**Optimizavimo metodai. Paskaitų konspektas**

**Rimantas Grigutis**

## 11 paskaita. Tiesinis programavimas. Simplekso metodas. Sveikatiesis programavimas. Šakų ir ribų metodas

**Pavyzdys 11.1**. $TPU$ sprendimo simplekso metodu Maple pagalba pavyzdys.

Rasti funkcijos

$$f(x) = 3x - 4y$$

maksimumą, jei galimų sprendinių aibės apribojimai yra

$$\begin{gathered} 6x + 6y \leq 36 \\ 4x + 8y \leq 32 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{gathered}$$

Sprendžiame Maple pagalba:

$> with(simplex);$
$> cnsts := \{6 * x + 6 * y <= 36, 4 * x + 8 * y <= 32\};$
$> obj := 3 * x - 4 * y;$
$> maximize(obj, cnstunion \{x >= 0, y >= 0\});$

$$\{y = 0, x = 6\}$$

**Sveikatiesis TPU**
Rasti funkcijos

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

maksimumą, jei galimų sprendinių aibės apribojimai yra

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1, ..., m; \\ x_j \geq 0, \text{sveikieji}, \qquad j = 1, ..., n. \end{gathered}$$

**Sprendimo strategija**

Jei sprendžiant TPU-(r) *be sveikareikšmiškumo* sąlygos

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1, ..., m;$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, ..., n. x_j$$

gaunamas nesveikareikšmis sprendinys $\mathbf{x}^* = (x_1^*, ..., x_k^*, ..., x_n^*)$ ir skaičiaus $x_k^*$ trupmeninė dalis $\{x_k^*\}$ yra didžiausia iš visų skaičių $x_1^*, ..., x_n^*$ trupmeninių dalių $\{x_1^*\}, ..., \{x_n^*\}$

$$\{x_k^*\} = \max\{\{x_1^*\}, ..., \{x_n^*\}\},$$

tai TPU-(r) *skaidomas į du uždavinius* TPU-(2r) ir TPU-(2r+1):
TPU-(2r)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1, ..., m;$$
$$x_k \leq [x_k]$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, ..., n.$$

TPU-(2r)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1, ..., m;$$
$$x_k \geq [x_k] + 1$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, ..., n.$$

Toliau sprendžiami šie uždaviniai ir jei sprendiniai vėl nesveikareikšmiai, tai vėl skaidyti į du uždavinius. Taip elgtis tol, kol arba negausime sveikareikšmio sprendinio, arba visi nauji uždaviniai bus nesuderinami.

**Algoritmas.**

Apibrėžiame TPU-0

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1, ..., m;$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, ..., n$$

*Žingsnis 1.* Parenkamas labai mažas neigiamas skaičius $M < 0$ ir priskiriame $F := M$

*Žingsnis 2.* Priskiriame $\mathbf{x}^* := (-1, ..., -1)$.

*Žingsnis 3.* Apibrėžiama sprendžiamų uždavinių aibė $S := \{\text{TPU-0}\}$.

*Žingsnis 4.* Sprendžiame visus uždavinius iš S be sveikareikšmiškumo reikalavimo.

*Žingsnis 5.* Jei visų uždavinių sprendiniai yra nesveikareikšmiai, tai pereiti prie Žingsnio 6.

Jei tarp išspręstų uždavinių sprendinių yra sveikareikšmiai $\mathbf{x}^{*i_1}, ..., \mathbf{x}^{*i_t}$, tai parenkamas toks $\mathbf{x}^{*i}$, kad $f(\mathbf{x}^{*i}) = \max\limits_{1 \leq j \leq t} f(\mathbf{x}^{*i_j})$ ir

jei $f(\mathbf{x}^{*i}) \leq F$, tai pereiti prie Žingsnio 6;

jei $f(\mathbf{x}^{*i}) \geq F$, tai priskirti $\mathbf{x}^* := \mathbf{x}^{*i}$ ir $F := f(\mathbf{x}^{*i})$ ir pereiti prie Žingsnio 6.

*Žingsnis 6.* Iš S išbraukiame visus TPU-j, kurių sprendiniai $\mathbf{x}^{*j}$ tenkina nelygybę $f(\mathbf{x}^{*j}) \leq F$.

*Žingsnis 7.* Jei S=∅, tai baigti algoritmą ir pereiti prie Žingsnio 8;

Jei S≠ ∅, tai visus uždaviniusTPU-(r) iš S pakeičiame jų skaidiniais TPU-(2r) ir TPU-(2r+1) ir pereiti prie Žingsnio 4.

*Žingsnis 8.* Sveikareikšmis TPU sprendinys yra $\mathbf{x}^*$ ir $f(\mathbf{x}^*) = M$.

Jei $\mathbf{x}^* := (-1, ..., -1)$, tai sprendžiamas uždavinys neturi sveikareikšmio sprendinio.

**Pavyzdys 11.2**