Algebros paskaitos.
Rimantas Grigutis

8 paskaita. Euklido erdvė

8.1 Apibrėžimas. *Vektorinė erdvė E virš $\mathbf{R}$ vadinama Euklido erdve, jeigu joje apibrėžta skaliarinė sandauga, t.y. tokia funkcija, kuri vektorių porai $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ priskiria realųjį skaičių (u, v) ir tenkina aksiomas:*

S1) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$ *su visais* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$;
S2) $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ *su visais* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in E$;
S3) $(a\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *su visais* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ *ir* $a \in \mathbf{R}$;
S4) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$ *su visais* $\mathbf{u} \in E$ *ir* $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$.

8.2 Apibrėžimai. *Neneigiamas skaičius* $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ *vadinamas vektoriaus* $\mathbf{v}$ *ilgiu, o skaičius* $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ *vadinamas atstumu tarp vektorių* $\mathbf{u}$ *ir* $\mathbf{v}$ *.*

8.3 Teiginys. *Teisingos šios savybės*:
N1) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ ir $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{o}$.
N2) $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$ *su visais* $\mathbf{v} \in E$ ir $a \in \mathbf{R}$.
N3) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ *su visais* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$.
A1) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$ ir $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$.
A2) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.
A3) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ - trikampio nelygybė

Įrodymas. Savybės N1, N2,A1 ir A2 yra tiesioginės S1-S4 išvados. Savybės N3ir A3 įrodymas remiasi Cauchy-Schwarzo-Buniakovskio nelygybe, kurią įrodysime žemiau.

8.4 Teorema(Cauchy-Schwarzo-Buniakovskio nelygybė). *Euklido erdvėje E su visais $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ teisinga nelygybė*

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| .$$

Įrodymas. Nagrinėkime kvadratinę funkciją $f(t)$:

$$f(t) = (\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + t^2(\mathbf{v}, \mathbf{v}) .$$

Iš 10.1 apibrėžimo turime, kad $f(t) \geq 0$ su visomis t reikšmėmis, todėl

$$D = -4(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 4(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 \leq 0 \Rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

ir

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|.$$

Pastebėsime, kad

$f(t) = 0 \Leftrightarrow (u + tv, u + tv) = 0 \Leftrightarrow u$ ir v yra tiesiškai priklausome sistema.

Įrodyta.

8.5 Pavyzdys. Aritmetinėje erdvėje $\mathbf{R}^n$ skaliarinė sandauga apibrėžiama lygybe:

$$((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Tada Cauchy-Schwarz-Buniakovskio nelygybė šioje erdvėje yra

$$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

8.6 Apibrėžimas. *Kampas tarp nenulinių vektorių* $\mathbf{u}$ *ir* $\mathbf{v}$ *apibrėžiamas lygybe*:

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$$

8.7 Apibrėžimai. 1.*Nenuliniai vektoriai* $\mathbf{u}$ *ir* $\mathbf{v}$ *vadinami ortogonaliais, jeigu* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

2. *Vektorius* $\mathbf{u}$ *vadinamas normuotu, jeigu* $\|\mathbf{u}\| = 1$.

3. *Euklido erdvės bazė* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ *vadinama ortogonalia, jeigu šie vektoriai yra poromis ortogonalūs, t.y.* $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$, *kai* $1 \leq i \neq j \leq n$, *ir ortonormuota, jeigu vektoriai yra poromis ortogonalūs ir normuoti, t.y.* $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ *su visais* i.

8.8 Teiginys. *Jeigu nenulinių vektorių sistema* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m$ *yra ortogonali, tai ji yra tiesiškai nepriklausoma.*

Įrodymas. Tegu $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ yra ortogonali vektorių sistema. Nagrinėkime lygybę

$$a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_m \mathbf{v}_m = \mathbf{o}.$$

Tada

$$
\begin{gathered}
\left(a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_m\mathbf{v}_m,\mathbf{v}_i\right)= \\
a_1\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_i\right)+\cdots+a_i\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\right)+\cdots+a_m\left(\mathbf{v}_m,\mathbf{v}_i\right)= \\
a_i\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\right)=0
\end{gathered}
$$

ir $a_i=0$ su visais $i=1,...,m$.
Įrodyta.

