2. FUNKCIJOS

Funkcijos sąvoka yra viena iš pagrindinių matematikos sąvokų. Priminsime, jei A ir B yra netuščios aibės, tai funkcija f, kurios apibrėžimo sritis yra aibė A, o reikšmių sritis – aibė B, kiekvienam $a \in A$ priskiria vienintelį elementą $b \in B$. Elementas b vadinamas elemento a vaizdu ir žymimas $b = f(a)$. Sakoma, kad yra žinoma funkcija f iš aibės A į aibę B ir žymima $f : A \to B$.

Funkcijos $f : A \to B$ vaizdu vadiname aibę

$$\operatorname{Im} f = \{f(a) \mid a \in A\} = f(A) \subseteq B,$$

o aibė $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\} \subseteq A$ vadinama elemento $b \in B$ *pirmavaizdžiu*. Aibės $B_\circ \subseteq B$ pirmavaizdžiu vadinama aibė $f^{-1}\big(B_\circ\big) = \{a \in A \mid f(a) \in B_\circ\} = \bigcup\limits_{b \in B_\circ} f^{-1}(b)$.

Binarųjį sąryšį suprantant kaip aibės $A \times B$ poaibį, funkciją f galima apibrėžti ir kaip sąryšį $F \subseteq A \times B$, tenkinantį sąlygą: su visais $a \in A$, $b_1, b_2 \in B$ iš $(a, b_1) \in F$, $(a, b_2) \in F$ išplaukia $b_1 = b_2$, t.y. aibės $f(a) = \{b \mid (a, b) \in F\}$ galia $\leqslant 1$.

Kita vertus, kiekvieną binarųjį sąryšį $R \subseteq A \times B$ galima išreikšti funkcija $f_R : A \times B \to \{0, 1\}$. Priminsime, kad

$$f_R(a,b) = \begin{cases} 1, & (a,b) \in R, \\ 0, & (a,b) \notin R. \end{cases}$$

Ši funkcija gali būti apibrėžta kaip sąryšis $R_f \subseteq (A \times B) \times \{0, 1\}$:

$$\big((a,b), c\big) \in R_f \iff f_R(a,b) = c.$$

Taigi tarp binarių sąryšių ir funkcijų yra glaudus ryšis.

Aišku, kad funkcijai $f : A \to B$ ir sąryšiui $F = \{(a,b) | a \in A, b = f(a)\}$ aibė $F^{-1} = \{(f(a), a) \mid (a, f(a)) \in F\}$ yra sąryšis $F^{-1} \subseteq B \times A$, bet ne visada funkcija iš B į A.

3.1 pavyzdys. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f : A \to B$; $f(n) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

Aibė $f^{-1}(m) \neq \emptyset$ tada ir tik tada, kai m lyginis skaičius, todėl funkcijai $F = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A \times B$ sąryšis $F^{-1} = \{(2n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ nėra funkcija iš B į A.

3.2 pavyzdys. $A = Z - \{0\}$, $B = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$, $f : A \to B; f(n) = n^2$, $n \in A$.

Aibė $f^{-1}(m) \neq \emptyset$ su visais m, bet funkcijai $F = \{(n, n^2) \mid n \in A\} = A \times B$ sąryšis $F^{-1} = \{(m, n) \mid n^2 = m,\ n \in A,\ m \in B\}$ nėra funkcija, nes $f^{-1}(4) = \{(4, 2),\ (4, -2)\}$.

3.3 apibrėžimai. *1. Funkcija $f : A \to B$ vadinama injektyviąja, arba injekcija, jeigu su visais $a_1, a_2 \in A$, $b \in B$ iš to, kad $f(a_1) = b$, $f(a_2) = b$ išplaukia $a_1 = a_2$, arba su visais $a_1, a_2 \in A$ ir $a_1 \neq a_2$ gauname $f(a_1) \neq f(a_2)$.*

2. Funkcija $f : A \to B$ vadinama siurjektyviąja, arba siurjekcija, jeigu $f(A) = B$, t.y. bet kuriam $b \in B$ egzistuoja toks $a \in A$ toks, kad $f(a) = b$.

3. Funkcija $f : A \to B$ vadinama bijektyviąja, arba bijekcija, jeigu ji yra ir injektyvi, ir siurjektyvi.

3.4 pavyzdžiai. 1. Tapati funkcija $id_A : A \to A$, $id_A(a) = a$, $a \in A$ yra bijekcija.

2. Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kiekvienam natūraliajam n priskirianti Fibonačio skaičių $fb_n : f(n) = fb_n$, yra nei injektyvi, nes $fb_1 = fb_2$, nei siurjektyvi, nes $f^{-1}(4) = \emptyset$.

