Optimizavimo metodai. Paskaitų konspektas

Rimantas Grigutis

6 paskaita. Skaitiniai besąlyginiai optimizavimo metodai. Vienmatė optimizacija. Intervalo dalijimo pusiau metodas

Uždavinys.

Rasti vieno kintamojo funkcijos $f(x)$ minimumą, t.y. tokį $x^* \in \mathbf{R}$, kad $f(x^*) = \min\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x)$.

Pastaba 6.1

1) Vieno kintamojo funkcijų minimumo taško paieškos metodams yra būdinga tai, kad pačioje pradžioje yra nurodomas pradinis intervalas $L_0 = [a_0; b_0]$, kuriame yra ieškomasis minimumo taškas.

2) Dauguma vieno kintamojo funkcijų minimumo taško paieškos metodų yra pritaikyti unimoduliarioms funkcijoms.

Apibrėžimas 6.2

Funkcija $f(x)$ vadinama unimoduliaria intervale $L_0 = [a_0; b_0]$, jei ji įgyja globaliai minimalią reikšmę vienintėliame intervalo L_0 taške x^*. Beto, intevale $(a_0; x^*)$ funkcija yra griežtai mažėjanti, o intervale $(x^*; b_0)$ - griežtai didėjanti.

Swanno(W.H.Swann) algoritmas pradinam intervalui rasti.

Žingsnis 1. Apibrėžti pradinius parametrus: x^0 - pradinį tašką, $t > 0$ - žingsnio dydį, $k = 0$;

Žingsnis 2. Apsakaičiuoti funkcijos reikšmes trijuose taškuose: $x^0 - t, x^0, x^0 + t$;

Žingsnis 3. Patrikrinti algoritmo pabaigos sąlygas:

a) Jei $f(x^0 - t) \geq f(x^0) \leq f(x^0 + t)$, tai pradinis intervalas yra surastas: $[a_0; b_0] = [x^0 - t; x^0 + t]$;

b) Jei $f(x^0 - t) \leq f(x^0) \geq f(x^0 + t)$, tai funkcija nėra unimoduliari ir pradinio intervalo negalima surasti. Skaičiavimai nutraukiami ir siūloma pasrinkti kitą x^0;

c) Jeigu algoritmo pabaigos sąlyga nevykdoma pereiti *Žingsnio 4.*

Žingsnis 4. Apibrėžiamas dydis Δ :

a) Jei $f(x^0 - t) \geq f(x^0) \geq f(x^0 + t)$, tai $\Delta = t; a_0 = x^0; x^1 = x^0 + t; k = 1$;

b) Jei $f(x^0 - t) \leq f(x^0) \leq f(x^0 + t)$, tai $\Delta = -t; b_0 = x^0; x^1 = x^0 - t; k = 1$;

Žingsnis 5. Randame sekantį tašką: $x^{k+1} = x^k + 2^k\Delta$;

Žingsnis 6. Patikrinti funkcijos mažėjimo sąlygą:

a) jei $f\left(x^{k+1}\right) < f\left(x^k\right)$ ir $\Delta = t$, tai $a_0 = x^k$; .

b) jei $f\left(x^{k+1}\right) < f\left(x^k\right)$ ir $\Delta = -t$, tai $b_0 = x^k$;

Abiejais atvejais priskiriame $k := k + 1$ ir pereiti prie *Žingsnio 5.*

c) jei $f\left(x^{k+1}\right) \geq f\left(x^k\right)$, tai algoritmas yra baigiamas. Jei $\Delta = t$, tai $b_0 = x^{k+1}$; jei $\Delta = -t$, tai $a_0 = x^{k+1}$.

Rezultatas yra intervalas $[a_0; b_0]$, kuris ir yra pradinis intervalas L_0.

Pavyzdys 6.3

Intervalo dalijimo pusiau metodas

Algorimas

Žingsnis 1. Rasti pradinį intervalą $L_0 = [a_0; b_0]$ ir apibrėžti norimą tikslumą skaičiumi $t > 0$.

Žingsnis 2. Apibrėžti $k = 0$.