Tegu $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_m$ $-$ ortogonalioji Euklido erdvės bazė, o

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{v}_i$$

ir

$$\mathbf{u}=\sum_{j=1}^{n}b_j\mathbf{v}_j\ .$$

Turime

$$\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{v}_i,\sum_{j=1}^{n}b_j\mathbf{v}_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_ib_j\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\right)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\left(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\right).$$

Jeigu $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_m-$ ortonormuota Eukido erdvės bazė, tai

$$\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

Ar visada Euklido erdvėje egzistuoja ortogonali ir ortonormuota bazė ? Į šį klausimą teigiamai atsako

8.8 Teorema(J.P.Gram - E.Schmidto ortogonalizacijos procesas). *Euklido erdvės E kiekvienai tiesiškai nepriklausomai sistemai $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_m$ egzistuoja vienareikšmiškai apibrėžta tokia vektorių sistema $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_m$, kad*

1*) vektoriai $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_m$ poromis ortogonalūs(t.y. sistema yra ortogonali);*

2*) $\mathbf{v}_i-\mathbf{u}_i\in\left[\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_{i-1}\right]$ su visais $2\le i\le m$.*

Įrodymas. Indukcija pagal m. Kai $m = 1$, tai $v_1 = u_1$ ir teiginys įrodytas. Įrodysime indukcinį teiginį $(m-1 \Rightarrow m)$. Pagal indukcijos prielaidą, vektorių $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{m-1}$ sistemai egzistuoja tokia ortogonali vektorių $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{m-1}$ sistema, kad $\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i \in \left[\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{i-1}\right]$ su visais i, $2 \leq i \leq m-1$. Pastebėsime, kad $\left[\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{m-1}\right] = \left[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{m-1}\right]$, nes su visais $j = 1, 2, ..., m-1$ vektoriai $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i) \in \left[\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{m-1}\right]$ ir beto sistema $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{m-1}$ yra tiesiškai nepriklausoma ir todėl sudaro $\left[\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{m-1}\right]$ bazę. Ieškomas vektorius v_m turi tenkinti šias savybes:

1) $(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1) = \cdots = \left(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m-1}\right) = 0$

2) $\mathbf{v}_m - \mathbf{u}_m \in \left[\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{m-1}\right] = \left[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{m-1}\right]$.

Taigi, vektorius $\mathbf{v}_m$ turėtų būti lygus $\mathbf{v}_m = \mathbf{u}_m + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\mathbf{v}_{m-1}$. Tada

$$
\begin{gathered}
0 = (\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{u}_m + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\mathbf{v}_{m-1}, \mathbf{v}_1) = \\
(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1) + \lambda_1 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}, \\
..., \\
0 = \left(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m-1}\right) = \left(\mathbf{u}_m + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\mathbf{v}_{m-1}, \mathbf{v}_{m-1}\right) = \\
\left(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_{m-1}\right) + \lambda_{m-1}\left(\mathbf{v}_{m-1}, \mathbf{v}_{m-1}\right) \Rightarrow \lambda_{m-1} = -\frac{\left(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_{m-1}\right)}{\|\mathbf{v}_{m-1}\|^2}.
\end{gathered}
$$

Gavome

$$
\mathbf{v}_m = \mathbf{u}_m - \frac{(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \cdot v_1 - \cdots - \frac{\left(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_{m-1}\right)}{\|\mathbf{v}_{m-1}\|^2} \cdot \mathbf{v}_{m-1}.
$$

Įrodyta.

8.9 Išvada. Iš Gramo-Schmidto ortogonalizacijos proceso turime, kad bet kurioje Euklido erdvėje egzistuoja ortogonali bazė, o jeigu jos vektoriai dar ir normuoti, tai ir ortonormuota bazė.

8.10 Apibrėžimas. *Jeigu U yra Euklido erdvės E poerdvis, tai aibė*

$$
U^{\perp} = \{\mathbf{v} \in E : (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \text{ su visais } \mathbf{u} \in U\}
$$

vadinama poerdvio U ortogonaliuoju papildiniu.

