Optimizavimo metodai. Paskaitų konspektas

Rimantas Grigutis

9 paskaita. Skaitiniai besąlyginiai optimizavimo metodai. Daugiamatė optimizacija. Baudų metodas

Uždavinys.

Duota dukart tolydžiai diferencijuojama tikslo funkcija $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ ir galimų reikšmių sritį X lygybėmis apribojančios funkcijos $g_j(x) = g_j(x_1, ..., x_n), j = 1, ..., p$.

Rasti tikslo funkcijos $f(x)$ lokalųjį minimumą x^*aibėje X:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

čia $X = \left\{ x | \begin{array}{c} g_j(x) = 0, j = 1, ..., m; m < n \\ g_j(x) \leq 0, j = m+1, ..., p \end{array} \right\}$.

Sprendimo startegija

1. Metodo idėja yra ta, kad sąlyginio minimumo paieška pakeičiama besąlyginio minimumo paieška pagalbinei funkcijai:

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + P\left(x, r^k\right) \to \min_{x \in \mathbf{R}^n},$$

čia $P\left(x, r^k\right)$ - baudos funkcija, o r^k - baudos parametras, apibrėžiamas kiekviename iteracijos žingsnyje.

Baudos funkcijos turi tenkinti šias sąlygas:

$$P\left(x, r^k\right) = \left\{ \begin{array}{cl} 0, & \text{jei apribojimai tenkinami} \\ > 0, & \text{jei apribojimai netenkinami} \end{array} \right.,$$

beto, jei apribojimai yra netenkinami ir $r^k \to \infty, k \to \infty$ teisinga $P\left(x, r^k\right) \to \infty$. Kuo didesnis r^k, tuo didesnė apribojimo netenkinimo bauda.

2. Pradinis paieškos taškas x^0 paprastai parenkamas už galimų sprendinių aibės X ribų. Kiekviename $k-$ajame iteracijos žingsnyje randamas pagalbinės funkcijos $F\left(x, r^k\right)$ minimumo taškas $x^*\left(r^k\right)$, kuris būna pradiniu tašku sekančiame iteracijos žingsnyje, kuriame baudos parametras jau didesnis. Kai $r^k \to \infty$, tai $x^*\left(r^k\right)$ artėja prie sąlyginio minimumo taško x^*.

Algoritmas

Žingsnis 1. Pasirenkame: pradinį tašką x^0, pradinį baudos parametrą $r^0 > 0$, parametro pokyčio reikšmę $C > 0$, algoritmo pabaigos mažą reikšmę $\varepsilon > 0$. Priskiriame $k = 0$.

Žingsnis 2. Konstruojame pagalbinę funkciją

$$F\left(x, r^k\right) = f(x) + \frac{r^k}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(g_j(x)\right)^2 + \sum_{j=m+1}^{p}\left(g_j^+(x)\right)^2\right),$$

čia

$$g_j^+(x) = \max\left\{0, g_j(x)\right\} = \begin{cases} g_j(x), & g_j(x) > 0, \\ 0, & g_j(x) \le 0. \end{cases}$$

Žingsnis 3. Rasti kuriuo nors metodu funkcijos $F\left(x, r^k\right)$ besąlyginio minimumo tašką $x^*\left(r^k\right)$:

$$F\left(x^*\left(r^k\right), r^k\right) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} F\left(x, r^k\right).$$

Pasirinktame metode parinkti pradinius duomenis: pradiniu tašku bus x^k. Suskaičiuoti baudos funkcijos reikšmę $P\left(x^*\left(r^k\right), r^k\right)$, čia

$$P\left(x, r^k\right) = \frac{r^k}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(g_j(x)\right)^2 + \sum_{j=m+1}^{p}\left(g_j^+(x)\right)^2\right)$$

baudos funkcija.

Žingsnis 4. Patikrinti algoritmo pabaigos sąlygas:

a) jei $P\left(x^*\left(r^k\right), r^k\right) \le \varepsilon$, tai algoritmas baigiamas ir

$$x^* = x^*\left(r^k\right), \qquad f\left(x^*\right) = f\left(x^*\left(r^k\right)\right);$$

b) jei $P\left(x^*\left(r^k\right), r^k\right) > \varepsilon$, tai priskirti

$$r^{k+1} = Cr^k, \qquad x^{k+1} = x^*\left(r^k\right), \qquad k = k + 1$$

ir pereiti prie *Žingsnio 2*.

Pastaba 9.1

Paprastai renkamės $r^0 = 0,01; \quad 0,1; \quad 1$, o $C \in [4;10]$. Kartais renkamės $r^0 = 0$ ir sprendžiame besąlyginio minimumo paieškos uždavinį.

Pavyzdys 9.2

Pavyzdys 9.3

Pavyzdys 9.4