Algebros pratybos. Rimantas Grigutis

1 Pratybos. *Dalumo su liekana teorema.DBD. Tarpusavyje pirminiai skaičiai. Pirminiai skaičiai. Skaičių faktorizacija.*

1. Euklido algoritmas ir tiesinė DBD išraiška. Matrica Euklido algoritmui.

Tegu n ir m sveikieji skaičiai. Norint rasti d=$BDD(n,m)$ sudarome matricą ir Euklido veiksmais suvedame ją prie norimo pavidalo:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & m \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 0 \\ x & y & d \end{bmatrix}$, čia $d = x \cdot n + y \cdot m$.

Pavyzdžiui, kai $n = 7605$, $m = 5733$, tai

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7605 \\ 0 & 1 & 5733 \end{bmatrix} (-1) \uparrow \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1872 \\ 0 & 1 & 5733 \end{bmatrix} (-3) \downarrow \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1872 \\ -3 & 4 & 117 \end{bmatrix} (-16) \uparrow \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 49 & -65 & 0 \\ -3 & 4 & 117 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

BDD$(7605, 5733) = 117$ ir $117 = (-3) \cdot 7605 + 4 \cdot 5733$.

Uždaviniai.

Apskaičiuokite BDD:

1) $(95, 432)$	2) $(1274, 1089)$	3) $(1776, 1492)$
4) $(3553, 527)$	5) gcd $(7605, 5733)$	6) $(23583, 75219)$
7) $(6787, 7194)$	8) gcd $(111111, 1111)$	9) $(542878, 9856)$

Atsakymai. 1) 1. 2) 1. 3) 4. 4) 17. 5) 117. 6) 3. 7) 11. 8) 11. 9) 14.

2. Diofanto lygties $ax + by = c$ atskirojo sprendinio radimas.

Lygtis $ax + by = c$ yra suderinta tada ir tik tada, kada c dalijasi iš $d = BDD\,(a, b)$. Tegu $a = a_1 d, b = b_1 d, c = c_1 d$. Pradinė lygtis yra ekvivalentiška $a_1 x + b_1 y = c_1$. Skaičiai a_1 ir b_1 yra tarpusavyje pirminiai, todėl Euklido algoritmu galima rasti tokius x_1 ir y_1, kad $a_1 x_1 + b_1 y_1 = 1$. Padauginę šią lygtį iš c_1 turėsime $a_1 (x_1 c_1) + b_1 (y_1 c_1) = c_1$.Skaičiai $x = x_1 c_1, y = y_1 c_1$ yra atskiras lygties sprendinys.

Pavyzdys.

$14x + 49y = 21$

BDD$(14, 49) = 7$

$2x + 7y = 3$

EA $\rightarrow 2\,(-3) + 7\,(1) = 1$

$2\,(-3) \cdot 3 + 7\,(1) \cdot 3 = 1 \cdot 3$

$2\,(-9) + 7\,(3) = 3$

$x = -9, y = 3$ yra atskiras lygties sprendinys.

Uždaviniai.

1. Raskite lygčių atskirus sprendinius.

1) $21x + 35y = 49$ 2) $36x + 63y = 72$

3) $2x + 13y = 29$ 4) $75x - 15y = 45$.

2. Tegu $x = x_0, y = y_0$ yra atskiras lygties $ax + by = c$ sprendinys ir $d = (a, b)$.

(i) Įrodykite, kad su visais sveikais t :$x = x_0 + t\frac{b}{d}, y = y_0 - t\frac{a}{d}$ yra lygties sprendinys.

(ii) Įrodykite, kad lygties sprendiniui $x = x_1, y = y_1$ egzistuoja toks sveikas skaičius t, kad $x_1 = x_0 + t\frac{b}{d}, y_1 = y_0 - t\frac{a}{d}$.

3. Sveikųjų skaičių faktorizacija.

1) *Eratosteno Pirminio skaičiaus testas.*

Jeigu sveikąjam teigiamam skaičiui n su visais pirminiais p, 2$\leq p \leq [\sqrt{n}]$, čia $[\sqrt{n}]$ - sveikoji skaičiaus n dalis, n nesidalijasi iš p, tai n pats yra pirminis skaičius.

Pavyzdys.

n=83;

$\left[\sqrt{83}\right] = 9$;

intervale $[2, 9]$ yra keturi pirminiai skaičiai: $2, 3, 5, 7$;

83 nesidalija nei iš *2*, nei iš *3*, nei iš *5*, nei iš *7*;

83 yra pirminis skaičius.