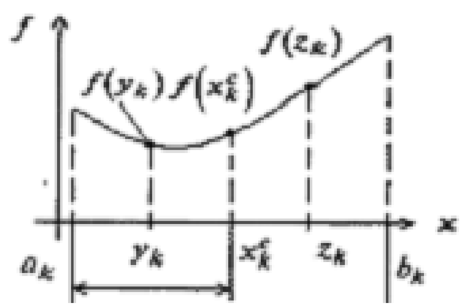
Žingsnis 3. Apskaičiuoti vidurio tašką $x_k^c = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, $|L_{2k}| = b_k - a_k$, $f\left(x_k^c\right)$.

Žingsnis 4. Apskaičiuoti taškus: $y_k = a_k + \dfrac{|L_{2k}|}{4}$, $z_k = b_k - \dfrac{|L_{2k}|}{4}$, $f\left(x_k\right)$, $f\left(z_k\right)$.

Taškai y_k, x_k^c, z_k dalija intervalą $[a_k; b_k]$ į keturias lygias dalis.

Žingsnis 5. Palyginti reikšmes $f\left(y_k\right)$ ir $f\left(x_k^c\right)$:

a) jei $f\left(y_k\right) < f\left(x_k^c\right)$, tai pašalinus intervalą $\left(x_k^c; b_k\right]$ priskirti $b_{k+1} = x_k^c, a_{k+1} = a_k$. Naujojo intervalo vidurio tašku tampa $y_k : x_{k+1}^c = y_k$.



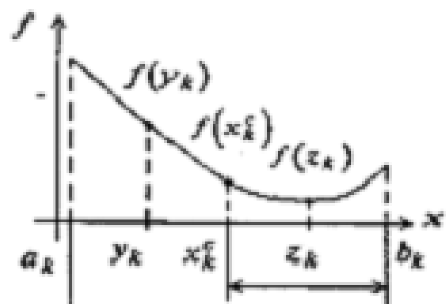
Pereiti prie *Žingsnio 7.*

b) jei $f\left(y_k\right) \geq f\left(x_k^c\right)$,tai pereiti prie *Žingsnio 6.*

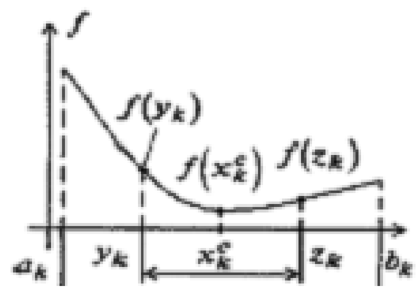
Žingsnis 6. Palyginti reikšmes $f\left(z_k\right)$ ir $f\left(x_k^c\right)$:

a) jei $f\left(z_k\right) < f\left(x_k^c\right)$, tai pašalinus intervalą $\left[a_k; x_k^c\right)$ priskirti $a_{k+1} = x_k^c, b_{k+1} = b_k$.. Naujojo intervalo vidurio tašku tampa $z_k : x_{k+1}^c = z_k$.

Pereiti prie *Žingsnio 7.*



b) jei $f\left(y_k\right) \geq f\left(x_k^c\right)$,tai pašalinus intervalus$\left[a_k; y_k\right), \left(z_k; b_k\right]$ priskirti $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = z_k$. Naujojo intervalo vidurio tašku lieka $x_k^c : x_{k+1}^c = x_k^c$.



Žingsnis 7. Apskaičiuoti $\left|L_{2(k+1)}\right| = \left|b_{k+1} - a_{k+1}\right|$ ir patikrinti algoritmo pabaigos sąlygas:

a) jei $\left|L_{2(k+1)}\right| < l$, tai algorimas baigiamas ir $x^* \in L_{2(k+1)} = \left[a_{k+1}; b_{k+1}\right]$. Minimumo apytislę reikšmę galima imti šio intervalo vidurio tašką $x^* = x_{k+1}^c$;

b) jei $\left|L_{2(k+1)}\right| \geq l$, tai priskirti $k := k + 1$ ir pereiti prie Žingsnio 4.

Pavyzdys 6.4