3. Funkcija $\varphi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $\varphi_n(a) = K_n(a) = \overline{a}$ yra siurjektyvi, nes bet koks sveikasis $a \in \overline{a}$, bet nėra injektyvi, nes $\varphi_n(a) = \varphi_n(a + n)$, $a \in \mathbb{Z}$.

4. Funkcija succ : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, apibrėžta formule $\mathrm{succ}(n) = n + 1$, yra injektyvi, bet nėra siurjektyvi, nes $\mathrm{succ}^{-1}(1) = \emptyset$.

Jau matėme, kad ne visada funkcijai f sąryšis F^{-1} yra funkcija. Atsakysime į klausimą, kada sąryšis F^{-1} yra funkcija. Tam talkins viena iš svarbiausių operacijų su funkcijomis – *funkcijų kompozicija (superpozicija, sandauga).*

3.5 apibrėžimas. *Funkcijų $g : A \to B$ ir $f : B \to C$ kompozicija vadinama funkcija iš aibės A į aibę C , žymima $f \circ g : A \to C$ ir apibrėžta lygybe $(f \circ g)(a) = f\big(g(a)\big)$, $\forall a \in A$.*

Funkcijų f ir g kompoziciją, kurią vėliau žymėsime fg, patogu reikšti diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "fg"] \arrow[dr, "g"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Ši diagrama vadina komutatyviąja, t.y. elemento $a \in A$ vaizdas aibėje C nepriklauso nuo to, ar mes veiksime šį elementą funkcija fg, ar paveikę funkcija g, elementą $g(a) \in B$ veiksime funkcija f.

3.6 pavyzdžiai. 1. Jei $f : A \to B$, tai $f\, id_A = f$, $id_B f = f$.

2. Tegu funkcija $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ apibrėžta lygybe $+(a, b) = a + b$, o funkcija $\varphi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $\varphi_n(a) = K_n(a)$. Tai funkcija $+_n = \varphi_n \circ +$, apibrėžiama lygybe $+_n(a, b) = K_n(a + b) = \overline{a + b}$. Atskiru atveju, kai $n = 5$, tai $+_5(3, 8) = \overline{3 + 8} = \overline{11} = \overline{1}$.

Funkcijų kompozicija išsiskiria svarbia savybe:

3.7 teiginys (kompozicijos asociatyvumas). *Jeigu $h : A \to B$, $g : B \to C$, $f : C \to D$ yra trys funkcijos, tai $f(gh) = (fg)h$.*

Įrodymas. Kai $a \in A$, tai $\big(f(gh)\big)(a) = f\big((gh)(a)\big) = f\Big(g\big(h(a)\big)\Big) = (fg)\big(h(a)\big) = \big((fg)h\big)(a)$.

$\triangle$

3.8 pastaba. *Funkcijų $f, g : A \to A$ kompozicija ne visada komutatyvi.*

Pavyzdžiui, jei $f : A \to A$, $f(a) = b$ su visais $a \in A$, o $g : A \to A$, $g(a) = c$ su visais $a \in A$, $b \neq c$, tai $(fg)(a) = b \neq c = (gf)(a)$ su visais $a \in A$.

3.9 apibrėžimas. *Tegu $f : A \to B$, $g : B \to A$ tokios funkcijos, kurioms apibrėžtos kompozicijos fg ir gf. Sakoma, kad funkcija g yra atvirkštinė funkcijai f, jeigu*

$$gf = id_A, \qquad fg = id_B.$$

Žymima $g = f^{-1}$.

Pastebėsime, jeigu $f(a) = b$, tai $f^{-1}(b) = a$ bet kokiems $a \in A$ ir $b \in B$. Dabar esame pasirengę pateikti funkcijos f atvirkštinės funkcijos f^{-1} egzistavimo sąlygą.

3.10 teiginys. *Tegu* $f : A \to B$, $g, g' : B \to A$. *Tada:*

1) jeigu $fg = fg' = id_B$, $gf = g'f = id_A$, *tai* $g = g'$ *(atvirkštinės funkcijos vienatinumas);*

2) funkcija f *turi atvirkštinę tada ir tik tada, kai* f *yra bijekcija (atvirkštinės funkcijos egzistavimo sąlyga).*

Įrodymas. 1) $g' = id_A g' = (gf)g' = g(fg') = g\, id_B = g$.

