

1 Pratybos. *Teiginiai ir įrodymai.*

Pagrindiniai uždaviniai.

1. Suformuluokite pateiktųjų teiginių neiginius. Nustatykite tų teiginių ir jų neiginių teisingumo reikšmes.

1.1. Lygtis $2x^2 - 4x + 2 = 0$ turi sprendinį.

1.2. Lygtis $ax^2 - 4x + 2 = 0$ turi sprendinį.

1.3. Trikampis ABC , kurio viršūnės - taškai $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(1, -1)$, yra status.

1.4. Trikampis ABC , kurio viršūnės - taškai $A(1, 1)$, $B(x, y)$, $C(1, -1)$, yra status.

1.5. Yra toks realusis skaičius α , su kuriuo $\cos(\pi - \alpha) = \sin(\pi + \alpha)$.

1.6. Egzistuoja tokie realieji skaičiai a ir b , su kuriais $(a - b)^2 = a^2 - b^2$.

2. Įrodykite (a) tiesiogiai ir (b) prieštaros būdu teiginį: Jeigu n yra nelyginis sveikas skaičius, tai ir $n + 2$ irgi yra nelyginis sveikas skaičius.

3. Įrodykite arba paneikite:

3.1. Tegū n – sveikasis skaičius. Skaičius n^2 yra lyginis tada ir tik tada, kai n yra lyginis.

3.2. Jei sveikųjų skaičių sandauga $m \cdot n$ yra lyginis skaičius, tai ir skaičiai m ir n yra lyginiai.

3.3. Kiekvieną nelyginį skaičių galima reikšti išraiška:

a) $2j - 1$; b) $2n + 7$; c) $4n + 1$; d) $2n^2 + 3$; e) $2n^2 + 2n + 1$; f) $2m - 9$.

3.4. Kiekvieną lyginį skaičių galima reikšti išraiška:

a) $2n + 4$; b) $4n + 2$; c) $2m - 2$; d) $2 - 2m$; e) $n^2 + 2$; f) $4n^2 - 8n + 4$.

4. Įrodykite nagrinėdami atvejus: Bet kokio sveikojo skaičiaus kvadrato dalys iš 3 liekana yra arba 0, arba 1.

5.1 Paneikite teiginį, pateikdami kontrpavyzdį: Jei k nedalus iš 5 teigiamas sveikas skaičius, tai $12k + 5$ yra pirminis.

5.2. Įrodykite: Jei k nedalus iš 5 teigiamas sveikas skaičius, tai yra *be galo daug sudėtinių* pavidalo $12k + 5$ skaičių.

6. Įrodykite, kad skaičiai $\cos 40^\circ$, $\sin 20^\circ$, $\cos 10^\circ$, $\sin 50^\circ$ yra iracionalūs.

7. Įrodykite: jei $\cos \alpha$ yra racionalus skaičius, tai ir $\cos 3\alpha$ yra racionalus. Suformuluokite atvirkštinę, priešingą, priešingą atvirkštinei teoremas. Įrodykite arba paneikite jas.

8. Įrodykite, kad $\sqrt{6}$ yra iracionalusis skaičius.

9. Realyjį skaičių r vadinsime *artimu racionaliam* (*sensible*) skaičiumi, jei egzistuoja tokie sveikieji a ir b , kad

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = |r|.$$

9.1. Įrodykite, kad racionalus skaičius yra artimas racionaliam skaičius.

9.2. Pateikite iracionalaus artimo racionaliam skaičiaus pavyzdį.

9.3. Įrodykite, kad $\sqrt[3]{2}$ ir $\sqrt[4]{2}$ nėra artimi racionaliam skaičiai.

10. Apibrėžimas: Aibė A vadinama uždara operacijos $*$ atžvilgiu, jei $a, b \in A$, tai $a * b \in A$.

Įrodykite arba paneikite, kad aibė A yra uždara operacijos $*$ atžvilgiu:

10.1. $(A, *) = (\text{nelyginiai skaičiai}, *)$.

10.2. $(A, *) = (\{3n + 1, n \in \mathbf{Z}\}, +)$.

10.3. $(A, *) = (\{3n + 2, n \in \mathbf{Z}\}, \cdot)$.

10.4. $(A, *) = (\{3n + 1, n \in \mathbf{Z}\}, \cdot)$.

10.5. $(A, *) = (\{3n, n \in \mathbf{Z}\}, +)$.

10.6. $(A, *) = (\{3n, n \in \mathbf{Z}\}, \cdot)$.

10.7. $(A, *) = (\{6n + 3, n \in \mathbf{Z}\}, +)$.

10.8. $(A, *) = (\{6n + 3, n \in \mathbf{Z}\}, \cdot)$.

10.9. $(A, *) = (\{6n, n \in \mathbf{Z}\}, +)$.

10.10. $(A, *) = (\{\text{nedalūs iš 3 sveikieji skaičiai}\}, \cdot)$.

Papildomi uždaviniai.

Kai kurie papildomi uždaviniai yra iš uždavinyno: Skrabutėnas-Survila, *Algebras ir skaičių teorijos uždavinynas*. V.: Mokslas, 1995 [S-S].

P1. Suformuluokite pateiktųjų teiginių neiginius. Nustatykite tų teiginių ir jų neiginių teisingumo reikšmes.

P1.2. Apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą.

P1.3. Apie kiekvieną keturkampį galima apibrėžti apskritimą.

P1.4. Nėra tokios kvadratinės lygties, kurios sprendinių suma būtų lygi jų sandaugai.

P1.5. Visada atsiras toks trikampis, kurio dvi kraštinės lygios 3 ir 5 cm, o plotas lygus $7,6 \text{ cm}^2$.

P1.6. 28 cm perimetro stačiakampį galima įbrėžti į $5,1 \text{ cm}$ spindulio apskritimą.

P1.7. Pratimai iš [S-S] 1.7 (7 psl.).

P2. Duoti teiginiai P ir Q . Sudarykite ir suformuluokite žodžiais teiginius $P \vee Q, P \wedge Q, P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P, P \Leftrightarrow Q$. Nustatykite teiginių P ir Q bei iš jų sudarytų teiginių teisingumo reikšmes.

P2.1. $P = \{11 \text{ yra pirminis skaičius}\}; Q = \{2^4 > 4^2\}$.

P2.2. $P = \{237 \text{ dalijasi iš } 3\}; Q = \{540 \text{ dalijasi iš } 9\}$.

P2.3. Pratimai iš [S-S] 1.9 (8 psl.)

P3. [S-S] 2.4 (11 psl).

P4. [S-S] 2.5 (11 psl).

P5. [S-S] 2.6 (13 psl).

P6. Įrodykite arba paneikite:

P6.1. Dviejų racionaliųjų skaičių suma yra racionalusis skaičius.

P6.2. Racionaliojo ir iracionaliojo skaičių suma yra iracionalusis skaičius.

P6.3. Dviejų iracionaliųjų skaičių suma yra iracionalusis skaičius.

P6.4. Dviejų iracionaliųjų skaičių sandauga yra iracionalusis skaičius.

P7. Įrodykite: Jei B ir C yra du simetriški tiesės t atžvilgiu taškai, tai A yra tiesės t taškas tada ir tik tada, kai $BA = CA$.