

13 Paskaita. Kvadratinės formos

13.1 Apibrėžimas. Tegu K - kūnas, o $K[x]$ - polinomų žiedas virš kūno K . Žinome, kad šis polinomų žiedas yra komutatyvus, asociatyvus žiedas su vienetu. Šio žiedo pagrindu galima sukonstruoti polinomų žiedą $K[x][y] = K[x, y]$ virš $K[x]$. Tai polinomų su dviem kintamaisiais x ir y žiedas virš kūno K . Panašiai konstruojant galima apibrėžti polinomų su n kintamųjų x_1, \dots, x_n žiedą $K[x_1, \dots, x_n]$.

13.2 Apibrėžimas. Polinomas $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ vadinamas kvadratine forma, jeigu

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \\ \dots \\ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2,$$

kai $a_{ij} = a_{ji}$.

Matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ vadinama kvadratinės formos f matrica.

Ši matrica yra simetrinė: $A^T = A$.

Jeigu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, tai kvadratinę formą f galima reikšti taip: $f = X^T A X$

13.3 Apibrėžimas. Tegu turime du kintamųjų rinkinius: x_1, x_2, \dots, x_n ir y_1, y_2, \dots, y_n . Antrasis kintamųjų rinkinys vadinamas pirmojo tiesiniu keitiniu, jeigu $x_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \dots + c_{in}y_n$ su visais $i = 1, 2, \dots, n$.

Turime, kad $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = C Y$.

Matrica C vadinama kintamųjų keitimo matrica.

Atlikus minėtą kintamųjų keitinį kvadratinėje formoje f , turėsime kvadratinę formą g :

$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T AC) Y$, čia $(C^T AC)$ - vėl simetrinė matrica:

$$(C^T AC)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T A^T C = C^T AC.$$

13.4 Apibrėžimas. *Keitinys, kurio keitimo matrica yra neišsigimusi, vadinamas neišsigimusi.*

13.5 Teorema *Su kiekviena kvadratinė forma egzistuoja neišsigimęs toks keitinys, kad naujoji kvadratinė forma yra lygi*

$$c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \dots + c_n y_n^2.$$

Šis kvadratinės formos pavidalas vadinamas *kanonių pavidalu*. Nuo šiol kalbėsime tik apie realiąją kvadratinę.

13.6 Lema. *Neišsigimusi kintamųjų keitiniu nenulinę kvadratinę formą galima suvesti prie kvadratinės formos, kurios koeficientas prie pirmojo nežinomojo kvadrato nelygus nuliui.*

Įrodymas. Tegū $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$. Nagrinėsime kelis atvejus.

1 atvejis. Kai $a_{11} \neq 0$, tai nieko įrodinėti nereikia.

2 atvejis. Kai egzistuoja toks i ($i \neq 1$), kad $a_{ii} \neq 0$, tai atlikus keitinį

$$x_1 = y_i$$

$$x_2 = y_2$$

$$x_3 = y_3$$

...

$$x_i = y_1$$

...

$$x_n = y_n$$

gausime kvadratinę, kurios koeficientas $b_{11} \neq 0$.

3 atvejis. Kai $a_{ii} = 0$ su visais i , tai $\exists s, t$, kad $a_{st} \neq 0$. Pakeitę indeksaciją, galime pasiekti tai, kad $a_{12} \neq 0$. Atlikime kintamųjų keitinį:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} Y.$$

Tada naujos kvadratinės formos matrica bus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & O \\ 0 & 1 & O \\ O & E & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & B \\ a_{21} & a_{22} & C \\ B^T & C & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & O \\ 1 & 1 & O \\ O & E & \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & * \\ a_{21} & a_{22} & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & O \\ 1 & 1 & O \\ O & E & \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} + a_{22} + a_{21} & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

ir todėl $a_{11} + a_{21} + a_{22} + a_{21} = 2a_{12} \neq 0$.

Įrodyta.

13.5 Teoremos įrodymas. Tegū $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$. Įrodysime

indukcijos pagal n būbu. Galimi keli atvejai.

1 atvejis. Jeigu $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, tai įrodinėti nieko nereikia.

