## 12 Paskaita. Realieji kvaternionai ir posūkiai erdvėje

Nagrinėkime šias matricas virš kompleksinių skaičių:

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, K=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}.$$

**12.1 Apibrėžimas**. *Visų šių matricų tiesinių kombinacijų aibė*

$$\mathbf{H}=\{aE+bI+cJ+dK|a,b,c,d\in\mathbf{R}\}$$

*yra vektorinė erdvė virš* $\mathbf{R}$*, kurios vektoriai vadinamai realiais kvaternionais ( arba tiesiog kvaternionais).*

Taigi, kvaternionas $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{H}$ yra matrica :

$$\boldsymbol{\alpha}=aE+bI+cJ+dK=$$
$$a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+ib&c+id\\c-id&a-ib\end{pmatrix}.$$

Kvaternionų reiškimas matricomis yra patogus tuo, kad šiems vektoriams galima apibrėžti sandaugą. Pažiūrėkime į matricų $E,I,J,K$ daugybos lentelę:

| $\times$ | $E$ | $I$ | $J$ | $K$ |
|---|---|---|---|---|
| $E$ | $E$ | $I$ | $J$ | $K$ |
| $I$ | $I$ | $-E$ | $K$ | $-J$ |
| $J$ | $J$ | $-K$ | $-E$ | $I$ |
| $K$ | $K$ | $J$ | $-I$ | $-E$ |

Jeigu, kaip ir kompleksinių skaičių atveju, matricą $E$ žymėsime *1*, o matricos $I,J,K$, kurias žymėsime atitinkamai $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$, kvaternionų aibėje $\mathbf{H}$ bus trimis menamaisiais vienetais*:* $\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-\mathbf{1}$. Visa daugybos lentelė yra:

| $\times$ | $\mathbf{i}$ | $\mathbf{j}$ | $\mathbf{k}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{i}$ | $-\mathbf{1}$ | $\mathbf{k}$ | $-\mathbf{j}$ |
| $\mathbf{j}$ | $-\mathbf{k}$ | $-\mathbf{1}$ | $\mathbf{i}$ |
| $\mathbf{k}$ | $\mathbf{j}$ | $-\mathbf{i}$ | $-\mathbf{1}$ |

.

Dabar kvaternioną $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{H}$ galime užrašyti ir taip:

$$\boldsymbol{\alpha} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

**12.2. Apibrėžimas.** *Jei kvaternionas* $\boldsymbol{\alpha} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, *tai skaičius* $a$ *vadinamas skaliarine kvaterniono* $\boldsymbol{\alpha}$ *dalimi,* o $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ - *vektorine kvaterniono* $\boldsymbol{\alpha}$ *dalimi. Kvaternionas, kurio skaliarinė dalis lygi 0, vadinamas vektoriumi.* Kvaternionas $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ *vadinamas jungtiniu* $\boldsymbol{\alpha}$..

**12.3. Apibrėžimas**. *Vektorių sistema* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *vadinama dešinine sistema, jei jos daugybos lentelė yra*

| $\times$ | $\mathbf{u}$ | $\mathbf{v}$ | $\mathbf{w}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{u}$ | $-\mathbf{1}$ | $\mathbf{w}$ | $-\mathbf{v}$ |
| $\mathbf{v}$ | $-\mathbf{w}$ | $-\mathbf{1}$ | $\mathbf{u}$ |
| $\mathbf{w}$ | $\mathbf{v}$ | $-\mathbf{u}$ | $-\mathbf{1}$ |

Pagal 14.3 Apibrėžimą turime, kad vektorių sistema $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ yra dešininė sistema.

Sudauginkime du vektorius $\mathbf{u}_1 = b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ ir $\mathbf{u}_2 = b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$ :

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 = (b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k})(b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) = \\ -b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (c_1d_2 - d_1c_2)\mathbf{i} + (d_1b_2 - b_1d_2)\mathbf{j} + (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{k} = \\ -\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2,\end{gathered}$$

čia $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$ vektorių $\mathbf{u}_1$ ir $\mathbf{u}_2$ skaliarinė sandauga, o $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ vektorių $\mathbf{u}_1$ ir $\mathbf{u}_2$ vektorinė sandauga.