2) *FERMAT faktorizacijos procesas:*

Babilono laikų formulė $n = a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ *sako, kad faktorizuojamą skaičių reikia rašyti dviejų kvadratų skirtumu:* $n = r^2 - s^2$ *. Todėl:*

(i) Apibrėžiame $r_0 = [\sqrt{n}]$ *;*

(ii) Tikriname, ar $(r_0 + i)^2 - n$ *yra kurio nors sveikojo skaičiaus kvadratas , kai* $i = 0, 1, 2, 3, ...$

Jei $n + s^2$ *nėra sveikojo skaičiaus kvadratas, kai* $s = 1, 2, ..., \frac{n-3}{2}$ *, tai n - pirminis .*

Jei $(r_0 + i)^2 - n = c^2$, tai gauname skaičiaus n skaidinį: $n = (r_0 + i)^2 - c^2 = (r_0 + i + c) \cdot (r_0 + i - c)$.

Pavyzdys.

n=1007;

$\left[\sqrt{1007}\right] = 31$;

$31^2 - 1007 = -46 < 0$

$32^2 - 1007 = 17 \neq c^2$

$33^2 - 1007 = 82 \neq c^2$

$34^2 - 1007 = 149 \neq c^2$
$35^2 - 1007 = 218 \neq c^2$
$36^2 - 1007 = 289 = 17^2$,
$n = 1007 = 36^2 - 17^2 = (36-17)(36+17) = 19 \cdot 53.$
Uždaviniai.
Faktorizuokite:

1) 2881	2) 135337	3) 236273
4) 438359	5) 2091589	6) 2027651281

Atsakymai 1) 43×67. 2) $17\times 19\times 419$. 3) 349×677. 4) 557×787. 5) $71\times 89\times 331$. 6) $44\,021 \times 46\,061$.

4. Sveikojo skaičiaus daliklių skaičius.

Sveikojo skaičiaus n daliklių skaičiaus $d(n)$ formulė. Tegu skaičiaus n kanoninis skaidinys yra $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.Skaičiaus n bet kurio daliklio m kanoninis skaidinys yra $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, čia su visais i, $1 \leq i \leq k$, teisinga $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$. Todėl

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_k + 1).$$

Pavyzdys.
$n = 360 = 2^3 3^2 5^1$, tai $d(180) = (3+1)(2+1)(1+1) = 24$. Štai visi skaičiaus 360 dalikliai:
$2^0 3^0 5^0 = 1$, $2^0 3^0 5^1 = 5, 2^0 3^1 5^0 = 3, 2^0 3^1 5^1 = 15, 2^0 3^2 5^0 = 9, 2^0 3^2 5^1 = 45$
$2^1 3^0 5^0 = 2, 2^1 3^0 5^1 = 10, 2^1 3^1 5^0 = 6, 2^1 3^1 5^1 = 30, 2^1 3^2 5^0 = 18, 2^1 3^2 5^1 = 90$
$2^2 3^0 5^0 = 4, 2^2 3^0 5^1 = 20, 2^2 3^1 5^0 = 12, 2^2 3^1 5^1 = 60, 2^2 3^2 5^0 = 36, 2^2 3^2 5^1 = 180$
$2^3 3^0 5^0 = 8, 2^3 3^0 5^1 = 40, 2^3 3^1 5^0 = 24, 2^3 3^1 5^1 = 120, 2^3 3^2 5^0 = 72, 2^3 3^2 5^1 = 360.$
Uždaviniai.

1. Natūralusis skaičius n vadinamas stipriai pirminiu, jeigu su visais $m < n$ teisinga $d(m) < d(n)$. Raskite visus mažesnius už 100 stipriai pirminius skaičius ir parašykite jų kanoninius skaidinius.
2. Apskaičiuokite $d(n)$, kai $n = 5040; 84^{19}; 1000; 1350; 46200$.
3. Pateikite skaičiaus, turinčio a) lygiai 6 daliklius; b) lygiai 7 daliklius,-pavyzdžius.
4. Apskritimas suskaidytas į 720 lygių lankų. Kiek skirtingų (pagal kraštinių skaičių) taisyklingų daugiakampių, kurių viršūnės yra lankų galuose, galite nubrėžti?
5. Kiek lyginių daliklių turi natūralusis skaičius n ? Kuriems n tai - $\frac{1}{2}d(n)$?