Optimizavimo metodai. Paskaitų konspektas

Rimantas Grigutis

5 paskaita. Sąlyginio ekstremumo radimas(apribojimai -lygybės ir nelygybės)

Uždavinys

Duota dukart tolydžiai diferencijuojama tikslo funkcija $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ ir galimų reikšmių sritį X lygybėmis apribojančios funkcijos $g_j(x) = g_j(x_1, ..., x_n)$, $j = 1, ..., p$.

Rasti tikslo funkcijos $f(x)$ lokalius ekstremumus x^*aibėje X:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \qquad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x), \qquad (4.1)$$

čia $X = \left\{ x | \begin{array}{c} g_j(x) = 0, j = 1, ..., m; m < n \\ g_j(x) \leq 0, j = m+1, ..., p \end{array} \right\}$.

Sprendimo strategija

Teiginys 5.1(pirmosios eilės būtinos ekstremumo sąlygos)

Jei taškas x^* yra (4.1) uždavinio lokalus ekstremumas, tai egzistuoja toks skaičius $\lambda_0^* \geq 0$ ir ne visi lygūs nuliui tokie skaičiai, $\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*$, kad

(1) $\dfrac{dL(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{dx_i} = 0, \qquad i = 1, ..., n;$

(2) $\begin{array}{c} g_j(x^*) = 0, j = 1, ..., m; m < n \\ g_j(x^*) \leq 0, j = m+1, ..., p \end{array}$

(3) sąlyginio minimumo sąlyga:

$$\lambda_j^* \geq 0, \qquad j = m+1, ..., p$$

(sąlyginio maksimumo sąlyga: $\lambda_j^* \leq 0, \qquad j = m+1, ..., p$);

(4) papildoma griežtumo sąlyga(H.W.Kuhn, A.W.Tucker)

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = 0, \qquad j = m+1, ..., p.$$

Jeigu aktyvių apribojimų funkcijų(kai $g_j(x^*) = 0$) gradientai taške x^* tiesiškai nepriklausomi (tenkina reguliarumo sąlygą), tai $\lambda_0^* \neq 0$.

Pastaba 5.2

Kai $\lambda_0^* \neq 0$ yra teisingi šie teiginiai:

(1) Jei funkcijos $f(x), g_j(x), j = m+1, ..., p$ yra iškiliosios, o $g_j(x), j = 1, ..., m$ yra tiesinės , tai Teiginio 5.1 sąlygos yra ir pakankamos globalaus minimumo sąlygos.

(2) Jei funkcijos $-f(x), g_j(x), j = 1, ..., m$ yra iškiliosios, o $g_j(x), j = 1, ..., m$ yra tiesinės, tai Teiginio 5.1 sąlygos yra ir pakankamos globalaus maksimumo sąlygos.

Abejais atvejais galimų sprendinių aibė X yra iškila.

Teiginys 5.3 (pirmosios eilės pakankamos ekstremumo sąlygos)

Tegu taškas (x^*, λ^*) tenkina Teiginio 5.1 sąlygas kai $\lambda_0^* \neq 0$ ir aktyvių apribojimų(tiek nelygybių, tiek lygybių apribojimų) taške x^* yra n(tiek kiek kintamųjų). Jei $\lambda_j^* > 0$ su visais $j \in J_a$, tai taškas x^* yra lokalaus minimumo taškas. Jei $\lambda_j^* < 0$ su visais $j \in J_a$, tai taškas x^* yra lokalaus maksimumo taškas. Čia J_a - aktyvių indeksų aibė.

Teiginys 5.4 (antrosios eilės būtinos ekstremumo sąlygos)

Jei x^* yra reguliarusis minimumas(maksimumas) ir (x^*, λ^*) tenkina Teiginio 5.1 sąlygas, tai

$$d^2L(x^*, \lambda^*) \geq 0 \qquad (d^2L(x^*, \lambda^*) \leq 0)$$

su visais tokiais $dx \in \mathbf{R}^n$, kad

$$\begin{array}{c} dg_j(x^*) = 0, \qquad j = 1, ..., m \qquad j \in J_a \;, \qquad \lambda_j^* > 0 \; \left(\lambda_j^* < 0\right); \\ dg_j(x^*) \leq 0, \qquad j \in J_a \;, \qquad \lambda_j^* = 0 \;; \end{array}$$

Teiginys 5.5 (antrosios eilės pakankamos ekstremumo sąlygos)

Jei (x^*, λ^*) tenkina Teiginio 5.1 sąlygas kai $\lambda_0^* \neq 0$ ir

$$d^2L(x^*, \lambda^*) > 0 \qquad (d^2L(x^*, \lambda^*) < 0)$$

su visais tokiais nenuliniais $dx \in \mathbf{R}^n$, kad

$$dg_j(x^*) = 0, \qquad j = 1,...,m \qquad j \in J_a \;, \qquad \lambda_j^* > 0 \;\left(\lambda_j^* < 0\right);$$
$$dg_j(x^*) \leq 0, \qquad j \in J_a \;, \qquad \lambda_j^* = 0 \;;$$

tai taškas x^* yra lokalaus minimumo(maksimumo) taškas.