8.11 Teiginys. Svarbiausios **ortogonalaus papildinio savybės** yra šios:

1. $U^{\perp}$ yra E poerdvis.
2. Jeigu $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$ yra U bazė, tai $U^{\perp} = \{\mathbf{v} \in E | \, (\mathbf{v}, \mathbf{u}_i) = 0, i = 1, ..., m\}$.

3. $U \cap U^{\perp} = 0$.
4. $\dim U^{\perp} = \dim E - \dim U$.
5. $E = U \oplus U^{\perp}$.
6. $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$.

Taikymai.
1. Ortogonalusis papildinys ir tiesinių lygčių sistema.

Teiginys. Tegu V yra Euklido erdvės $\mathbf{R}^n$ poerdvis, generuotas eilutėmis $\mathbf{v}_1 = (a_{11}, ..., a_{1n}), ..., \mathbf{v}_m = (a_{m1}, ..., a_{mn})$, ir $\mathbf{v} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$. Tada šios sąlygos yra ekvivalentiškos:
1) $\mathbf{v} \in V^{\perp}$.
2) $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_i) = 0$ su visais $i = 1, ..., m$.
3) $(x_1, ..., x_n)$ yra tiesinės lygčių sistemos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

sprendinys, t.y. $V^{\perp}$ yra šios sistemos sprendinių aibė.

2. Tiesinių lygčių sistemos mažiausių kvadratų sprendinys.

Tegu $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ yra tiesinių lygčių sistema, kurios matricoje A yra m eilučių ir n stulpelių, ir ji neturi sprendinių. Su kiekvienu $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_n$ vektorius $\mathbf{b} - A\mathbf{v}$ vadinamas *nesuderamumo vektoriumi.* Sistemos **mažiausių kvadratų sprendiniu** vadiname tokį vektorių $\mathbf{v}_0$, kad vektoriaus $\mathbf{b} - A\mathbf{v}_0$ ilgis yra mažiausias, t.y. $\|\mathbf{b} - A\mathbf{v}_0\| = \min\limits_{\mathbf{v} \in \mathbf{R}_n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{v}\|$. Parodysime, kaip rasti šį sprendinį.

Tegu $\mathbf{v} = (x_1, ..., x_n)^T$ ir $A\mathbf{v} = x_1\mathbf{c}_1 + \cdots x_n\mathbf{c}_n$, čia $\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n$ yra matricos A stulpeliai. Aišku, kad vektorių aibė $V = \{A\mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbf{R}_n\} \subseteq \mathbf{R}_m$ yra poerdvis lygus matricos A stulpelių $\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n$ tiesiniam apvalkalui $[\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n]$. Vektoriaus $\mathbf{u}$ atstumu iki poerdvio V vadinamas $\min\limits_{\mathbf{w} \in V} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$. Tegu $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, čia $\mathbf{x} \in V, \mathbf{y} \in V^{\perp}$. Tada $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{w} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{w} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{w}, \mathbf{x} - \mathbf{w}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y})$, nes $\mathbf{x} - \mathbf{w}$ ir y yra ortogonalūs. Aišku, kad minimumas pasiekiamas, kai $\mathbf{x} = \mathbf{w}$ ir lygus $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|^2$. Gavome, kad vektoriaus $\mathbf{u}$ atstumas iki poerdvio V yra lygus vektoriaus $\mathbf{u}$ ortogonalios sudaromosios y ilgiui ir realizuojamas, kai $\mathbf{w}$ yra vektoriaus $\mathbf{u}$ ortogonalioji projekcija $\mathbf{x}$.

Taigi vektorius $\mathbf{v}$ turi būti toks, kad $A\mathbf{v}$ būtų vektoriaus $\mathbf{b}$ ortogonalioji projekcija poerdvyje $V = \{A\mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbf{R}_n\}$. Vektoriui v surasti naudosime tokią procedūrą:

1) Raskime ortonormuotą matricos A stulpelių $\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n$ tiesinio apvalkalo $V = [\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n]$ bazę.

