$.

$$f_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{skleidimas 1-ąja eilute}}{=}$$

$$(1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$f_4 - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{skleidimas 1-ąja eilute}}{=}$$

$$f_4 - \left((-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= f_4 - (-f_3 - 0)$$

$$= f_4 + f_3.$$