

## 11 Paskaita. Ortogonalios transformacijos Euklido erdvėje $\mathbf{R}^3$ ir jų matricos

Nagrinėjama Euklido erdvė  $\mathbf{R}^3$  su standartine skaliarine sandauga:

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

**11.1 Apibrėžimas.** Transformacija  $\mathcal{B} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  vadinamas *ortogonalia transformacija*, jei  $\mathcal{B}(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ .

Žinome, kad skaliarinę sandaugą Euklido erdvėje  $\mathbf{R}^3$  galima reikšti matricų sandauga:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{u}^T.$$

Vektorių ir jų transformacijų vaizdų reiškimą koordinatiniais stulpeliais galima pavaizduoti tokia diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathbf{u}) & = & \mathbf{w} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B\mathbf{u}^T & = & \mathbf{w}^T \end{array}.$$

Apatinę lygybę galima parašyti išskleistu pavidalu:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Tokiu būdu, vektorius

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3) &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}^T = \left( \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right)^T \\ &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}^T = \mathbf{u}B^T. \end{aligned}$$

Turime  $\mathcal{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}B^T$ .

Tegu  $\mathcal{B}$ – ortogonalioji transformacija. Tada teisinga

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}B^T \cdot \mathbf{v}B^T = (\mathbf{v}B^T) (\mathbf{u}B^T)^T = \mathbf{v}B^T B \mathbf{u}^T = \mathbf{v} (B^T B) \mathbf{u}^T = \mathbf{v} \mathbf{u}^T.$$

Iš čia turime, kad ortogonaliosios transformacijos matrica tenkina lygybę

$$B^T B = I.$$

**11.2 Teiginys.** Tegu  $B$ – kvadratinė matrica. Šie penki teiginiai yra ekvivalentūs:

- 1)  $B$  yra neišsigimusi matrica ir  $B^{-1} = B^T$ .
- 2)  $BB^T = I$ .
- 3)  $B^T B = I$ .
- 4) matricos  $B$  eilutės yra ortonormuotos.
- 5) matricos  $B$  stulpeliai yra ortonormuoti.
- 6) matricos  $B$  tikrinių reikšmių modulis yra 1.

Matrica  $B$  tenkinanti šias savybes vadinama *ortogonalia matrica*.

**11.3 Teiginys.**

- 1) Ortogonalijų matricių aibė  $O_n(\mathbf{R})$  yra grupė sandaugos atžvilgiu.
- 2) Ortogonalios matricos determinantas lygus  $\pm 1$ .

**11.4 Pavyzdys** ( $2 \times 2$  ortogonaliosios matricos).

Ortogonalė  $2 \times 2$  matrica turi vieną iš dviejų pavidalų:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ arba } B_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Transformacija, kurios matrica  $B_1$  posūkio kampų  $\varphi$  transformacija, o transformacija, kurios matrica  $B_2$  simetriškai atvaizduoja  $x$  ašies atžvilgiu ir pasuka kampą  $\varphi$  apie  $y$  ašį.

**11.5 Teiginys.** Ortonormuotų bazių keitimo matrica yra ortogonalė.

**Irodymas.** Tegu  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  ir  $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3$  dvi ortonormuotos bazės ir

$$(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) C,$$

čia  $C$ – keitimo matrica. Turime

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}$$

ir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{u}'_2 & \mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{u}'_2 & \mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}'_3 \cdot \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_3 \cdot \mathbf{u}'_2 & \mathbf{u}'_3 \cdot \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3) \\ &= C^T \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) C \\ &= C^T \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} C \\ &= C^T I C = C^T C = I \end{aligned}$$

**Įrodyta.**

**11.6 Teiginys.** *Jei ortogonalios matricos  $B$  tikrinės reikšmės yra realios, tai egzistuoja  $\mathbf{R}^3$  bazė sudaryta iš matricos  $B$  tikrinių vektorių  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ .*

Ortogonaliosios transformacijos matrica tikrinių vektorių bazėje gali būti viena iš žemiau išvardintų

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \cos 0 & \sin 0 \\ & -\sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} \text{ (transformacija nieko nekeičia)}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 0 & \sin 0 \\ 0 & -\sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} \text{ (simetrija vektorių plokštumos } v_2, v_3 \text{ plokštumos atžvilgiu)}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi & \sin \pi \\ 0 & -\sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} \text{ (simetrija vektoriaus } v_1 \text{ atžvilgiu)}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi & \sin \pi \\ 0 & -\sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} \text{ (simetrija koordinatinių pradžios atžvilgiu).}$$

**11.7 Tiesioginis uždavinys.** *Kokiu kampu ir kokio vektoriaus kryptimi atliekamas erdvės  $\mathbf{R}^3$  posūkis transformacija, kurios matrica  $B$ ?*

