Mažiausių kvadratų metodas

Paskaita. Rimantas Grigutis

Nagrinėjama nesuderinta tiesinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x + \cdots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ \cdots & \\ a_{m1}x + \cdots + a_{mn}x_n = & b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$A\mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T$$

čia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$,$\mathbf{B} = (b_1, ..., b_m) \in \mathbf{R}^m$.
Mažiausių kvadratų sprendiniu vadinamas toks vektorius $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{R}^n$, kad

$$\left\|\mathbf{B}^T - A\mathbf{v}_0^T\right\| = \min_{\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n} \left\|\mathbf{B}^T - A\mathbf{v}^T\right\|.$$

Tegu $A = (\mathbf{S}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{S}_n)$, $\mathbf{S}_i$- i-asis matricos A stulpelis. Tada turime

$$V = \left\{A\mathbf{v}^T \mid \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n\right\} = [\mathbf{S}_1, ..., \mathbf{S}_n] \subseteq \mathbf{R}_m.$$

Vektorių $\mathbf{B}$ išreikškime dviejų vektorių $\mathbf{C}$ ir $\mathbf{D}$ suma taip, kad

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$$

čia $\mathbf{C}^T \in V, \mathbf{D}^T \in V^\perp$.
Tada

$$\begin{gathered} \left\|\mathbf{B}^T - A\mathbf{v}^T\right\|^2 = \\ \left(\mathbf{C}^T - A\mathbf{v}^T + \mathbf{D}^T, \mathbf{C}^T - A\mathbf{v}^T + \mathbf{D}^T\right) = \\ \left(\mathbf{C}^T - A\mathbf{v}^T, \mathbf{C}^T - A\mathbf{v}^T\right) + 2\left(\mathbf{C}^T - A\mathbf{v}^T, \mathbf{D}^T\right) + \left(\mathbf{D}^T, \mathbf{D}^T\right) = \\ \left(\mathbf{C}^T - A\mathbf{v}^T, \mathbf{C}^T - A\mathbf{v}^T\right) + \left(\mathbf{D}^T, \mathbf{D}^T\right), \end{gathered}$$

čia $\left(\mathbf{C}^T - A\mathbf{v}^T, \mathbf{D}^T\right) = 0$, nes $\mathbf{C}^T - A\mathbf{v}^T \in V$, o $\mathbf{D}^T \in V^\perp$.
Aišku, kad mažiausias $\left\|\mathbf{B}^T - A\mathbf{v}_0^T\right\|$ yra lygus $\left(\mathbf{D}^T, \mathbf{D}^T\right)$:

$$\left\|\mathbf{B}^T - A\mathbf{v}_0^T\right\| = \min_{v\in R^n} \left\|\mathbf{B}^T - A\mathbf{v}^T\right\| = \left(\mathbf{D}^T, \mathbf{D}^T\right),$$

kai $\left(\mathbf{C}^T - A\mathbf{v}_0^T, \mathbf{C}^T - A\mathbf{v}_0^T\right) = 0$, t.y. $\mathbf{C}^T = A\mathbf{v}_0^T$.
Tada

$$\mathbf{B}^T = A\mathbf{v}_0^T + \mathbf{D}^T$$

ir

$$\mathbf{D}^T = \mathbf{B}^T - A\mathbf{v}_0^T \in V^\perp \subseteq \mathbf{R}_m,$$

Taigi $\mathbf{D}^T \in V^\perp \subseteq \mathbf{R}_m$ ir todėl

$$
\begin{gathered}
A^T \mathbf{D}^T = 0 \\
A^T \left(\mathbf{B}^T - A\mathbf{v}_0^T\right) = 0 \\
A^T \mathbf{B}^T = A^T A \mathbf{v}_0^T .
\end{gathered}
$$

Gavome, kad mažiausių kvadratų sprendinys $\mathbf{v}_0$ yra vienintėlis suderintos sistemos

$$
\left(A^T A\right) \mathbf{v}^T = A^T \mathbf{B}^T .
$$

Ši sistema vadinama *normaliąja* sistemos (1) *sistema*.

Pavyzdys. Norint rasti nesuderintos sistemos

$$
\left\{
\begin{array}{l}
2x + 5y = 9 \\
4x + 7y = 6 \\
3x + y = 1
\end{array}
\right. \tag{2}
$$

$$
\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

mažiausių kvadratų sprendinį, sprendžiame normaliąją sistemą

$$
\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 29 & 41 \\ 41 & 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 88 \end{pmatrix}
$$

$$
x = -\frac{233}{494}
$$

$$
y = \frac{707}{494}
$$

Sistemos (2) mažiausių kvadratų sprendinys yra $\left(-\frac{233}{494}; \frac{707}{494}\right)$.