**Dalyba kvaternionų aibėje.**

Tegu $\boldsymbol{\alpha} = a + \mathbf{u}$ ir $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = a - \mathbf{u}$, čia $\mathbf{u}$ - kvaterniono $\boldsymbol{\alpha}$ vektorinė dalis. Sudauginus $\boldsymbol{\alpha}$ ir $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ turėsime

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{\alpha}} = (a + \mathbf{u})(a - \mathbf{u}) = a^2 + \mathbf{u}a - a\mathbf{u} - \mathbf{u}^2 = a^2 - \mathbf{u}^2 = \\ a^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \mathbf{u} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.\end{gathered}$$

Turime, kad $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{o}$ tada ir tik tada, kai $\boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{\alpha}} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$. Todėl

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}}}{\boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{\alpha}}} = 1$$

ir

$$\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{\alpha}}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}.$$

**12.4 Išvada.** Kvaternionų aibėje $\mathbf{H}$ apibrėžti visi skaičiams būdingi veiksmai: sudėtis, atimtis, daugyba, dalyba. Šių veiksmų atžvilgiu galioja visos skaičiams būdingos savybės, išskyrus vieną - kvaternionų aibėje negalioja sandaugos komutatyvumas, pvz. $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}\neq\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}$.

**Erdvės $\mathbf{R}^3$ posūkiai.**

**12.5 Teorema**. *Jeigu* $\mathbf{u}$ *yra vektorius, tai* $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ *yra vektorius su visais nenuliniais* $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{H}$.

**Įrodymas.** Jei $\boldsymbol{\alpha} = a+\mathbf{v}$, tai $\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{\alpha}}}(a-\mathbf{v})$. Todėl

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}\boldsymbol{\alpha}^{-1}=\frac{1}{\boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{\alpha}}}(a+\mathbf{v})\,\mathbf{u}\,(a-\mathbf{v}) = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{\alpha}}}(a\mathbf{u}+\mathbf{v}\mathbf{u})\,(a-\mathbf{v}) = \\ \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{\alpha}}}\left(a^2\mathbf{u}-a\mathbf{u}\mathbf{v}+a\mathbf{v}\mathbf{u}-\mathbf{v}\mathbf{u}\mathbf{v}\right).\end{gathered}$$

Čia skliaustuose yra vektorius, nes

$$a^2\mathbf{u}$$

yra vektorius,

$$\begin{gathered}-a\mathbf{u}\mathbf{v}+a\mathbf{v}\mathbf{u} = \\ -a(\mathbf{u}\mathbf{v}-\mathbf{v}\mathbf{u}) = -a(-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\times\mathbf{u}) = \\ 2(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\end{gathered}$$

yra vektorius, ir

$$\begin{gathered}\mathbf{v}\mathbf{u}\mathbf{v} = \\ (\mathbf{v}\mathbf{u})\,\mathbf{v} = (-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,\mathbf{v} = -(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}+(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,\mathbf{v} = \\ -(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}+(-(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}+(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{v}) = \\ -(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}-(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\end{gathered}$$

yra vektorius.

**Įrodyta.**

Funkcija $\mathcal{A}_\alpha(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ yra tiesinė transformacija erdvėje $\mathbf{R}^3$ su visais $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{o}$. Pastebėkime, kad $\mathcal{A}_{a\alpha} = \mathcal{A}_\alpha$ su visais realiais $a$ :

$$\mathcal{A}_{a\alpha}(\mathbf{u}) = a\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}(a\boldsymbol{\alpha})^{-1} = a\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}a^{-1}\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \mathcal{A}_{\alpha}(\mathbf{u}).$$

**12.6 Teorema**. $\mathcal{A}_{\alpha}$ *yra ortogonalioji transformacija.*

**Įrodymas**. Tegu $\mathbf{u}$ ir $\mathbf{v}$ - vektoriai. Tada iš vienos pusės

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{uv})\boldsymbol{\alpha}^{-1} = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}\boldsymbol{\alpha}^{-1})(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}^{-1}) = -(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}\boldsymbol{\alpha}^{-1})\cdot(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}^{-1}) + (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}\boldsymbol{\alpha}^{-1})\times(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}^{-1}),$$

čia pirmasis dėmuo yra skaliarinė kvaterniono dalis( skaičius).
Iš kitos pusės

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{uv})\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \boldsymbol{\alpha}(-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{v})\boldsymbol{\alpha}^{-1} = -\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\boldsymbol{\alpha}^{-1} + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\boldsymbol{\alpha}^{-1} =$$
$$-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\boldsymbol{\alpha}^{-1},$$

čia pirmasis dėmuo yra skaliarinė kvaterniono dalis( skaičius).
Iš čia turime, kad

$$(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}\boldsymbol{\alpha}^{-1})\cdot(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}^{-1}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$
$$\mathcal{A}_{\alpha}(\mathbf{u})\cdot\mathcal{A}_{\alpha}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

**Įrodyta**.

**12.7 Teorema**. *Vektorių sistemų* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ir $\mathcal{A}_{\alpha}(\mathbf{u}), \mathcal{A}_{\alpha}(\mathbf{v}), \mathcal{A}_{\alpha}(\mathbf{w})$ *orientacijos yra vienodos.*

