Optimizavimo metodai. Paskaitų konspektas

Rimantas Grigutis

7 paskaita. Skaitiniai besąlyginiai optimizavimo metodai. Vienmatė optimizacija. Powello kvadratinės interpoliacijos metodas

Uždavinys.

Rasti vieno kintamojo funkcijos $f(x)$ minimumą, t.y. tokį $x^* \in \mathbf{R}$, kad $f(x^*) = \min\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x)$.

Sprendimo strategija

Pasirenkamas pradinis taškas ir jo pagrindu randami tokie trys taškai, kad jie būtų kuo arčiau ieškomojo minimumo. Šiuose taškuose skaičiuojamos funkcijos reikšmės. Toliau ieškomas antrojo laipsnio interpoliacinis polinomas, einantis per šiuos tris taškus, ir radamas jo minimumas. Ir jei jis tenkina norimo tikslumo sąlygas, tai šis taškas ir yra ieškomasis.

Algoritmas

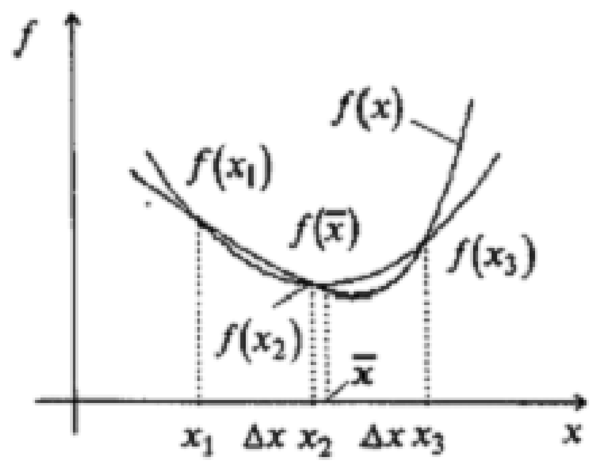
Žingsnis 1. Apibrėžiamas pradinis taškas x_1, žingsnis $\Delta x > 0$, tikslumą apibrėžiančios teigiamos konstantos ε_1 ir ε_2.

Žingsnis 2. Skaičiuojame $x_2 = x_1 + \Delta x$.

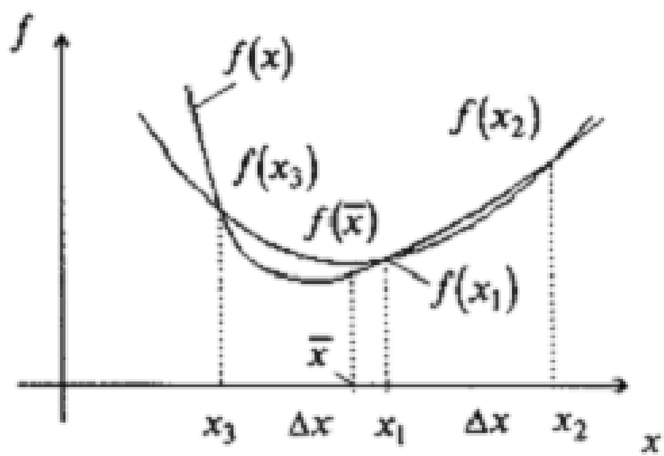
Žingsnis 3. Skaičiuojame $f(x_1) = f_1$ ir $f(x_2) = f_2$.

Žingsnis 4. Lyginame $f(x_1)$ ir $f(x_2)$:

a) jei $f(x_1) > f(x_2)$, tai apibrėžiame $x_3 = x_1 + 2\Delta x$;



b) jei $f(x_1) \le f(x_2)$, tai apibrėžiame $x_3 = x_1 - \Delta x$



Žingsnis 5. Apskaičiuoti $f(x_3) = f_3$.
Žingsnis 6. Rasti $F_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\}$, $x_{\min} = x_i : f(x_i) = F_{\min}$.
Žingsnis 7. Randamas interpoliacinio polinomo minimumas:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\frac{(x_2^2 - x_3^2) f_1 + (x_3^2 - x_1^2) f_2 + (x_1^2 - x_2^2) f_3}{(x_2 - x_3) f_1 + (x_3 - x_1) f_2 + (x_1 - x_2) f_3},$$

ir skaičiuojame $f(\overline{x})$.

Jei $\overline{x}$ išraiškos vardiklis kuriame nors iteracijos žingsnyje lygus nuliui, tai pažymėkime $x_1 = x_{\min}$ ir pereikime į *Žingsnį 2.*

Žingsnis 8. Algoritmo pabaigos sąlygų patikrinimas:

$$\left|\frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| < \varepsilon_1, \qquad \left|\frac{x_{\min} - \bar{x}}{\bar{x}}\right| < \varepsilon_2.$$

a) jei teisingos abi nelygybės, tai algoritmas baigiamas ir $x^* = \overline{x}$.

b) jei kuri nors viena iš nelygybių yra neteisinga ir $\overline{x} \in [x_1; x_3]$, tai paimti mažiausią tašką iš $x_{\min}$ ir $\overline{x}$, ir du taškus po vieną iš kairės ir dešinės nuo šio taško. Perpažymėti šiuos taškus didėjimo tvarka ir pereiti prie *Žingsnio 6.*

c) jei kuri nors viena iš nelygybių yra neteisinga ir $\overline{x} \notin [x_1; x_3]$, tai priskirti $x_1 = \overline{x}$ ir pereiti prie *Žingsnio 2.*

Pavyzdys 7.1