Algebros paskaitos.

Rimantas Grigutis

10 paskaita. Tiesinės transformacijos $\mathbf{R}^3$ ir jų matricos.

Tegu A yra tiesinės transformacijos $\mathcal{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ matrica kurioje nors bazėje, o I - vienetinė matrica iš $\mathrm{M}_3(\mathbf{R})$.

10.1 Apibrėžimai.

1. *Polinomas* $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tI)$ *vadinamas tiesinės transformacijos* $\mathcal{A}$ *charakteringuoju polinomu.*

2. $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ *šaknys(realios ir kompleksinės) vadinamos tikrinėmis* $\mathcal{A}$ *reikšmėmis.*

3. *Jei* λ *- realioji tikrinė reikšmė, tai nenulinis vektorius* $\mathbf{v}$, *tenkinantis lygybę* $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ *vadinamas tikriniu vektoriumi atitinkančiu tikrinę reikšmę* λ.

10.2 Teorema. *Tiesinės transformacijos* $\mathcal{A}$ *charakteringasis polinomas nepriklauso nuo bazės.*

Įrodymas. Tegu A_1 ir A_2 yra tiesinės transformacijos $\mathcal{A}$ matricos skirtingose bazėse. Turime $\mathrm{A}_1 = C^{-1}A_2C$, čia C - bazių keitimo matrica. Tada

$$\begin{gathered}\det(A_1 - tI) = \\ \det(C^{-1}A_2C - tI) = \det(C^{-1}A_2C - tC^{-1}IC) = \\ \det\left(C^{-1}(A_2 - tI)C\right) = \det C^{-1}\det(A_2 - tI)\det C = \\ \det(A_2 - tI).\end{gathered}$$

Įrodyta.

10.3 Teorema. *Jei* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ *tikriniai vektoriai atitinkantys poromis skirtingas reikšmes* $\lambda_1, ..., \lambda_m$, *tai vektorių sistema* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ *yra tiesiškai nepriklausoma.*

Įrodymas. Matematinė indukcija(M.i.) pagal m.

M.i. bazė ($m = 1$). Tikrinis vektorius $\mathbf{v}_1$ yra nenulinis, todėl tiesiškai nepriklausomas.

M.i. prielaida. Vektoriai $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{m-1}$ yra tiesiškai nepriklausomi.

M.i. teiginys. Tegu $\alpha_1, ..., \alpha_m$ tokie skaičiai, kad

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m = \mathbf{o}. \qquad (1)$$

Tada

$$\begin{gathered}\mathbf{o} = \mathcal{A}(\mathbf{o}) = \mathcal{A}(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m) = \\ \alpha_1\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_m\mathcal{A}(\mathbf{v}_m) = \\ \alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\lambda_m\mathbf{v}_m = \mathbf{o} \qquad (\mathbf{2})\end{gathered}$$

Padauginkime (1) iš λ_m ir atimkime ją iš (2). Turėsime

$$\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\mathbf{v}_{m-1} = \mathbf{o}$$

pagal M.i. prielaidą $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{m-1}$ yra tiesiškai nepriklausomi, todėl

$$\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1) = \cdots = \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0.$$

Bet $\lambda_1, ..., \lambda_m$ yra poromis skirtingi, todėl

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$$

ir

$$\alpha_m\mathbf{v}_m = \mathbf{o}.$$

Vektorius $\mathbf{v}_m \neq \mathbf{o}$, todėl ir $\alpha_m = 0$.
Įrodyta.

Lygybė $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ yra ekvivalenti lygybei $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, čia $\mathcal{I}$ - vienetinė transformacija: $\mathcal{I}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Todėl visų tikrinių vektorių atitinkančių tikrinę reikšmę λ aibė yra poervis $\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$.

Tiesinės transformacijos matricos.

Tegu A yra tiesinės transformacijos $\mathcal{A}$ standartinėje bazėje $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:
$\mathcal{A}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\,A$.
Tegu $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tI) = -(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)(t - \lambda_3)$
Turime, kad $\dim\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 3 - \mathrm{rank}(A - \lambda I)$.
Nagrinėsime šiuos atvejus.
1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$
1.1.

$$\begin{gathered}\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3. \\ \dim\ker(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{I}) = 1 \\ \dim\ker(\mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{I}) = 1 \\ \dim\ker(\mathcal{A} - \lambda_3\mathcal{I}) = 1\end{gathered}$$

$\mathbf{R}^3$ bazė: tikriniai vektoriai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ atinkantys $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\begin{gathered}\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_3) = \lambda_3 \mathbf{v}_3\end{gathered}$$

$\mathcal{A}$ matrica bazėje $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

1.2

$$\begin{gathered}\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \\ \operatorname{dimker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I}) = 2 \\ \operatorname{dimker}(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{I}) = 1\end{gathered}$$

$\mathbf{R}^3$ bazė: tikriniai vektoriai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ atinkantys $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\begin{gathered}\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = \lambda_1 \mathbf{v}_2 \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_3) = \lambda_3 \mathbf{v}_3\end{gathered}$$

$\mathcal{A}$ matrica bazėje $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

1.3

$$\begin{gathered}\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \\ \operatorname{dimker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I}) = 1 \\ \operatorname{dimker}(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{I}) = 1\end{gathered}$$

Tegu $\mathbf{u}_1^T$,$\mathbf{u}_2^T$ yra lygčių sistemos $(A - \lambda_1 I)^2 X = O$ fundamentalioji sprendinių sistema.