2) Tegu egzistuoja f^{-1}. Tada, jeigu $f(a) = f(a')$, $a, a' \in A$, tai $a = id_A(a) = \big(f^{-1}f\big)(a) = f^{-1}\big(f(a)\big) = f^{-1}\big(f(a')\big) = \big(f^{-1}f\big)(a') = id_A(a') = a'$. Taigi funkcija f yra injekcija. Jeigu $b \in B$, tai $b = id_B(b) = \big(f\, f^{-1}\big)(b) = f\big(f^{-1}(b)\big)$, taigi f yra siurjekcija ir todėl bijekcija. Kita vertus, jei f yra bijektyvi funkcija, tai kiekvienam $b \in B$ galima vienareikšmiškai priskirti tokį $a \in A$, kad galiotų lygybė $f(a) = b$. Šis priskyrimas yra funkcija $g : B \to A$, $g(b) = a$, išsiskirianti savybėmis: $fg = id_B$, $gf = id_A$. Taigi $g = f^{-1}$.

$\triangle$

Pateiksime funkcijų ir jų kompozicijų savybes.

3.11 teiginys. *Tegu* $f : A \to B$, $g : B \to C$. *Tada:*

1) jeigu f, g *yra injektyvios funkcijos, tai* $g \circ f$ *irgi injektyvi;*

2) jeigu f, g *yra siurjektyvios funkcijos, tai* $g \circ f$ *irgi siurjektyvi;*

3) jeigu f, g *yra bijektyvios funkcijos, tai* $g \circ f$ *irgi bijektyvi ir*

$$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}.$$

Įrodymas. Mes įrodysime 3) teiginio dalį, kitas palikdami įrodyti savarankiškai.

Kadangi f ir g yra bijekcijos, tai egzistuoja jų atvirkštinės funkcijos $f^{-1} : B \to A$, $g^{-1} : C \to B$ ir šių funkcijų kompozicija $f^{-1}g^{-1} : C \to A$. Ši funkcijų kompozicija yra atvirkštinė funkcijai gf, nes

$$\begin{aligned}(gf)\big(f^{-1}g^{-1}\big) &= \big((gf)f^{-1}\big)g^{-1} = \big(g(f\, f^{-1})\big)g^{-1} \\ &= \big(g\, id_B\big)g^{-1} = g\, g^{-1} = id_C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(f^{-1}g^{-1}\big)(gf) &= f^{-1}\big(g^{-1}(gf)\big) = f^{-1}\big((g^{-1}g)f\big) \\ &= f^{-1}\big(id_B f\big) = f^{-1}f = id_A.\end{aligned}$$

$\triangle$

Baigtines aibes apibūdina toks teiginys:

3.12 teiginys. *Aibė A yra baigtinė tada ir tik tada, kai patenkinta viena iš sąlygų:*

1) jeigu $f : A \to A$ yra injekcija, tai f – bijekcija;

2) jeigu $f : A \to A$ yra siurjekcija, tai f – bijekcija;

3) egzistuoja toks natūralusis n ir bijekcija iš aibės A į aibę $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Įrodymas. Įrodysime tik tai, kad, jeigu A yra baigtinė aibė, o $f : A \to A$ yra injekcija, tai f – siurjekcija, kartu ir bijekcija.

Kadangi A – baigtinė aibė, tai kiekvienam $a \in A$ begalinėje sekoje

$$\begin{aligned} a &= f^0(a), f^1(a), f^2(a) = f\,f(a), \ldots, f^k(a) = f\,f^{k-1}(a) \\ &= \underbrace{(f\,f \ldots f)}_{k}(a), \ldots \end{aligned}$$

būtinai surasime du sutampančius elementus: $f^n(a) = f^m(a)$, $n > m$. Jeigu $m > 0$, tai iš f injektyvumo ir lygybės $f\big(f^{n-1}(a)\big) = f\big(f^{m-1}(a)\big)$ gausime $f^{n-1}(a) = f^{m-1}(a)$, $n-1 > m-1$. Jeigu $m-1 > 0$, tai pakartoję minėtą prastinimą baigtinį skaičių kartų, turėsime $f^{n-m}(a) = f^0(a) = a$, $n - m > 0$. Tada $f\big(f^{n-m-1}(a)\big) = a$. Tai įrodo f siurjektyvumą.

$\triangle$

Glaudžiausias ryšys tarp funkcijų ir ekvivalentumo sąryšių yra funkcijų faktorizacijos operacijoje.

Tegu $f : A \to B$. Binarusis sąryšis $E_f = \{(a, a') \mid f(a) = f(a')\} \subseteq$ A $\times$ A yra ekvivalentumo sąryšis, nes:

1) $(a, a) \in E_f$, t.y., $f(a) = f(a)$;

2) jeigu $(a, a') \in E_f$, tai $(a', a) \in E_f$, t.y., jeigu $f(a) = f(a')$, tai $f(a') = f(a)$;

3) jeigu $(a, a'), (a', a'') \in E_f$, tai $(a, a'') \in E_f$, t.y., jeigu $f(a) = f(a')$ ir $f(a') = f(a'')$, tai $f(a) = f(a'')$.