2) Raskime vektoriaus $\mathbf{b}$ projekcija $\mathbf{p}$ poerdvyje V.

3) Išreikškite vektorių $\mathbf{p}$ stulpelių $\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n$ tiesine kombinacija: $\mathbf{p} = x_1\mathbf{c}_1 + \cdots x_n\mathbf{c}_n$. Tada $\mathbf{v} = (x_1, ..., x_n)^T$ ir yra ieškomas vektorius.

Parodysime, kaip kitaip galima rasti mažiausių kvadratų sprendinį. Pastebėsime, kad $\mathbf{v}$ yra mažiausių kvadratų sprendinys sistemai $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ tada ir tik tada, kada $A\mathbf{v} - \mathbf{b}$ ortogonalus $V = [\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n] -$ matricos A stulpelių tiesiniam apvalkalui. Bet vektorius $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ yra ortogonalus V tada ir tik tada, kada jis yra sistemos $A^T\mathbf{z} = \mathbf{o}$ sprendinys, čia $A^T -$ transponuota A matrica. Taigi, $\mathbf{v}$ yra mažiausių kvadratų sprendinys sistemai $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ tada ir tik tada, kada v yra sistemos $A^T(A\mathbf{v} - \mathbf{b}) = \mathbf{o}$ sprendinys, t.y.

$$A^T A\mathbf{v} = A^T\mathbf{b}.$$

Gavome, kad sistemos $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ mažiausių kvadratų sprendinys yra sistemos $A^T A\mathbf{v} = A^T\mathbf{b}$ sprendinys.

3. Gramo matrica.

8.12 Apibrėžimas. *Tegu $v_1, ..., v_n$ yra Euklido erdvės E vektorių sistema. Matrica*

$$G_{(v_1,...,v_n)} = \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}, (v_1, v_2, ..., v_n) \right) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \cdots & (v_1, v_n) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \cdots & (v_2, v_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (v_n, v_1) & (v_n, v_2) & \cdots & (v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

vadinama sistemos $v_1, ..., v_n$ Gramo matrica.

8.13 Pastabos.1. Vektorių sistema $v_1, ..., v_n$ yra tiesiškai nepriklausoma tata ir tik tada, kada sistemos Gramo matrica $G_{(v_1,...,v_n)}$ neišsigimusi, t.y. $\det G_{(v_1,...,v_n)} \neq 0$.

2. Iš apibrėžimo turime, kad bazė $v_1, ..., v_n$ yra ortonormuota tada ir tik tada, kada bazės $v_1, ..., v_n$ Gramo matrica yra vienetinė.

Tegu $v_1, ..., v_n$ yra Euklido erdvės E bazė ir $u, v -$ du E vektoriai:

$$u=\left(v_1,...,v_n\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}^T\left(v_1,...,v_n\right)^T \text{ ir } v=\left(v_1,...,v_n\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Tada skaliarinė sandauga

$$\left(u,v\right)=\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}^T\left(v_1,...,v_n\right)^T,\left(v_1,...,v_n\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)=$$
$$\left(\left(a_1,...,a_n\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix},\left(v_1,...,v_n\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)=$$
$$\left(a_1,...,a_n\right)\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix},\left(v_1,...,v_n\right)\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}=\left(a_1,...,a_n\right)G_{\left(v_1,...,v_n\right)}\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Gramo matricos geometrinė prasmė.

8.14 Apibrėžimai
1. *Tegu* $u_1,...,u_m$ *yra Euklido erdvės* E *vektoriai. Aibė*

$$P\left(u_1,...,u_m\right)=\left\{a_1u_1+\cdots a_mu_m|0\leq a_i\leq 1,i=1,...,m\right\}$$

vadinama gretasieniu.
2. *Gretasienio* $P\left(u_1,...,u_m\right)$ *tūris* $V_m\left(u_1,...,u_m\right)$ *yra apibrėžiamas induktyviai:*
1) $V_1\left(u_1\right)=\left\|u_1\right\|;$
2) $V_m\left(u_1,...,u_m\right)=V_{m-1}\left(u_1,...,u_{m-1}\right)\cdot h,$ *čia* $h-$ *aukštinė, kuri yra lygi* $h=\left\|v\right\|,$ *o vektorius* v *apibrėžiamas lygybėmis:* $\left(v,u_1\right)=\cdots=\left(v,u_{m-1}\right)=0$ *ir* $u_m-v\in\left[u_1,...,u_{m-1}\right].$

