Optimizavimo metodai. Paskaitų konspektas

Rimantas Grigutis

3 paskaita. Sąlyginio ekstremumo radimas(apribojimai - lygtys)

Uždavinys

Duota dukart tolydžiai diferencijuojama tikslo funkcija $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ ir galimų reikšmių sritį X lygybėmis apribojančios funkcijos $g_j(x) = g_j(x_1, ..., x_n)$, $j = 1, ..., m$.

Rasti tikslo funkcijos $f(x)$ lokalius ekstremumus x^*aibėje X:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \qquad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x), \qquad (3.1)$$

čia $X = \{x | g_j(x) = g_j(x_1, ..., x_n) = 0, j = 1, ..., m; m < n\}$.

Apibrėžimas 3.1

Funkcija

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

vadinama Lagrange funkcija, o skaičiai $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$ - Lagrange daugikliais.

Funkcija

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

vadinama klasikine Lagrange funkcija.

Apibrėžimas 3.2 Lagrange funkcijos(klasikinės Lagrange funkcijos) gradientu vadinamas vektorius stulpelis

$$\nabla_x L(x, \lambda_0, \lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{dL(x, \lambda_0, \lambda)}{dx_1} \\ \vdots \\ \dfrac{dL(x, \lambda_0, \lambda)}{dx_n} \end{pmatrix},$$

$$\left[\nabla_x L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{dL(x, \lambda)}{dx_1} \\ \vdots \\ \dfrac{dL(x, \lambda)}{dx_n} \end{pmatrix} \right].$$

Apibrėžimas 3.3 Lagrange funkcijos(klasikinės Lagrange funkcijos) antros eilės diferencialu vadinama funkcija

$$d^2L(x,\lambda_0,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{d^2L(x,\lambda_0,\lambda)}{dx_i dx_j}dx_i dx_j \ ,$$
$$\left[d^2L(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{d^2L(x,\lambda)}{dx_i dx_j}dx_i dx_j\right].$$

Apibrėžimas 3.4 Apribojančių funkcijų $g_j(x)$ pirmuoju diferencialu vadinama funkcija

$$dg_j(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{dg_j(x)}{dx_i}dx_i,$$

čia $j=1,...,m$.

Sprendimo strategija

Teiginys 3.5(pirmosios eilės būtinos ekstremumo sąlygos)

Jei taškas x^* yra (3.1) uždavinio lokalus ekstremumas, tai egzistuoja ne visi lygūs nuliui tokie skaičiai $\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_m^*$, kad

(1) $\dfrac{dL(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)}{dx_i}=0, \qquad i=1,...,n; \qquad (3.2)$

(2) $g_j(x^*)=0, \qquad j=1,...m.$

Jeigu beto visų gradientų sistema taške x^*

$$\nabla g_1(x^*),...,\nabla g_m(x^*)$$

tiesiškai nepriklausoma(sakoma, kad galioja reguliarumo sąlyga), tai $\lambda_0^*\neq 0$.

Pastaba 3.6

Reguliarumo sąlygos patikrimas yra neįmanomas, jei nėra žinomas taškas x^*. Todėl praktikoje nagrinėjami du atvejai $\lambda_0^*=0$ ir $\lambda_0^*\neq 0$. Jei $\lambda_0^*\neq 0$, tai sistemoje (3.2) $\lambda_0^*=1$ ir Lagrange funkcija tampa klasikine Lagrange funkcija, o pati sistema tampa tokia:

$$\frac{dL(x^*,\lambda^*)}{dx_i}=0, \qquad i=1,...,n;$$
$$g_j(x^*)=0, \qquad j=1,...m. \qquad (3.3)$$

Čia kintamųjų skaičius yra lygus lygčių skaičiui.