2 atvejis. Jeigu $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, tai pagal *lemą* kvadratinę formą f galima suvesti prie kvadratinės formos

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + \cdots + 2b_{1n}y_1y_n + h(y_2, \dots, y_n) = \\ b_{11} \left(y_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}y_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}y_n \right)^2 + \left(- \left(\frac{b_{12}}{b_{11}}y_2 + \cdots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}y_n \right)^2 + h(y_2, \dots, y_n) \right) \doteq$$

Atliekę keitinį

$$y_1 = z_1 - \frac{b_{12}}{b_{11}}z_2 - \cdots - \frac{b_{1n}}{b_{11}}z_n$$

$$y_2 = z_2$$

...

$$y_n = z_n$$

gauname kvadratinę formą

$$\doteq b_{11}z_1^2 + h_1(z_2, \dots, z_n) \doteq$$

Pagal indukcijos prielaidą kvadratinei formai $h_1(z_2, \dots, z_n)$ egzistuoja toks kei-

$$\text{tinys } \begin{pmatrix} z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} t_2 \\ \cdots \\ t_n \end{pmatrix}, \text{ kad } h_1(z_2, \dots, z_n) = c_2t_2^2 + \cdots + c_nt_n^2.$$

Tada atliekė keitinį $\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix}$, gausime
 $\stackrel{*}{=} b_{11}t_1^2 + c_2t_2^2 + \dots + c_nt_n^2 = c_1t_1^2 + c_2t_2^2 + \dots + c_nt_n^2$, čia $c_1 = b_{11}$.
 Įrodyta.

13.7 Pavyzdys. Kvadratinės formos $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_3$ kanoninės formos radimas.

Atlikę keitinį $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ turėsime tokią kvadratinę

formą $f = g(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1y_2$, o atlikę keitinį $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$

turėsime $f = z_1^2 + z_1z_2 = (z_1 + \frac{1}{2}z_2)^2 - \frac{1}{4}z_2^2$. Atlikus keitinį $t_1 = z_1 + \frac{1}{2}z_2, t_2 =$

$z_2, t_3 = z_3, t_4 = z_4$ arba $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$ turėsime $f =$

$t_1^2 - \frac{1}{4}t_2^2$.

13.8 Uždavinys. Kvadratinės formos $f = X^TAX$ rangą vadinamas matricos A rangas. Įrodykite, kad kvadratinės formos rangas yra lygus nenulinių matricos A tikrinių reikšmių skaičiui. **Įrodyti paliekama studentams** □

13.9 Teorema (inercijos dėsnis kvadratinėms formoms). Tegu kvadratinę formą $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$. dviem būdais galima suvesti prie kanoninio pavidalo:

$$\lambda_1y_1^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 - \lambda_{r+1}y_{r+1}^2 - \dots - \lambda_s y_s^2, \lambda_i > 0$$

$$\mu_1z_1^2 + \dots + \mu_p z_p^2 - \mu_{p+1}z_{p+1}^2 - \dots - \mu_t z_t^2, \mu_j > 0.$$

Tada $s = t$ ir $r = p$.

Be įrodymo.

13.10 Uždavinsys. Įrodykite: jeigu C - neišsigimusi matrica, o X - nenulinis stulpelis, tai $CX \neq 0$.

Įrodyti paliekama studentams□

13.11 Apibrėžimas. Realioji kvadratinė forma $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vadinama teigiamai apibrėžta, jeigu su visais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$

$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq 0$ ir $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

13.12 Teorema . Realioji kvadratinė forma $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yra teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai jos kanoninė forma yra lygi

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 .$$

Įrodymas. Tegų $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ – kintamųjų keitinys kvadratinę formą suvedantis prie kanoninio pavidalo $g(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$.

Matrica C – neišsigimusi, todėl $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Tegų $\lambda_i \leq 0$. Tada

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = g\left(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0\right) = \lambda_i \leq 0 , \text{ čia } \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} .$$

Taigi, kvadratinė forma f yra teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kada $\lambda_i > 0$ su visais $i = 1, 2, \dots, n$. Atlikę kintamųjų keitinį $y_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} z_i$ su visais i gausime reikiamą kvadratinės formos išraišką $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$.

Įrodyta.

Apibrėžimas. Tegų kvadratinės formos $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ matrica yra A . Tada determinantai

$$a_1 = |a_{11}|, a_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, a_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

vadinami kvadratinės formos f pagrindiniais minorais.

13.13 Teorema (SYLVESTER J.J. požymis). *Kvadratinė forma yra teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai visi jos pagrindiniai minorai yra teigiami.*
Be įrodymo.