Optimizavimo metodai. Paskaitų konspektas

Rimantas Grigutis

13 paskaita. Transporto uždavinys

Uždavinio formulavimas ir pagrindinės sąvokos

Turime vienodų resursų krovinį, kuris paskirstytas tarp m sandėlių $A_1, A_2, ..., A_m$ taip, kad juose yra atitinkamai $a_1, a_2, ..., a_m$ resursų vienetų. Į n vietų $B_1, B_2, ..., B_n$ reikia pristatyti krovinį taip, kad juose būtų atitinkamai $b_1, b_2, ..., b_n$ šio krovinio vienetų. Sakykime, kad krovinio vieneto transportavimo kaina iš sandėlio A_i į vietą B_j yra c_{ij}.

Rasti tokį krovinio transportavimo planą, kad, įvykdžius visus užsakymus, transportavimo kaštai būtų mažiausi. Tai ir yra *transporto uždavinys.*

Suformuluokime šį uždavinį matematiškai. Tegu x_{ij} ,$i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$, yra krovinio kiekis, pervežamas iš sandėlio A_i į vietą B_j. Šie kiekiai (x_{ij}) vadinami *pervežimais*, o šių pervežimų visuma $x = \{x_{ij}\}$ vadinama *pervežimų planu* arba tiesiog *planu.*

Dabar galime transporto uždavinį užrašyti matematiškai, apribojimus reiškiant nelygybėmis

$$
\begin{gathered}
f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow \min; \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \qquad i = 1, ..., m; \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \qquad j = 1, ..., n; \\
x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1, ..., m; \qquad j = 1, ..., n.
\end{gathered}
$$

arba reiškiant *transporto lentele*

Sandėliai\Vietos	B_1	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_n	Resursai
A_1	c_{11} x_{11}	$\cdots$	c_{1j} x_{1j}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_i	c_{i1} x_{i1}	$\cdots$	c_{ij} x_{ij}	$\cdots$	c_{in} x_{in}	a_i
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	$\cdots$	c_{mj} x_{mj}		c_{mn} x_{mn}	a_m
Paraiškos	b_1	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n	$\sum\limits_j b_j \backslash \sum\limits_i a_i$

Transporto uždavinio sprendinys vadinamas *optimaliu planu.*

Jeigu visų paraiškų suma lygi visų resursų sumai:

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j,$$

tai transporto uždavinys vadinamas *subalansuotu.* Mes nagrinėsime tik subalansuotus transporto uždavinius.

Sprendžiant transporto uždavinį, iš pradžių yra ieškomas *pradinis planas*, kuris vėliau gerinamas iki optimalaus.

Šiaurės-vakarų metodas pradinio planui rasti

Transporto lentelės langeliai, kuriuose $x_{ij} > 0$, yra *baziniai,* o likusieji, kuriuose $x_{ij} = 0$, - *laisvieji.* Transporto lentelėje yra $m+n-1$ baziniai langeliai. Tiek pat yra ir nepriklausomų lygybių-apribojimų.

Visų metodų pradinio planui rasti bendras bruožas yra tas, kad x_{ij} reikšmės randamos formule

$$x_{ij} = \min \left\{ \begin{array}{c} \text{krovinio likutis sandėlyje } A_i \\ \text{nepatenkinti poreikiai vietoje } B_j \end{array} \right. .$$

Laisvuose langeliuose reikšmė $x_{ij} = 0$ nerašoma, šiame langelyje rašomas storas taškas $\bullet$.

Šiaurės-vakarų metode pradinio planui rasti skaičiavimai pradedami elementu x_{11}, kuris yra šiaurės-vakarų lentelės kampe.

Pavyzdys 13.1

Rasti transporto uždavinio, kurio lentelė

Sandėliai\Vietos	B_1	B_2	B_3	Resursai
A_1	2 10	3 10	4 •	20
A_2	1 •	2 10	5 30	40
Paraiškos	10	20	30	60

pradinį planą.
Sprendimas. Pradedame nuo šiaurės-vakarų lentelės kampo ir skaičiuojame

$$x_{11} = \min\{20, 10\} = 10.$$

Tada vietos B_1 poreikiai yra patenkinti ir todėl $x_{21} = 0$ (A_2B_1 langelyje rašome •). Pirmasis stulpelis toliau nenagrinėjamas.

Vėl pradedame nuo šiaurės-vakarų kampo ir skaičiuojame

$$x_{12} = \min\{20 - 10, 10\} = 10.$$

Tada sandėlio A_1 atsargos išsenka ir $x_{13} = 0$ (A_1B_3 langelyje rašome •). Pirmoji eilutė toliau nenagrinėjama.

Toliau vėl nagrinėjame šiaurės-vakarų kampą ir skaičiuojame

$$x_{22} = \min\{40, 20 - 10\} = 10.$$

Tada vietos B_2 poreikiai yra patenkinti ir antrasis stulpelis toliau nenagrinėjamas. Skaičiuojame paskutinįjį elementą, esantį šiaurės vakarų kampe:

$$x_{23} = \min\{40 - 10, 30\} = 30.$$

Gavome tokį pradinį planą:

$$x_{11} = 10, x_{12} = 10, x_{13} = 0, x_{21} = 0, x_{22} = 10, x_{23} = 30,$$

kurio suminė kaina

$$f(x) = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 30 = 220.$$

Bazinių langelių skaičius yra $m+n-1=2+3-1=4$.