Tarp $(A - \lambda_1 I)\mathbf{u}_1^T, (A - \lambda_1 I)\mathbf{u}_2^T$ yra nenulinis stulpelis, sakykime $(A - \lambda_1 I)\mathbf{u}_1^T \neq (0,0,0)^T$.

$\mathbf{R}^3$ bazė: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})(\mathbf{u}_1), \mathbf{v}_3$

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$
$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = \lambda_1 \mathbf{v}_2$$
$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_3) = \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

$\mathcal{A}$ matrica bazėje $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

1.4.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$$
$$\operatorname{dimker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) = 3$$

$\mathbf{R}^3$ bazė: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \lambda \mathbf{e}_1$$
$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \lambda \mathbf{e}_2$$
$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_3) = \lambda \mathbf{e}_3$$

$\mathcal{A}$ matrica bazėje $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1.5

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$$
$$\operatorname{dimker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) = 2$$

Tarp vektorių $(A - \lambda I)\mathbf{e}_1^T, (A - \lambda I)\mathbf{e}_2^T, (A - \lambda I)\mathbf{e}_3^T$ yra nenulinis, sakykime $(A - \lambda I)\mathbf{e}_1^T \neq (0, 0, 0)^T$

$\mathbf{R}^3$ bazė: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})\ (\mathbf{e}_1), \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$
$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = \lambda_1 \mathbf{v}_2$$
$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_3) = \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

$\mathcal{A}$ matrica bazėje $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1.6

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$$
$$\dim\ker\left(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}\right) = 1$$
Tarp vektorių $(A - \lambda I)^2 \mathbf{e}_1^T, (A - \lambda I)^2 \mathbf{e}_2^T, (\lambda A - \lambda I)^2 \mathbf{e}_3^T$ yra nenulinis, sakykime
$$(A - \lambda I)^2 \mathbf{e}_1^T \neq (0, 0, 0)^T$$

$\mathbf{R}^3$ bazė: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2 = \left(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}\right)\left(\mathbf{e}_1\right), \mathbf{v}_3 = \left(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}\right)^2\left(\mathbf{e}_1\right)$

$$\mathcal{A}\left(\mathbf{v}_1\right) = \lambda\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$
$$\mathcal{A}\left(\mathbf{v}_2\right) = \lambda\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$
$$\mathcal{A}\left(\mathbf{v}_3\right) = \lambda\mathbf{v}_3$$

$\mathcal{A}$ matrica bazėje $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda_1 \in \mathbf{R}$,$\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{C}$.
Turime, kad

$$\lambda_2 = a + ib, \lambda_3 = a - ib.$$

Tegu $\mathbf{v}_1$ yra tikrinis vektorius, atinkantis λ_1

$$\mathcal{A}\left(\mathbf{v}_1\right) = \lambda_1\mathbf{v}_1$$

Tegu nenulinis kompleksinis vektorius $\mathbf{c}_2 \in \mathbf{C}^3$ yra toks, kad

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{c}_2^T = (0, 0, 0)^T$$

ir

nenulinis kompleksinis vektorius $\mathbf{c}_3 \in \mathbf{C}^3$ yra toks, kad

$$(A - \lambda_3 I)\mathbf{c}_3^T = (0,0,0)^T.$$

Tada $\mathbf{c}_2 = \mathbf{v}_2 + i\mathbf{v}_3$ ir $\mathbf{c}_3 = \mathbf{v}_2 - i\mathbf{v}_3$, čia $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbf{R}^3$ ir

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) + i\mathcal{A}(\mathbf{v}_3) = \mathcal{A}(\mathbf{v}_2 + i\mathbf{v}_3) = \\
(a+ib)(\mathbf{v}_2 + i\mathbf{v}_3) = (a\mathbf{v}_2 - b\mathbf{v}_3) + i(b\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3) \\
\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_2 - b\mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \\
\mathcal{A}(\mathbf{v}_3) = b\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}
\end{gathered}$$

Vektoriai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sudaro $\mathbf{R}^3$ bazę, kurioje $\mathcal{A}$ matrica yra

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$$