Algoritmas

1 žingsnis. Sudarome Lagrange funkciją:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x).$$

*2 žingsnis.*Sudarome būtinas pirmosios eilės ekstremumo sąlygas:

a) $\dfrac{dL(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{dx_i} = 0, \qquad i = 1,...,n;$

b) $\begin{array}{c} g_j(x^*) = 0, \;\; j = 1,...,m; \\ g_j(x^*) \leq 0, \;\; j = m+1,...,p \end{array}$

c) $\lambda_j^* \geq 0$, $j = m+1,...,p$ (minimumui)
$\lambda_j^* \leq 0$, $j = m+1,...,p$ (maksimumui);
d) $\lambda_j^* g_j(x^*) = 0$, $j = m+1,...,p$.

3 žingsnis. Sistemą išsprendžiame dviem atvejais:
1) $\lambda_0^* = 0$;
2) $\lambda_0^* \neq 0$ (šiuo atveju, padalijus iš λ_0^*, santykį $\frac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ pakeičiame λ_j^*).

Išsprendus šią sistemą rasime sąlyginai stacionarius taškus x^*, tarp kurių reiktų išskirti tuos, kurie gauti, kai $\lambda_0^* \neq 0$(jie gali būti reguliariais ekstremumo taškais). Abejais atvejais reiktų pradėti nuo 2^{p-m} sąlygos d) nagrinėjimo atvejų.

4 žingsnis. 3 žingsnyje rastiems taškams tikriname pakankamas pirmosios ir antrosios eilės ekstremumo sąlygas.

Dėl pirmosios eilės ekstremumo sąlygų:

a) nustatyti aktyvių(tiek nelygybių, tiek lygybių) apribojimų taške x^* skaičių l;

b) Jei $l = n$ ir $\lambda_j^* > 0$ su visais $j \in J_a$, tai x^* yra lokalaus minimumo taškas.

Jei $l = n$ ir $\lambda_j^* < 0$ su visais $j \in J_a$, tai x^* yra lokalaus maksimumo taškas.

Jei $l < n$ ir atitinkami Lagrange daugikliai netenkina pirmosios eilės pakankamų sąlygų, tai tikrinti antrosios eilės pakankamas sąlygas.

Dėl antrosios eilės ekstremumo sąlygų:

a) užrašyti klasikinės L:agrange funkcijos antrąjį diferencialą:

$$d^2L(x^*,\lambda^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{d^2L(x^*,\lambda^*)}{dx_i dx_j}dx_i dx_j \ ;$$

b) užrašyti aktyvių apribojimų pirmųjų diferencialų apribojimų sąlygas:

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n}\frac{dg_j(x^*)}{dx_i}dx_i = 0, \qquad j = 1,...,m;\ j \in J_a \ , \qquad \lambda_j^* > 0\ \left(\lambda_j^* < 0\right);$$

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n}\frac{dg_j(x^*)}{dx_i}dx_i \le 0, \qquad j \in J_a \ , \qquad \lambda_j^* = 0 \ ;$$

c) Nagrinėti $d^2L(x^*,\lambda^*)$ ženklą su nenuliniais dx, tenkinančiais b) sąlygas:
jei $d^2L(x^*,\lambda^*) > 0$, tai x^* yra lokalaus minimumo taškas;
jei $d^2L(x^*,\lambda^*) < 0$, tai x^* yra lokalaus maksimumo taškas.

Jei pakankamos pirmosios ir antrosios eilės sąlygos netenkinamos, tai patikrinti būtinas antrosios eilės sąlygas(teiginys 5.4) ir jei jos yra tenkinamos atlikti papildomą tyrimą, jei netenkinamos, tai x^* nėra ekstremumo taškas.

5 žingsnis. Apskaičiuoti tikslo funkcijos reikšmes lokalaus ekstremumo taškuose.

Pavyzdys 5.6