Teiginys 3.7(antrosios eilės ekstremumo būtinosios sąlygos)
Jei x^* yra reguliarusis minimumo(maksimumo) uždavinio(3.1) taškas ir (x^*, λ^*) yra sistemos (3.2) sprendinys, tai klasikinės Lagrange funkcijos antrosios eilės diferencialas taške (x^*, λ^*) yra neneigiamas(neteigiamas):

$$d^2L(x^*, \lambda^*) \geq 0 \qquad (d^2L(x^*, \lambda^*) \leq 0)$$

su visais tokiais $dx \in \mathbf{R}^n$, kad

$$g_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dg_j(x)}{dx_i} dx_i = 0, \qquad j = 1, ...m. \qquad (3.4)$$

Teiginys 3.8(pakankamos ekstremumo sąlygos)
Jei taškas (x^*, λ^*) yra sistemos (3.2) sprendinys ir šiame taške

$$d^2L(x^*, \lambda^*) > 0 \qquad (d^2L(x^*, \lambda^*) < 0)$$

su visais tokiais $dx \in \mathbf{R}^n$, kad

$$g_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dg_j(x^*)}{dx_i} dx_i = 0, \qquad j = 1, ...m.$$

tai taškas x^* yra uždavinio (3.1) lokalaus minimumo(maksimumo) taškas.

Pastaba 3.9 Pakankamos ir antrosios eilės būtinos sąlygos tikrinamos tuose taškuose, kurie tenkina arba sistemą (3.2), arba sistemą (3.3) (tai atvejai, kai $\lambda_0^* \neq 0$), nes praktikoje yra įdomūs būtent tie atvejai, kai Lagrange funkcijos išraiškoje yra pati funkcija $f(x)$.

Algoritmas

1 žingsnis. Sudarome Lagrange funkciją:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x),$$

*2 žingsnis.*Sudarome būtinas pirmosios eilės ekstremumo sąlygas:

$$\frac{dL\left(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*\right)}{dx_i} = 0, \qquad i = 1, ..., n;$$
$$g_j\left(x^*\right) = 0, \qquad j = 1, ...m.$$

3 žingsnis. Sistemą išsprendžiame dviem atvejais:

1) $\lambda_0^* = 0$;

2) $\lambda_0^* \neq 0$ (šiuo atveju, padalijus iš λ_0^*, santykį $\frac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ pakeičiame λ_j^*).

4 žingsnis. 3 žingsnyje rastiems taškams tikriname pakankamas ekstremumo sąlygas:

1) užrašome klasikinės Lagrange funkcijos antrosios eilės diferencialą taške $\left(x^*, \lambda^*\right)$:

$$d^2L\left(x^*, \lambda^*\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{d^2L\left(x^*, \lambda^*\right)}{dx_i dx_j}dx_i dx_j \ ;$$

2) užrašome sistemą (3.4) taške x* :

$$dg_j\left(x^*\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{dg_j\left(x^*\right)}{dx_i}dx_i = 0, \qquad j = 1, ...m;$$

3) Paskutinėje sistemoje išreiškiame bet kuriuos m diferencialus dx_j likusiais $(n-m)$ ir gautas išraiškas įrašome $d^2L\left(x^*, \lambda^*\right)$;

4) jei $d^2L\left(x^*, \lambda^*\right) > 0$, kai $dx \neq 0$, tai x^* - sąlyginis lokalusis minimumas. Jei $d^2L\left(x^*, \lambda^*\right) < 0$, kai $dx \neq 0$, tai x^* - sąlyginis lokalusis maksimumas.

Jeigu šios sąlygos netenkinamos, tai reikia patikrinti antrosios eilės būtinas ekstremumo sąlygas(teiginys 3.7). Jeigu jos tenkinamos, tai reikalingas papildomas tyrimas, jeigu ne, tai taške x^* nėra lokalaus ekstremumo.

5 žingsnis. Apskaičiuoti tikslo funkcijos reikšmes lokalaus ekstremumo taškuose.

Pavyzdys 3.10.

Pavyzdys 3.11.