Optimizavimo metodai. Paskaitų konspektas

Rimantas Grigutis

8 paskaita. Skaitiniai besąlyginiai optimizavimo metodai. Daugiamatė optimizacija. Newtono metodas

Uždavinys.

Tegu $f(x)$ yra aprėžta iš apačios funkcija visoje erdvėje $\mathbf{R}^n$ ir visos jos dalinės yra tolydžios visuose taškuose.

Rasti tokį $x^* \in \mathbf{R}^n$, kad

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x).$$

Newtono algoritmas

Žingsnis 1. Pasirinkti $x^0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, M$ - itercijų ribinis skaičius. Apsakičiuoti gradientą $\nabla f(x)$ ir Hesse matricą $H(x)$.

Žingsnis 2. Apibrėžti $k = 0$.

Žingsnis 3. Apskaičiuoti $\nabla f\left(x^k\right)$.

Žingsnis 4. Patikrinti algoritmo pabaigos sąlygą $\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\| \leq \varepsilon_1$:

a) jei nelygybė teisinga, tai algoritmas baigiamas ir $x^* = x^k$.

b) jei nelygybė neteisinga, tai pereiti prie *Žingsnio 5.*

Žingsnis 5. Patikrinti algoritmo pabaigos sąlygą $k \geq M$:

a) jei nelygybė teisinga, tai algoritmas baigiamas ir $x^* = x^k$.

b) jei nelygybė neteisinga, tai pereiti prie *Žingsnio 6.*

Žingsnis 6. Apskaičiuoti matricą $H\left(x^k\right)$.

Žingsnis 7. Apskaičiuoti matricą $H^{-1}\left(x^k\right)$.

Žingsnis 8. Patikrinti sąlygą $H^{-1}\left(x^k\right) > 0$:

a) jei nelygybė teisinga, tai pereiti prie *Žingsnio 9.*

b) jei nelygybė neteisinga, tai priskirti $d^k := -\nabla f\left(x^k\right)$ ir pereiti prie *Žingsnio 10.*

Žingsnis 9. Priskirti $d^k := -H^{-1}\left(x^k\right) \nabla f\left(x^k\right)$.

Žingsnis 10. Rasti tašką $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$, čia t_k parenkamas taip:

jei $d^k := -H^{-1}\left(x^k\right) \nabla f\left(x^k\right)$, tai $t_k = 1$,

jei $d^k := -\nabla f\left(x^k\right)$, tai t_k parenkamas taip, kad būtų teisinga $f\left(x^{k+1}\right) < f\left(x^k\right)$.

Žingsnis 11. Patikrinti algoritmo pabaigos sąlygas

$$\left\|x^{k+1}-x^k\right\| < \varepsilon_2, \qquad \left\|f\left(x^{k+1}\right)-f\left(x^k\right)\right\| < \varepsilon_2 :$$

a) jei teisingos abi nelygybės su k ir su $k = k-1$, tai algoritmas baigiamas ir $x^* = x^{k+1}$;

b) jei kuri nors nelygybė yra neteisinga, tai priskiriame $k := k+1$ ir pereiti prie *Žingsnio 3*.

Uždavinio sprendimas.

1. Newtono algoritmu rasti tokį tašką x^k, kuris tenkina nors vieną algoritmo pabaigos salygą.

2. Rastam taškui x^k patikrinti pakankamą minimumo sąlygą $H\left(x^k\right) > 0$. Jeigu nelygybė teisinga, tai taškas x^k gali būti laikomas ieškomasis minimumas: $x^* = x^k$.

Pavyzdys 8.1