

7 paskaita. Poerdviai. Veiksmi su poerdviais.

7.1 Apibrėžimas. Vektorinės erdvės V virš kūno \mathbf{K} netuščias poaibis U vadinamas **poerdviu**, jeigu

- 1) $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$ su visais $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$;
- 2) $a\mathbf{u} \in U$ su visais $a \in \mathbf{K}$ ir $\mathbf{u} \in U$.

Vektorinės erdvės V poerdvis U irgi yra vektorinė erdvė virš \mathbf{K} .

7.2 Positive Examples.

1. The whole space \mathbf{R}^n is a subspace of itself. And the set consisting of one vector, \mathbf{o} , is a subspace of any space.

2. In \mathbf{R}^2 , consider the set W of all vectors which are parallel to a given line L . It is clear that the sum of two vectors which are parallel to L is itself parallel to L , and a scalar multiple of a vector which is parallel to L is itself parallel to L . Thus W is a subspace.

3. A similar argument shows that in \mathbf{R}^3 , the set W of all vectors which are parallel to a given plane (line) is a subspace.

7.3 Negative Example.

In \mathbf{R}^2 , the set of all vectors which are parallel to one of two fixed non-parallel lines, is not a subspace. Indeed, if we take a non-zero vector parallel to one of the lines and add a non-zero vector parallel to another line, we get a vector which is parallel to neither of these lines.

Svarbiu vektorinio poerdvio pavyzdžiu yra homogeninės tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibė.

7.4 Teorema. Homogeninės tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad \quad \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{arba } AX = O \quad (1)$$

sprendinių aibė yra stulpelių aritmetinės erdvės \mathbf{K}_n poerdvis, kurio dimensija lygi $n - \text{rank}A$.

Įrodymas. Homogeninę tiesinių lygčių sistemą (1) užrašykime taip

$$x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n = \mathbf{o}$$

$$(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{o}$$

čia $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ – matricos A stulpeliai.

Tegu $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ir $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ – sistemos (1) sprendiniai, t.y.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n &= \mathbf{o} \\ \beta_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{u}_n &= \mathbf{o} \end{aligned}$$

todėl

$$(a\alpha_1 + b\beta_1) \mathbf{u}_1 + \dots + (a\alpha_n + b\beta_n) \mathbf{u}_n = \mathbf{o}$$

ir vektorius $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ yra sistemos (1) sprendinys. Gavome, kad sprendinių aibė yra stulpelių aritmetinės erdvės \mathbf{K}_n poerdvis.

Tarp tiesinės lygčių sistemos (1) matricos A stulpelių yra $r = \text{rank } A$ tiesiškai nepriklausomų stulpelių. Tegu tai stulpeliai $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$. Tada likusius $n - r$ stulpelius užrašykime jų tiesinėmis kombinacijomis:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{r+1} &= b_{r+1,1} \mathbf{u}_1 + \dots + b_{r+1,r} \mathbf{u}_r \\ &\quad \dots \\ \mathbf{u}_n &= b_{n1} \mathbf{u}_1 + \dots + b_{nr} \mathbf{u}_r \end{aligned}$$

Nesunku matyti, kad tiesiškai nepriklausomi stulpeliai

$$\mathbf{z}_{r+1} = \begin{pmatrix} b_{r+1,1} \\ \dots \\ b_{r+1,r} \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{z}_n = \begin{pmatrix} b_{n1} \\ \dots \\ b_{nr} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

yra sistemos (1) sprendiniai.

Tegu $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_r \\ \gamma_{r+1} \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ – kuris nors sistemos (1) sprendinys. Tada

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}' + \gamma_{r+1}\mathbf{z}_{r+1} + \dots + \gamma_n\mathbf{z}_n$$

irgi yra šios sistemos sprendinys. Vektoriaus \mathbf{w} komponentės, pradedant $(r+1)$ -ąją, yra lygios 0. Lygiomis nuliui bus ir likusios r komponentių, nes vektorių sistema $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ – tiesiškai nepriklausoma.

Taigi,

$$\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

ir

$$\mathbf{v}' = -\gamma_{r+1}\mathbf{z}_{r+1} - \dots - \gamma_n\mathbf{z}_n,$$

t.y. stulpeliai $\mathbf{z}_{r+1}, \dots, \mathbf{z}_n$ – tiesiškai nepriklausoma sistema, generuojanti sistemos (1) sprendinių poerdvį. Ši sistema vadinama sistemos (1) *fundamentaliąja sprendinių sistema*.

Irodyta.

7.5 Pavyzdys. Nagrinėkime homogeninę lygtį

$$ax + by = 0.$$

Šios homogeninės lygties sprendinių aibė yra stulpelio $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ tiesinis apvalkalas $T = \left[\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right]$. Geometriškai – tai plokštumos tiesė, einanti per koordinatų pradžią vektoriaus $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ kryptimi.

Poerdvių suma ir sankirta.

7.6 Apibrėžimas. Vektorinės erdvės V poerdvių U ir W suma vadiname V poerdvį

$$U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}.$$

Vektorinės erdvės V poerdvių U ir W sankirta vadiname V poerdvį

$$U \cap W = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \in U \text{ ir } \mathbf{v} \in W\}.$$

7.6 Pastaba. 1) Poerdvių suma $U + W$ yra mažiausias V poerdvis, kuriame yra poerdviai U ir W .

2) Poerdvių sankirta $U \cap W$ yra didžiausias V poerdvis, esantis ir poerdvyje U ir poerdvyje W .

