Optimizavimo metodai. Paskaitų konspektas

Rimantas Grigutis

10 paskaita. Tiesinis programavimas. Grafinis metodas

Pagrindinis uždavinys

Rasti funkcijos

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

maksimumą, jei galimų sprendinių aibės apribojimai yra

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & \qquad i = 1, ..., m; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & \qquad i = m+1, ..., p; \\ x_j \geq 0, & \qquad j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Čia $b_i \geq 0$, kai $i = 1, ..., p$.

Grafinis tiesinio programavimo uždavinio(TPU) sprendimas

1. Jei $n = 2$, tai TPU turi paprastą geometrinę interpretaciją ir gali būti sprendžiamas grafiniu metodu žemiau pateiktu algoritmu.

2. Kai TPU galimų sprendinių apribojimai yra lygybės ir tų apribojimų skaičius yra vienetu arba dvejetu mažesnis nei kintamųjų skaičius, tai TPU gali būti sprendžiamas grafiniu metodu. Čia reiktų duotą TPU uždavinį suvesti prie TPU su vienu arba dviem kintamaisiais. Tam reiktų tikslo funkciją ir bazinius kintamuosius išreikšti laisvaisiais kintamaisiais ir pasinaudoti papaildoma neneigiamumo sąlyga, būdinga TPU. Vėliau pasinaudoti grafiniu TPU algoritmu.

Algoritmas

Žingsnis 1. Nubrėžti galimų sprendinų aibę plokštumoje. Bendruoju atveju tai yra iškilusis daugiakampis. Jei uždavinio apribojimai yra nesuderinti, tai galimų sprendinų aibė yra tuščia ir TPU neturi prasmės.

Žingsnis 2. Rasti tikslo funkcijos gradientą. Tikslo funkcija yra tieisinė, todėl jos gradientas yra skaičius ir gali būti nubrėžtas bet kuriame plokštumos taške(paprastai tai koordinačių pradžios taškas).

Žingsnis 3. Nubrėžti funkcijos lygio tiesę, statmeną gradientui.

Žingsnis 4. Lygiagrečiu postūmiu slinkti lygio tiesę iki lietimosi su TPU galimų sprendinių aibe(daugiakampiu). Lietimosi taškai yra ekstremumo taškai.

Žingsnis 5. Lietimosi taškų klasifikacija.

Jei TPU galimų sprendinių aibė yra netuščia galimi trys atvejai:

a) jei lygio tiesė TPU galimų sprendinių aibę liečia viename taške, tai TPU turi vienintėlį sprendinį;

b) jei lygio tiesė TPU galimų sprendinių aibę liečia daugiakampį briauna, tai TPU turi be galo daug sprendinių;

c) jei TPU galimų sprendinių aibė yra neprėžta, tai TPU neturi sprendinio.

Pavyzdys 10.1

Pavyzdys 10.2