Algebros paskaitos

Rimantas Grigutis

9 paskaita. Tiesinės transformacijos $\mathbf{R}^n$.

9.1 Apibrėžimas. *Funkcija* $\mathcal{A}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ *vadinama tiesine transformacija, jeigu*

1. $\mathcal{A}(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=\mathcal{A}(\mathbf{u}_1)+\mathcal{A}(\mathbf{u}_2)$ *su visais* $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in\mathbf{R}^n$.

2. $\mathcal{A}(\alpha\mathbf{u})=\alpha\mathcal{A}(\mathbf{u})$ *su visais* $\alpha\in\mathbf{R}$ ir $\mathbf{u}\in\mathbf{R}^n$.

9.2 Pavyzdžiai.

1. Funkcija $T_k(x,y,z)=(kx,ky,kz)$ yra tiesinė transformacija erdvėje $\mathbf{R}^3$ ir vadinama *ištempimu*

2. Vektoriaus iš R^2 projekcija į x ašį: $T_{ox}(x,y)=(x,0)$ yra tiesinė transformacija erdvėje $\mathbf{R}^2$ ir vadinama *ortogonalia projekcija.*

3. Simetrija xy plokštumos atžvilgiu erdvėje R^3: $\mathrm{T}_{xy}(x,y,z)=(x,y,-z)$ yra tiesinė transformacija erdvėje $\mathbf{R}^3$ ir vadinama *atspindžio* transformacija.

9.3 Apibrėžimas. *Transformacijos* $\mathcal{A}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ *branduoliu vadinamas* $\mathbf{R}^n$ *poerdvis*

$$\ker\mathcal{A}=\{\mathbf{u}\in\mathbf{R}^n|\mathcal{A}(\mathbf{u})=\mathbf{o}\}.$$

Transformacijos $\mathcal{A}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ *vaizdu vadinamas* $\mathbf{R}^n$ *poerdvis*

$$\mathrm{im}\mathcal{A}=\{\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n|\exists\mathbf{u}\in\mathbf{R}^n:\mathcal{A}(\mathbf{u})=\mathbf{v}\}.$$

9.4 Pavyzdžiai.

1. $\ker T_k=\mathbf{o}$ ir $\mathrm{im}T_k=\mathbf{R}^3$.

2. $\ker T_{ox}=\{\mathbf{v}=(0,b)\,|b\in\mathbf{R}\}$ ir $\mathrm{im}T_{ox}=\{\mathbf{u}=(a,0)\,|a\in\mathbf{R}\}$.

3. $\ker T_{xy}=\mathbf{o}$ ir $\mathrm{im}T_{xy}=\mathbf{R}^3$.

9.5. Teiginys. *Tiesinė transformacija* $\mathcal{A}$ *pasižymi tokiomis savybėmis*:

1. $\mathcal{A}(\mathbf{o})=\mathbf{o}$.

2. Jeigu $\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_n$ *yra tiesiškai priklausoma vektorių sistema, tai ir* $\mathcal{A}(\mathbf{u}_1),...,\mathcal{A}(\mathbf{u}_n)$ *yra tiesiškai priklausoma vektorių sistema.*

3. Jeigu $\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_n$ *yra generuojanti* $\mathbf{R}^n$ *sistema, tai ir* $\mathcal{A}(\mathbf{u}_1),...,\mathcal{A}(\mathbf{u}_n)$ *yra generuojanti* $\mathrm{im}\mathcal{A}$ *sistema.*

Įrodyti paliekama skaitytojui.

9.6. Teorema. *Jei U yra $\mathbf{R}^n$ poerdvis, tai egzistuoja tokios $\mathbf{R}^n$ transformacijos $\mathcal{A}$* ir $\mathcal{B}$, kad $U = \ker\mathcal{A}$ ir $U = \mathrm{im}\mathcal{B}$.

Įrodymas. Papildykime U bazę $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$ iki visos erdvės $\mathbf{R}^n$ bazės $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, ..., \mathbf{u}_n$. Tiesines transformacijas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ apibrėžkime formulėmis

$$\mathcal{A}\left(a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k + a_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots a_n\mathbf{u}_n\right) = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k,$$
$$\mathcal{B}\left(a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k + a_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots a_n\mathbf{u}_n\right) = a_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots a_n\mathbf{u}_n.$$

Tada $im\mathcal{A} = U$ ir $\ker\mathcal{B} = U$.
Įrodyta.

Tiesinės transformacijos matrica.

