Optimizavimo metodai. Paskaitų konspektas

Rimantas Grigutis

12 paskaita. Dualusis tiesinio programavimo uždavinys. Optimalaus planavimo uždavinys

Nagrinėkime TPU

$$\begin{cases} f(x) = c_{1j}x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \qquad i = 1, ..., k; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = k+1, ..., m; \\ x_j \geq 0, \qquad j = 1, ..., l, \end{cases}$$

čia

$$k \leq m, l \leq n.$$

Šį uždavimį vadina tiesioginiu TPU.

Apibrėžimas 12.1
Dualiuoju TPU tiesioginiam TPU vadiname uždavinį:

$$\begin{cases} g(x) = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_mu_m \longrightarrow \max \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_j \leq c_j, \qquad j = 1, ..., l; \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i = b_i, \qquad j = l+1, ..., n; \\ u_j \geq 0, \qquad j = 1, ..., k. \end{cases}$$

Pavyzdys 12.2
Rasime TPU

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \longrightarrow \max \\ x_1 - 2x_2 + x_4 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 3 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

dualųjį TPU.

Paketę antrąją nelygybę ekvivalenčia nelygybe

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq -3,$$

gausime tiesioginį TPU. Dualusis TPU yra

$$\begin{cases} 2u_1 - 3u_2 + u_3 \longrightarrow \min \\ u_1 - u_2 - u_3 \geq 1 \\ -2u_1 + 2u_2 \geq 1 \\ -u_2 - u_3 \geq -2 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 = -1 \\ u_i \geq 0, \ i = 1, 2. \end{cases}$$

Teorema 12.3 (dualumo teorema)

Tiesioginio TPU sprendinys egzistuoja tada ir tik tada, kai egzistuoja dualaus TPU sprendinys: jei x^* - optimalus tiesioginio TPU sprendinys, o u^* - optimalus dualaus TPU sprendinys, tai $f(x^*) = g(u^*)$.

Optimalaus planavimo uždavinys

Tegu įmonė, naudodama m resursų rūšių, gamina n rūšių gaminių. Sakykime, kad i-ojo gaminio vienetui pagaminti naudojama a_{ij} j-ojo resurso vienetų, o i-ojo gaminio vienetą pardavus gaunamas c_i litų pelnas $(i = 1, ..., n)$. Įmonės saldėliuose yra b_j j-ojo resurso vienetų $(j = 1, ..., m)$. Optimalaus planavimo uždavinys formuluojamas taip: Kiek reika pagaminti kiekvienos rūšies gaminių iš esamo resursų kiekio, kad juos pardavus įmonė gautų didžiausią pelną.

Suformuluokime šį uždavinį matematiškai. Tegu x_i yra i- ojo gaminio kiekis, o z- įmonės pelnas, gautas realizavus visą produkciją. Gauname tokį TPU:

$$\begin{cases} f = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_i \geq 0, \ i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Tai ne kas kito, kaip standartinis TPU, kai $c_i \geq 0, a_{ij} \geq 0, b_j \geq 0$.

Dualaus TPU optimalaus planavimo uždaviniui ekonomimė interpretacija

Įsivaizduokime tokią situaciją, kai įmonė nutarė ne gaminti produkciją, o kaip galima greičiau parduoti visą turimą resursą. Beto įmonė nori gauti ne mažesnį pelną, nei ji gautų gamindama ir parduodama produkciją. Kyla klausimas: kokia kaina u_j reiktų pardavinėti j-ąjį resursą ($j = 1, ..., m$)? Norint pagaminti 1-os rūšies produktą reikia a_{11} 1-os rūšies resursų, a_{21} 2-os rūšies resursų,..., a_{m1} m-os rūšies resursų. Todėl pardavus visus čia paminėtus resursus, pelnas turėtų būti ne mažesnis nei 1-os rūšies produkto vieneto kaina c_1, t.y.

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \geq c_1.$$

Analogiškos nelygybės turi galioti ir kitų rūšių gaminiams. Taip pat turėtų būti aišku, kad norint kuo greičiau paduoti turimus resursus, reiktų tenkintis minimaliu pelnu $g = b_1u_1 + \cdots + b_mu_m$. Tokiu būdu, gauname tokį TPU:

$$\begin{cases} g = b_1u_1 + \cdots + b_mu_m \longrightarrow \min \\ a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \geq c_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m \geq c_2 \\ \cdots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m \geq c_n \\ u_j \geq 0, \ j = 1, ..., m. \end{cases}$$

Tai ne kas kita, kaip optimalaus planavimo uždavinio dualusis uždavinys.

Resursų kainos $u_1, ..., u_m$ dar vadinamos *šešėlinėmis* kainomis, o dualaus uždavinio optimalaus plano komponentės vadinamos *objektyviai apspręstais įverčiais*(arba dualiai optimaliais įverčiais) optimalaus planavimo uždaviniui.

Tegu $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ yra optimalaus planavimo uždavinio optimalus planas, o $u^* = (u_1^*, ..., u_m^*)$ - objektyviai apspręsti įverčiai (dualaus uždavinio optimalus planas). Dualumo teorijoje yra įrodyta, kad su visais $1 \leq j \leq m$ teisinga

$$\begin{array}{lll} u_j^* = 0, & \text{jei} & a_{j1}x_1^* + \cdots + a_{jn}x_n^* < b_j; \\ u_j^* > 0, & \text{jei} & a_{j1}x_1^* + \cdots + a_{jn}x_n^* = b_j. \end{array}$$

Iš čia turime, kad jei optimalioje programoje išnaudojamas visas resursas b_j, tai atitinkamas įvertis $u_j^* > 0$. Šiuo atveju resursas vadinamas *deficitiniu.* Nedeficitinių resursų įverčiai yra lygūs nuliui. Tokiu būdu objektyviai apspręsti įverčiai apsprendžia resursų deficito laipsnį.

O ką tada rodo pačios objektyviai apspręstų įverčių skaitinės reikšmės u_j^*? Norint atsakyti į šį klausimą, pastebėkime, kad tikslo funkcijos f maksimali reikšmė $f_{\max}$ priklauso nuo $b_1, ..., b_m$ reikšmių. Šią priklausomybę apibrėžkime funkcija

$$f_{\max} = \varphi\left(b_1, ..., b_m\right).$$

Pasirodo, kad jei tiesioginis optimalaus planavimo uždavinys turi optimlųjį planą, tai

$$\frac{d\varphi\left(b_1, ..., b_m\right)}{db_j} = u_j^*, \qquad j = 1, ..., m.$$

Čia matome, kad objektyviai apspręsti įverčiai u_j^* rodo kiek piniginių vientų(litų) pasikeis produkcijos realizavimo maksimalus pelnas $f_{\max}$, jei atitinkamo(čia j-ojo) resurso kiekis pakis vienu vienetu.