**Įrodymas** paliekamas skaitytojui.

Tegu $\boldsymbol{\alpha} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = a + \mathbf{u}_0$ yra ilgio 1 kvaternionas, t.y.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + \|\mathbf{u}_0\|^2 = 1$$

Tada egzistuoja toks kampas $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$, kad

$$\begin{cases} a = \cos\varphi \\ \|\mathbf{u}_0\| = \sin\varphi \end{cases}$$

ir

$$\boldsymbol{\alpha} = \cos\boldsymbol{\varphi} + \frac{\mathbf{u}_0}{\|\mathbf{u}_0\|}\sin\varphi = \cos\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{u}\sin\varphi,$$

čia $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}_0}{\|\mathbf{u}_0\|}$ yra ilgio 1 vektorius, t.y. $\|\mathbf{u}\| = 1$.

**12.8 Teorema.** *Jeigu* $\mathbf{v}$ *yra ilgio 1 vektorius statmenas* $\mathbf{u}$**,** o $\mathbf{w} = \mathbf{uv} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, *tai vektorių sistema* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *yra ortonormuota dešininė sistema , ir* $\mathcal{A}_\alpha$ *yra posūkio kampu* $2\varphi$ *apie vektorių* $\mathbf{u}$ *tiesinė transformacija.*

**Įrodymas.** Įrodymą, kad *vektorių sistema* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *yra ortonormuota dešininė sistema* paliekame skaitytojui. Parodysime, kad $\mathcal{A}_\alpha$ *yra posūkio kampu* $2\varphi$ *apie vektorių* $\mathbf{u}$ *tiesinė transformacija*

$$\mathcal{A}_\alpha(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}\boldsymbol{\alpha}^{-1} = (\cos\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{u}\sin\varphi)\,\mathbf{u}\,(\cos\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{u}\sin\varphi) =$$
$$(\mathbf{u}\cos\boldsymbol{\varphi} - \sin\varphi)(\cos\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{u}\sin\varphi) = \mathbf{u}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{A}_\alpha(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}^{-1} = (\cos\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{u}\sin\varphi)\,\mathbf{v}\,(\cos\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{u}\sin\varphi) =$$
$$(\mathbf{v}\cos\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{w}\sin\varphi)(\cos\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{u}\sin\varphi) = \mathbf{v}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + \mathbf{w}\,(2\sin\varphi\cos\varphi) =$$
$$\mathbf{v}\,(\cos 2\varphi) + \mathbf{w}\,(\sin 2\varphi) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{A}_\alpha(\mathbf{w}) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{w}\boldsymbol{\alpha}^{-1} = (\cos\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{u}\sin\varphi)\,\mathbf{w}\,(\cos\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{u}\sin\varphi) =$$
$$(\mathbf{w}\cos\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{v}\sin\varphi)(\cos\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{u}\sin\varphi) = \mathbf{v}\,(-\sin 2\varphi) + \mathbf{w}\,(\cos 2\varphi) =$$
$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2\varphi \\ \cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

Gavome, kad $\mathcal{A}_\alpha$ matrica bazėje $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ yra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ 0 & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

Bet tai ir yra posūkio kampu $2\varphi$ apie vektorių $\mathbf{u}$ tiesinės transformacijos matrica.

**Įrodyta**.

**12.9 Pavyzdys**. Tegu $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$. Tai ilgio 1 kvaternionas, kurio realioji dalis lygi $a = \frac{1}{2}$, o vektorinė dalis yra vektorius $\mathbf{u}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k} = \frac{1}{2}(1;1;1)$. Tada $\|\mathbf{u}_0\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ir sistemos

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \cos\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\varphi \end{cases}$$

sprendinys intervale $0 \le \varphi \le \pi$ yra $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Normavę vektorių $\mathbf{u}_0$ gausime $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}_0}{\|\mathbf{u}_0\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1;1;1)$.

Tegu $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1;-1;0)$ normuotas vektorius ortogonalus vektoriui $\mathbf{u}$. Tada

$$\mathbf{w} = \mathbf{uv} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6}i + \frac{\sqrt{6}}{6}j - \frac{\sqrt{6}}{3}k = \frac{\sqrt{6}}{6}(1;1;-2)$$

Taigi, $\mathcal{A}_\alpha$ yra ortogonali transformacija, kuri erdvėje esnačius vektorius pasuka $2\varphi = \frac{2\pi}{3}$ kampu vektoriaus $\mathbf{u}$ kryptimi nuo vektoriaus $\mathbf{v}$ link vektoriaus $\mathbf{w}$.