Parodysime, kad aukštinė h apibrėšta korektiškai. Tegu v_1 vektorius, tenkinantis sąlygas: $\left(v_1,u_1\right)=\cdots=\left(v_1,u_{m-1}\right)$ ir $u_m-v_1\in\left[u_1,...,u_{m-1}\right].$ Tada $v-v_1=\left(u_m-v_1\right)+\left(u_m-v\right)\in\left[u_1,...,u_{m-1}\right],$ .t.y.

$$v-v_1=a_1u_1+\cdots+a_{m-1}u_{m-1},$$
$$\left(v-v_1,u_1\right)=\cdots=\left(v-v_1,u_{m-1}\right)=0$$

ir $(v-v_1, a_1u_1+\cdots+a_{m-1}u_{m-1})=0=(v-v_1, v-v_1)\Leftrightarrow v=v_1$.

8.15 Teorema. $(V_m(u_1,...,u_m))^2=\det G_{(u_1,...,u_m)}$.

Įrodymas. Indukcija pagal m.
Kai $m=1$, tai $(V_1(u_1))^2=\|u_1\|^2=(u_1,u_1)=\det((u_1,u_1))$.
Įrodysime indukcinį teiginį $(m-1\Rightarrow m)$.
Tegu v yra aukštinės vektorius. Tada

$$u_m=a_1u_1+\cdots+a_{m-1}u_{m-1}+v,$$
$$(v,u_1)=\cdots=(v,u_{m-1})=0.$$

Tada

$$\det G_{(u_1,...,u_m)}=$$
$$\det\begin{pmatrix}(u_1,u_1) & \cdots & (u_1,u_{m-1}) & (u_1, a_1u_1+\cdots+a_{m-1}u_{m-1}+v)\\ (u_2,u_1) & \cdots & (u_2,u_{m-1}) & (u_2, a_1u_1+\cdots+a_{m-1}u_{m-1}+v)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (u_m,u_1) & \cdots & (u_m,u_{m-1}) & (u_m, a_1u_1+\cdots+a_{m-1}u_{m-1}+v)\end{pmatrix}.$$

Atimkime iš paskutiniojo stulpelio pirmąjį stulpelį padaugintą iš a_1, antrąjį stulpelį padaugintą iš a_2,..., m-1 -ąjį stulpelį padaugintą iš a_{m-1}. Turėsime

$$\det G_{(u_1,...,u_m)}=\det\begin{pmatrix}(u_1,u_1) & \cdots & (u_1,u_{m-1}) & (u_1,v)\\ (u_2,u_1) & \cdots & (u_2,u_{m-1}) & (u_2,v)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (u_m,u_1) & \cdots & (u_m,u_{m-1}) & (u_m,v)\end{pmatrix}=$$
$$\det\begin{pmatrix}(u_1,u_1) & \cdots & (u_1,u_{m-1}) & 0\\ (u_2,u_1) & \cdots & (u_2,u_{m-1}) & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (u_m,u_1) & \cdots & (u_m,u_{m-1}) & (u_m,v)\end{pmatrix}=$$
$$\det G_{(u_1,...,u_{m-1})}\cdot(u_m,v)=$$
$$(V_{m-1}(u_1,...,u_{m-1}))^2\cdot(a_1(u_1,v)+\cdots+a_{m-1}(u_{m-1},v)+(v,v))=$$
$$(V_{m-1}(u_1,...,u_{m-1}))^2\cdot(v,v)=(V_{m-1}(u_1,...,u_{m-1}))^2\cdot h^2=(V_m(u_1,...,u_m))^2.$$

Įrodyta.