Pastaba 13.2

Atliekant skaičiavimus pradiniam planui rasti gali atsitikti taip, kad vietos B_j poreikiai patenkinti, o sandėlio A_i resursai išseko. Tada vienu metu reikia nustoti nagrinėti ir eilutę ir stulpelį. Šiuo atveju rekomenduojama į vieną iš šių eilutės ir stulpelio langelį (geriau tą, kurio kaina mažiausia) įrašyti bazinį nulį **0.** Šis langelis tampa baziniu ir tokiu būdu bazinių langelių skaičius lieka $m+n-1$.

Pavyzdys 13.3.

Rasti transporto uždavinio, kurio lentelė

Sandėliai\Vietos	B_1	B_2	B_3	B_4	Resursai
A_1	1 30	2 20	3 •	5 •	50
A_2	4 •	1 **0**	1 40	2 •	40
A_3	1 •	2 •	5 10	10 50	60
Paraiškos	30	20	50	50	150

pradinį planą.

Sprendimas. Pradedame nuo šiaurės-vakarų lentelės kampo ir skaičiuojame

$$x_{11}=\min\{50,30\}=30, \qquad x_{21}=x_{31}=0 \text{ (rašome tašką).}$$

Vėl pradedame nuo šiaurės-vakarų kampo:

$$x_{12}=\min\{50-30,20\}=20.$$

Šiuo atveju turime toliau nenagrinėti pirmąją eilutę ir antrąjį stulpelį:

$$x_{13}=x_{14}=x_{22}=x_{32}=0.$$

Langelio A_2B_2 yra mažiausia kaina ($\min\{3;5;1;2\}=1$), todėl jame ir rašome bazinį **0**. Kituose langeliuose rašome taškus $\bullet$.

Toliau vėl pradedame šiaurės-vakarų kampo:

$$x_{23}=\min\{40,50\}=40, x_{24}=0 \text{ (rašome tašką).}$$

Antroji eilutė toliau nenagrinėjama.
Toliau vėl pradedame šiaurės-vakarų kampo:

$$x_{33} = \min\{60, 50-40\} = 10 \text{ ir } x_{34} = \min\{60-10, 50\} = 50.$$

Gavome tokį pradinį planą:

$$\begin{array}{ccc} x_{11} = 30, & x_{12} = 20, & x_{13} = x_{14} = 0, \\ x_{21} = x_{22} = 0, & x_{23} = 40, & x_{24} = 0, \\ x_{31} = x_{32} = 0, & x_{33} = 10, & x_{34} = 50. \end{array}$$

Suminė transportavimo kaina

$$f(x) = 1 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 5 \cdot 10 + 10 \cdot 50 = 660.$$

Bazinių langelių skaičius (įskaitant bazinį nulį) yra $m+n-1 = 3+4-1 = 6$.

Potencialų metodas transporto uždaviniui spręsti

1 žingsnis. Rasti pradinį planą (pvz. šiaurės vakarų kampo metodu).
2 žingsnis. Kiekvienam *baziniam* langeliui (i,j) sudaryti lygtį:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$$

Pradiniame plane bazinių langelių yra $m+n-1$. Sudarome $m+n-1$ lygčių su $m+n$ nežinomųjų (nežinomieji α_i, β_j) sistemą, kurioje tariame, kad $\alpha_1 = 0$. Išsprendžiame ją(sistema turi vienintėlį sprendinį).

3 žingsnis. Kiekvienam laisvajam langeliui (i,j) skaičiuojame įverčius:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - \left(\alpha_i + \beta_j\right).$$

4 žingsnis. Analizuojame gautus įverčius Δ_{ij} :
(1) jei *visi* $\Delta_{ij} \geq 0$, tai algoritmą baigti ir optimalus planas jau yra rastas;
(2) jei *ne visi* $\Delta_{ij} \geq 0$, tai tarp $\Delta_{ij} < 0$ randame mažiausią Δ_{kl} ir atitinkamą langelį (k,l) pažymime $\otimes$.

5 žingsnis. Langeliui (k,l) konstruojame ciklą, kurio visos viršūnės, išskyrus (k,l), yra baziniuose langeliuose. langelis (k,l) žymimas $+$, visi kiti šalia esantys langeliai turi turėti priešingus ženklus.

6 žingsnis. Randame mažiausią plano skaičių, esantį langeliuose su ženklu $-$. Tegu tai skaičius θ. Atliekame postūmį ciklu skaičiumi θ : langeliuose su $+$ pridedame θ, langeliuose su $-$ atimame θ.(Jei skaičius θ yra keliuose neigiamuose langeliuose, tai viename iš jų reikia rašyti bazinį 0, o kituose rašyti $\bullet$). Langeliai nesantys cikle lieka nepakitę.

Pereiti prie *2 žingsnio.*