Tegu ortogonaliosios transformacijos matricos  $B$  tikrinės reikšmės yra  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = a + ib, \lambda_3 = a - ib$  ir kompleksinio skaičiaus  $\lambda_2 = a + ib$  trigonometrinė forma yra  $\lambda_2 = a + ib = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Tegu tikrinės reikšmės  $\lambda_1$  tikrinis vektorius yra  $\mathbf{v}_1$ , tikrinės reikšmės  $\lambda_2$  tikrinis vektorius yra  $\mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2$ . Tada tikrinės reikšmės  $\lambda_3$  tikrinis vektorius yra  $\mathbf{u}_2 - i\mathbf{v}_2$ . Normuokime šiuos vektorius:

$$\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \mathbf{v}'_1, \frac{\mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2}{\sqrt{\|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2}} = \frac{\mathbf{u}_2}{\sqrt{\|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2}} + i \frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{\|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2}} = \mathbf{u}'_2 + i\mathbf{v}'_2,$$

$$\frac{\mathbf{u}_2 - i\mathbf{v}_2}{\sqrt{\|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2}} = \frac{\mathbf{u}_2}{\sqrt{\|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2}} - i \frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{\|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2}} = \mathbf{u}'_2 - i\mathbf{v}'_2.$$

Tada realūs vektoriai  $\mathbf{v}'_1, \sqrt{2}\mathbf{u}'_2, \sqrt{2}\mathbf{v}'_2$  yra orthonomuota  $\mathbf{R}^3$  bazė, kurioje transformacijos  $C$  matrica yra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Tokiu būdu ši ortogonalioji transformacija pasuka erdvę  $\mathbf{R}^3$  kampu  $(-\varphi)$  vektoriaus  $\mathbf{v}_1$  kryptimi.

Jeigu realioji ortogonaliosios transformacijos matricos  $C$  tikrinė reikšmė yra  $\lambda_1 = -1$ , tai bazėje  $\mathbf{v}'_1, \sqrt{2}\mathbf{u}'_2, \sqrt{2}\mathbf{v}'_2$  transformacijos matrica yra

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ši transformacija atlieka šiuos du veiksmus:

- 1) simetrija vektorių  $\sqrt{2}\mathbf{u}'_2, \sqrt{2}\mathbf{v}'_2$  plokštumos atžvilgiu
- 2) posūkis kampu  $(-\varphi)$  vektoriaus  $\mathbf{v}_1$  kryptimi.

**11.8 Atvirkštinis uždavinys.** *Rasime matricą, kurios transformacija pasuka erdvę  $\mathbf{R}^3$  kampu  $(\varphi)$  vektoriaus  $\mathbf{u} = (a, b, c)$  kryptimi.*

Turėtume atlikti šiuos veiksmus:

1. Raskime vektoriumi  $\mathbf{u}$  statmeną vektoriumi  $\mathbf{v}$  ir apskaičiuokime  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .

2. Ortonormuokime šią sistemą:  $\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ ,  $\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ ,  $\mathbf{w}' = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$ .
3. Sudarykime ortogonaliąją matricą:  $C = \left( \mathbf{u}'^T \mid \mathbf{v}'^T \mid \mathbf{w}'^T \right)$ .
4. Suskaičiuokime matricą:  $B = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ 0 & -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} C^T$ .

Transformacija, kurios matrica yra  $B$  ir yra ieškoma matrica.

### 11.9 Ortogonaliosios matricos pavyzdys.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Charakteristinis polinomas:  $x^3 - (\sqrt{3} + 1)x^2 + (\sqrt{3} + 1)x - 1 = (x - 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)$

Tikrinės reikšmės:  $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$ ,  $1$

Tikrinis vektorius atitinkantis  $1$  yra  $(1, 1, 0) = v_1$

Tikrinis vektorius atitinkantis  $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$  yra  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2}i, 1\right) = (0, 0, 1) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2$

Tikrinis vektorius atitinkantis  $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$  yra  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i, 1\right) = (0, 0, 1) - i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \mathbf{u}_2 - i\mathbf{v}_2$

Normuokime tikrinius vektorius ir atskirkime realius vektorius :

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0); \mathbf{u}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1); \mathbf{v}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Normuokime realius vektorius:

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0); \sqrt{2}\mathbf{u}'_2 = (0, 0, 1); \sqrt{2}\mathbf{v}'_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Šioje bazėje transformacijos matrica yra

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ 0 & -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ši tiesinė transformacija suka erdvę  $-30^\circ$  laipsnių kampų vektoriaus  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$  kryptimi.

**11.10 Pavyzdys.** Pasuksime vektorių  $(1; 0; 0)$  kampą  $90^\circ$  apie vektorių  $\mathbf{u} = (0; 1; 1)$ .

Rasime transformacijos, kuri erdvę pasuka kampą  $90^\circ$  apie vektorių  $\mathbf{u} = (0; 1; 1)$ , matricą.

Vektorių  $\mathbf{u}$  papildome iki orogonaliosios sistemos:

$$\mathbf{u} = (0; 1; 1), \mathbf{v} = (1; 0; 0),$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = j - k = (0; 1; -1).$$

Normavus šią sistemą gausime ortonormuotą erdvės bazę:

$$\mathbf{u}' = \frac{\sqrt{2}}{2} (0; 1; 1), \mathbf{v}' = (1; 0; 0), \mathbf{w}' = \frac{\sqrt{2}}{2} (0; 1; -1).$$

Bazių keitimo matrica

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

ir ieškomoji matrica yra

$$A = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & \sin(-90^\circ) \\ 0 & -\sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix} C^T =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & \sin(-90^\circ) \\ 0 & -\sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

dabar pasukę vektorių  $(1; 0; 0)$  kampą  $90^\circ$  apie vektorių  $\mathbf{u} = (0; 1; 1)$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

gausime vektorių  $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .