.

Optimizavimo metodai. Paskaitų konspektas

Rimantas Grigutis

4 paskaita. Sąlyginio ekstremumo radimas(apribojimai - nelygybės)

Uždavinys

Duota dukart tolydžiai diferencijuojama tikslo funkcija $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ ir galimų reikšmių sritį X lygybėmis apribojančios funkcijos $g_j(x) = g_j(x_1, ..., x_n), j = 1, ..., m$.

Rasti tikslo funkcijos $f(x)$ lokalius ekstremumus x^*aibėje X:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \qquad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x), \qquad (4.1)$$

čia $X = \{x | g_j(x) = g_j(x_1, ..., x_n) \leq 0, j = 1, ..., m\}$.

Sprendimo strategija

Teiginys 4.1(pirmosios eilės būtinos ekstremumo sąlygos)

Jei taškas x^* yra (4.1) uždavinio lokalus ekstremumas, tai egzistuoja toks skaičius $\lambda_0^* \geq 0$ ir ne visi lygūs nuliui tokie skaičiai, $\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*$, kad

(1) $\dfrac{dL(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{dx_i} = 0, \qquad i = 1, ..., n; \qquad (4.2)$

(2) $g_j(x^*) \leq 0, \qquad j = 1, ..., m;$

(3) sąlyginio minimumo sąlyga:

$$\lambda_j^* \geq 0, \qquad j = 1, ..., m$$

(sąlyginio maksimumo sąlyga: $\lambda_j^* \leq 0, \qquad j = 1, ..., m$);

(4) papildoma griežtumo sąlyga(H.W.Kuhn, A.W.Tucker)

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = 0, \qquad j = 1, ..., m.$$

Jeigu aktyvių apribojimų funkcijų(kai $g_j(x^*) = 0$) gradientai taške x^* tiesiškai nepriklausomi (tenkina reguliarumo sąlygą), tai $\lambda_0^* \neq 0$.

Pastaba 4.2

Kai $\lambda_0^* \neq 0$ yra teisingi šie teiginiai:

(1) Jei funkcijos $f(x), g_j(x), j = 1, ..., m$ yra iškiliosios, tai Teiginio 4.1 sąlygos yra ir pakankamos globalaus minimumo sąlygos.

(2) Jei funkcijos $-f(x), g_j(x), j = 1, ..., m$ yra iškiliosios, tai Teiginio 4.1 sąlygos yra ir pakankamos globalaus maksimumo sąlygos.

Abejais atvejais galimų sprendinių aibė X yra iškila.

Teiginys 4.3 (pirmosios eilės pakankamos ekstremumo sąlygos)

Tegu taškas (x^*, λ^*) tenkina Teiginio 4.1 sąlygas kai $\lambda_0^* \neq 0$ ir aktyvių apribojimų taške x^* yra n(tiek kiek kintamųjų). Jei $\lambda_j^* > 0$ su visais $j \in J_a$, tai taškas x^* yra lokalaus minimumo taškas. Jei $\lambda_j^* < 0$ su visais $j \in J_a$, tai taškas x^* yra lokalaus maksimumo taškas. Čia J_a - aktyvių indeksų aibė.

Teiginys 4.4 (antrosios eilės būtinos ekstremumo sąlygos)

Jei x^* yra reguliarusis minimumas(maksimumas) ir (x^*, λ^*) tenkina Teiginio 4.1 sąlygas, tai

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) \geq 0 \qquad (d^2 L(x^*, \lambda^*) \leq 0)$$

su visais tokiais $dx \in \mathbf{R}^n$, kad

$$\begin{gathered} dg_j(x^*) = 0, \qquad j \in J_a, \qquad \lambda_j^* > 0 \; \left(\lambda_j^* < 0\right); \\ dg_j(x^*) \leq 0, \qquad j \in J_a, \qquad \lambda_j^* = 0. \end{gathered}$$

Teiginys 4.5 (antrosios eilės pakankamos ekstremumo sąlygos)

Jei (x^*, λ^*) tenkina Teiginio 4.1 sąlygas kai $\lambda_0^* \neq 0$ ir

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) \geq 0 \qquad (d^2 L(x^*, \lambda^*) \leq 0)$$

su visais tokiais nenuliniais $dx \in \mathbf{R}^n$, kad

$$\begin{gathered} dg_j(x^*) = 0, \qquad j \in J_a, \qquad \lambda_j^* > 0 \; \left(\lambda_j^* < 0\right); \\ dg_j(x^*) \leq 0, \qquad j \in J_a, \qquad \lambda_j^* = 0. \end{gathered}$$

tai taškas x^* yra lokalaus minimumo(maksimumo) taškas.

Algoritmas

1 žingsnis. Sudarome Lagrange funkciją:

$$L\left(x,\lambda_0,\lambda\right)=\lambda_0 f\left(x\right)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j\left(x\right).$$

*2 žingsnis.*Sudarome būtinas pirmosios eilės ekstremumo sąlygas:

a)$\dfrac{dL\left(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*\right)}{dx_i}=0, \qquad i=1,...,n;$

b) $g_j\left(x^*\right)\leq 0, \qquad j=1,...,m;$

c) $\lambda_j^*\geq 0, \qquad j=1,...,m$ (minimumui)

$\lambda_j^*\leq 0, \qquad j=1,...,m$ (maksimumui);

d) $\lambda_j^* g_j\left(x^*\right)=0, \qquad j=1,...,m.$

3 žingsnis. Sistemą išsprendžiame dviem atvejais:

1) $\lambda_0^*=0$;

2) $\lambda_0^*\neq 0$ (šiuo atveju, padalijus iš λ_0^*, santykį $\frac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ pakeičiame λ_j^*).

Išsprendus šią sistemą rasime sąlyginai stacionarius taškus x^*, tarp kurių reiktų išskirti tuos, kurie gauti, kai $\lambda_0^*\neq 0$(jie gali būti reguliariais ekstremumo taškais). Abejais atvejais reiktų pradėti nuo 2^n sąlygos d) nagrinėjimo atvejų.

4 žingsnis. 3 žingsnyje rastiems taškams tikriname pakankamas pirmosios ir antrosios eilės ekstremumo sąlygas.

Dėl pirmosios eilės ekstremumo sąlygų:

a) nustatyti aktyvių apribojimų taške x^* skaičių l;

b) Jei $l=n$ ir $\lambda_j^*>0$ su visais $j\in J_a$, tai x^* yra lokalaus minimumo taškas.

Jei $l=n$ ir $\lambda_j^*<0$ su visais $j\in J_a$, tai x^* yra lokalaus maksimumo taškas.

Jei $l<n$ ir atitinkami Lagrange daugikliai netenkina pirmosios eilės pakankamų sąlygų, tai tikrinti antrosios eilės pakankamas sąlygas.

Dėl antrosios eilės ekstremumo sąlygų:

a) užrašyti klasikinės L:agrange funkcijos antrąjį diferencialą:

$$d^2L\left(x^*,\lambda^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{d^2L\left(x^*,\lambda^*\right)}{dx_i dx_j}dx_i dx_j\ ;$$

b) užrašyti aktyvių apribojimų pirmųjų diferencialų apribojimų sąlygas:

$$dg_j\left(x^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{dg_j\left(x^*\right)}{dx_i}dx_i=0, \qquad j\in J_a\ , \qquad \lambda_j^*>0\ \left(\lambda_j^*<0\right);$$

$$dg_j\left(x^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{dg_j\left(x^*\right)}{dx_i}dx_i\leq 0, \qquad j\in J_a\ , \qquad \lambda_j^*=0\ ;$$

c) Nagrinėti $d^2L(x^*, \lambda^*)$ ženklą su nenuliniais dx, tenkinančiais b) sąlygas:
jei $d^2L(x^*, \lambda^*) > 0$, tai x^* yra lokalaus minimumo taškas;
jei $d^2L(x^*, \lambda^*) < 0$, tai x^* yra lokalaus maksimumo taškas.

Jei pakankamos pirmosios ir antrosios eilės sąlygos netenkinamos, tai patikrinti būtinas antrosios eilės sąlygas(teiginys 4.4) ir jei jos yra tenkinamos atlikti papildomą tyrimą, jei netenkinamos, tai x^* nėra ekstremumo taškas.

5 žingsnis. Apskaičiuoti tikslo funkcijos reikšmes lokalaus ekstremumo taškuose.

Pavyzdys 4.6.