7.7 Teorema(apie poerdvių sumos ir sankirtos dimensijas)

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

Irodymas. Tegū $\dim U + W = r$, $\dim U \cap W = p$, $\dim U = s$ ir $\dim W = t$. ir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ – poerdvio $U \cap W$ bazė. Papildykime šią bazę iki poerdvių U ir W bazių:

tegu $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_s$ – U bazė, o $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}'_{p+1}, \dots, \mathbf{v}'_t$ – W bazė.

Parodysime, kad vektorių sistema

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}'_{p+1}, \dots, \mathbf{v}'_t \quad (2)$$

yra poerdvio $U + W$ bazė, t.y. kad ši sistema yra generuojanti ir tiesiškai nepriklausoma sistema.

Tegu \mathbf{v} – bet kuris poerdvio $U + W$ vektorius, t.y. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, čia $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$. Taigi,

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_p \mathbf{v}_p + a_{p+1} \mathbf{v}_{p+1} + \dots + a_s \mathbf{v}_s$$

ir

$$\mathbf{w} = b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_p \mathbf{v}_p + b_{p+1} \mathbf{v}'_{p+1} + \dots + b_t \mathbf{v}'_t.$$

Turime

$$\mathbf{v} = (a_1 + b_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (a_p + b_p) \mathbf{v}_p + a_{p+1} \mathbf{v}_{p+1} + \dots + a_s \mathbf{v}_s + b_{p+1} \mathbf{v}'_{p+1} + \dots + b_t \mathbf{v}'_t$$

ir todėl vektorių sistema $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}'_{p+1}, \dots, \mathbf{v}'_t$ generuoja $U + W$. Irodysime šios sistemos tiesišką nepriklausomybę. Tegū

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_p \mathbf{v}_p + c_{p+1} \mathbf{v}_{p+1} + \cdots + c_s \mathbf{v}_s + c'_{p+1} \mathbf{v}'_{p+1} + \cdots + c'_t \mathbf{v}'_t = \mathbf{o}.$$

Tada vektorius

$$\mathbf{z} = c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_p \mathbf{v}_p + \underbrace{c_{p+1} \mathbf{v}_{p+1} + \cdots + c_s \mathbf{v}_s}_{\in U} = - \underbrace{c'_{p+1} \mathbf{v}'_{p+1} - \cdots - c'_t \mathbf{v}'_t}_{\in W}$$

priklauso $U \cap W$ ir todėl

$$\mathbf{z} = a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_p \mathbf{v}_p.$$

Gavome, kad

$$\begin{aligned} a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_p \mathbf{v}_p &= -c'_{p+1} \mathbf{v}'_{p+1} - \cdots - c'_t \mathbf{v}'_t, \\ a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_p \mathbf{v}_p + c'_{p+1} \mathbf{v}'_{p+1} + \cdots + c'_t \mathbf{v}'_t &= \mathbf{o} \end{aligned}$$

ir

$$a_1 = \cdots = a_p = c'_{p+1} = \cdots = c'_t = 0,$$

nes vektoriai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}'_{p+1}, \dots, \mathbf{v}'_t$ tiesiškai nepriklausoma sistema (W -bazė). Taigi, $\mathbf{z} = \mathbf{o}$.

Turime

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_p \mathbf{v}_p + c_{p+1} \mathbf{v}_{p+1} + \cdots + c_s \mathbf{v}_s = \mathbf{o}$$

ir

$$c_1 = \cdots = c_p = c_{p+1} = \cdots = c_s = 0,$$

nes vektoriai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_s$ tiesiškai nepriklausoma sistema (U -bazė).

Įrodėme vektorių sistemos (2) tiesišką nepriklausomybę ir tuo pačiu tai, kad ji yra $U + W$ bazė. Poerdvių $U, W, U + V$ ir $U \cap W$ dimensijoms turime lygybes:

$$\dim U + V = s + t - p = \dim U + \dim V - \dim U \cap V.$$

Įrodyta.

Paskutinioji teorema formuoja mūsų intuiciją apie poerdvių padėtį daugiamatėse vektorinėse erdvėse.

7.8 Pavyzdys. Tegu U ir W yra vektorinės erdvės \mathbf{R}^5 poerdviai. Šių poerdvių padėtis pateiksime lentelėje:

n	$\dim U$	$\dim W$	$\dim(U \cap W)$	$\dim(U + W)$	poerdvių padėtis
2	1	1	0	2	tiesės kertasi taške
2	1	1	1	1	tiesės sutampa
3	2	2	1	3	plokštumos kertasi tiese
3	2	2	2	2	plokštumos sutampa
4	2	2	0	4	plokštumos kertasi taške
4	2	2	1	3	plokštumos kertasi tiese
4	2	2	2	2	plokštumos sutampa
5	3	2	0	5	erdvė ir plokštuma kertasi taške
5	3	2	1	4	erdvė ir plokštuma kertasi tiese
5	3	2	2	3	plokštuma yra erdvėje