Ekvivalentumo klasės $K_{E_f}(a) = \{a' \mid f(a') = f(a)\}$ sudaro faktoraibę $A/_{E_f}$, kurioje apibrėžiama funkcija $\overline{f} : A/_{E_f} \to B$:

$$\overline{f}(K(a)) = f(a).$$

Funkcijos $\overline{f}$ apibrėžimas yra korektiškas ta prasme, kad, jeigu $a_1, a_2 \in K(a)$, tai $\overline{f}\big(K(a_1)\big) = \overline{f}\big(K(a)\big) = f(a) = \overline{f}\big(K(a)\big) = \overline{f}\big(K(a_2)\big)$, nes $f(a_1) = f(a_2)$.

Sakoma, kad funkcija f indukuoja funkciją $\overline{f}$.

3.13 teiginys. *Tegu $f : A \to B$, o siurjektyvioji funkcija $p : A \to A/_{E_f}$, $p(a) = K_{E_f}(a)$ yra aibės A kanoninė projekcija faktoraibėje $A/_{E_f}$, tai egzistuoja vienintelė funkcija $\overline{f} : A/_{E_f} \to B$, kurios dėka diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & {}_p\searrow \quad \nearrow_{\overline{f}} & \\ & A/_{E_f} & \end{array}$$

yra komutatyvi, t.y. $f = \overline{f}\,p$; čia: $\overline{f}$ – injekcija, o p – siurjekcija. Ši funkcijų $\overline{f}$ ir p kompozicija ir vadinama funkcijos f faktorizacija.

Įrodymas. Įrodysime funkcijos $\overline{f}$ vienatinumą. Kiti teiginiai – tai tiesioginės apibrėžimų išvados.

Tegu $\overline{f}_1 : A/_{E_f} \to B$ ir $\overline{f}_1 p = f$, tada

$$\overline{f}_1\big(K(a)\big) = \overline{f}_1\big(p(a)\big) = \big(\overline{f}_1 p\big)(a) = f(a) = \overline{f}\big(K(a)\big).$$

Taigi $\overline{f}_1 = \overline{f}$.

$\triangle$

3.14 pavyzdžiai. 1. Tegu $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f_2(n) = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Tada funkcija f_2 yra siurjekcijos $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{E_{f_2}} = \big\{K_{f_2}(n) = \{n, -n\}, n \in \mathbb{Z}\big\}$ ir injekcijos $\overline{f}_2 : \mathbb{Z}/_{E_{f_2}} \to \mathbb{N}$ kompozicija $f_2 = \overline{f}_2 p$.

2. Tegu $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f_1(n) = |n|$, $n \in \mathbb{Z}$. Tada funkcija f_1 yra siurjekcijos $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{E_{f_1}} = \mathbb{Z}/_{E_{f_2}} = \big\{K_{f_1}(n) = \{n, -n\}, n \in \mathbb{Z}\big\}$ ir injekcijos $\overline{f}_1 : \mathbb{Z}/_{E_{f_1}} \to \mathbb{N}$ kompozicija: $f_1 = \overline{f}_1 p$.

Tegu E yra ekvivalentumo sąryšis aibėje A, o $f : A \to B$ – tokia funkcija, kurios ekvivalentumo sąryšį E_f atitinkantis aibės A skaidinys π_f yra sąryšį E atitinkančio aibės A skaidinio π viršskaidinys, t.y. jeigu $\pi = \big\{A_i \mid i \in I\big\}$, o $\pi_f = \big\{A'_j \mid j \in I\big\}$, tai bet kuriam $i \in I$ egzistuoja toks $j \in I$, kad $A_i \subseteq \mathrm{A}'_{\mathrm{j}}$. Tokiu atveju sakoma, kad funkcija f yra suderinama su ekvivalentumo sąryšiu E: kai $a_1 E a_2$, tai $f(a_1) = f(a_2)$. Tada vėl galime apibrėžti indukuotąją funkciją $\overline{f} : A/E \to B$, $\overline{f}\big(K_E(a)\big) = f(a)$, kurios dėka diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & p\searrow \quad \nearrow\overline{f} & \\ & A\big/_{E} & \end{array}$$

yra komutatyvi. Tiesa, funkcijos f faktorizacijoje $f = \overline{f}\,p$ funkcija $\overline{f}$ jau nebūtinai injektyvi funkcija.

3.16 pavyzdys.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathbb{Z}_2 \\ & p\searrow \quad \nearrow\overline{f} & \\ & \mathbb{Z}\big/_{E_{|n|}} & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \varphi_2 = \overline{f}\,p, \\ \overline{f}\big(K(2n)\big) = \overline{0}, \\ \overline{f}\big(K(2n+1)\big) = \overline{1}, \;\; n \in \mathbb{Z}. \end{array}$$