Tegu $\mathcal{A}$ - tiesinė transformacija erdvėje R^n, o $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ $\mathbf{R}^n$ bazė. Tada

$$\mathcal{A}\left(\mathbf{u}_1\right) = a_{11}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbf{u}_n = \left(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\right)\begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{A}\left(\mathbf{u}_n\right) = a_{1n}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{nn}\mathbf{u}_n = \left(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\right)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \cdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

vadinama *tiesinės transformacijos $\mathcal{A}$ matrica* bazėje $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$.
Turime

$$\mathcal{A}\left(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\right) = \left(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\right) A.$$

Dabar parodysime ryšį tarp vektoriaus $\mathbf{u}$ ir jo tiesinio vaizdo $\mathcal{A}\left(\mathbf{u}\right)$ koordinačių bazėje $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$.
Tegu $\mathcal{A}\left(\mathbf{u}\right) = \mathbf{v}$ ir

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}, \; \mathbf{v} = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Turime

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathcal{A}\left((\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right) =$$
$$(\mathcal{A}(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n)) \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = ((\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) A) \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$
$$(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) \left(A \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right) = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Tada

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Dabar parodysime kaip keičiasi tiesinės transformacijos matrica keičiantis erdvės bazėms.

Tegu $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ ir $\mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}'_n$ dvi erdvės $\mathbf{R}^n$ bazės ir C yra šių bazių keitimo matrica:

$$(\mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}'_n) = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) \cdot C$$

Jei

$$\begin{gathered} \mathcal{A}(\mathbf{u}, ..., \mathbf{u}_n) = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) A \\ \mathcal{A}(\mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}'_n) = (\mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}'_n) A' \end{gathered}$$

tai

$$\begin{gathered} \mathcal{A}(\mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}'_n) = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) AC = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) CA' = \mathcal{A}(\mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}'_n) \\ AC = CA' \\ A' = C^{-1}AC. \end{gathered}$$

9.7.Teorema(apie tiesinės transformacijos bazės ir vaizdo bazes). *Tegu tiesinės transformacijos $\mathcal{A}$ matrica standartinėje bazėje* $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ *yra* A ir $\mathbf{v}_1^T, ..., \mathbf{v}_m^T$(*stulpeliai iš* $\mathbf{R}_n$) *yra homogeninės lygčių sistemos* $AX = 0$ *fundamentalioji sprendinių sistema. Tada*

1) $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ *yra* $\ker \mathcal{A}$ *bazė ir* m=$\dim \ker \mathcal{A} = n - r = n-$rank$A$.

2) *Jei* $\mathbf{s}_1^T, ..., \mathbf{s}_n^T$ *yra matricos* A *stulpeliai, tai* im$\mathcal{A}$=$[\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_n]$ *ir* im$\mathcal{A}$ *bazė yra maksimalus tiesiškai nepriklausomas sistemos* $\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_n$ *(eilutės) posistemis, o* dim im$\mathcal{A} = r$ =rank$A$.

Įrodymas. 1) Jei $\mathbf{u} = (a_1, ..., a_n) = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)\, \mathbf{u}^T$, tai $\mathbf{u} \in \ker \mathcal{A}$ tada ir tik tada, kada $A\mathbf{u}^T = \mathbf{o}$, t.y. $\ker \mathcal{A}$ vektorių koordinatiniai stulpeliai yra homogeninės lygčių sistemos $AX = 0$ sprendiniais.Todėl šios sistemos fundamentalioji sprendinių sistema yra $\ker \mathcal{A}$ bazės koordinatiniais stulpeliais.

2) Turime, kad $\mathbf{s}_i = \mathcal{A}\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)\, \mathbf{s}_i^T$.Todėl im$\mathcal{A}$ bazė yra maksimalus tiesiškai nepriklausomas sistemos $\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_n$ (eilutės) posistemis, o dim im$\mathcal{A}$ = r =rank$A$.

Įrodyta.

9.8 Išvada. *Su visom erdvės* $\mathbf{R}^n$ *tiesinėm transformacijom* $\mathcal{A}$ *teisinga*

$$\dim \ker \mathcal{A} + \dim \mathrm{im}\mathcal{A} = n.$$

Veiksmai su tiesiniais atvaizdžiais.

9.9 Apibrėžimai. *Tegu* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *tiesinės transformacijos erdvėje* $\mathbf{R}^n$.
$\mathcal{A}$ ir $\mathcal{B}$ *suma yra tiesinė transformacija* $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ apibrėžta lygybe:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}(\mathbf{u}).$$

Tiesinė transformacija $\alpha\mathcal{A}$ *su visais* $\alpha \in \mathbf{R}$ *apibrėžta lygybe*

$$(\alpha\mathcal{A})(\mathbf{u}) = \alpha(\mathcal{A}(\mathbf{u})).$$

$\mathcal{A}$ ir $\mathcal{B}$ *sandauga yra tiesinė transformacija* $\mathcal{AB}$ *apibrėžta lygybe*

$$(\mathcal{AB})(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{u})).$$

9.10 Teorema. *Tegu* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *tiesinės transformacijos erdvėje* $\mathbf{R}^n$, o A ir B yra jų matricos bazėje $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$. Tada

1) $A + B$ *yra transformacijos* $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ *matrica bazėje* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$.

2) αA *yra transformacijos* $\alpha\mathcal{A}$ *matrica bazėje* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$.

3) AB *yra transformacijos* $\mathcal{A}\mathcal{B}$ *matrica bazėje* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$.

Įrodymą paliekame skaitytojui.