1. AIBĖS IR SĄRYŠIAI

Viena iš matematikos sričių – *aibių teorija*, – aibės sąvokos naudojimą apibrėžia aksiomomis. Tai aibių teorijos vystymosi rezultatas. Tačiau iš pradžių aibės sąvoka buvo suprantama intuityviai – tai „naivusis“ aibių teorijos periodas, kurio pradininkas buvo aibių teorijos kūrėjas G. Kantoras[1]. Mūsų reikmėms pakaks tokio intuityvaus aibės sąvokos apibūdinimo.

1.1 apibrėžimas. *1. Sąvokos „aibė“ ir „elementas priklauso aibei“ yra pirminės ir todėl neapibrėžiamos.*

2. Jeigu elementas x priklauso aibei A, tai rašysime $x \in A$, o jeigu ne – $x \notin A$.

3. Aibė, neturinti elementų, bus vadinama tuščiąja aibe. Žymėsime $\emptyset$. Pastebėsime, su bet kuriuo x, $x \notin \emptyset$.

1.7 pavyzdys. Tegu A – baigtinė aibė, o skaičius 2 žymi aibę $\{0, 1\}$. Šis žymuo paaiškinamas tuo, kad kiekvienam aibės A poaibiui B apibrėžiama funkcija f, kurios reikšmės yra aibėje 2,

$$f_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad x \in B, \\ 0, & \text{kai} \quad x \notin B, \end{cases}$$

o kiekviena funkcija $f : A \to 2$ apibrėžia tokį aibės A poaibį

$$B_f = \{x \mid f(x) = 1\},$$

kad $f_{B_f} = f$. Todėl abi aibes $\{f | f : A \to 2\}$ ir $\{B : B \subseteq A\}$ žymime vienodai – 2^A. Be to, remiantis dvejopu aibės 2^A apibūdinimu, nesunku suprasti, kad aibės 2^A elementų skaičius (aibės galia) $|2^A|$ yra lygus $2^{|A|}$.

Iš tikrųjų kiekviena funkcija $f \in 2^A$ kiekvienam $x \in A$ gali įgyti dvi reikšmes iš aibės $\{0, 1\}$. Vadinasi,

$$|2^A| = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{|A|} = 2^{|A|}.$$

[1] G. Cantor, 1845–1918, – vokiečių matematikas.

1.8 pastaba. $\phi \in 2^A$, $A \in 2^A$, *bet* $2^{\phi} \neq \phi$, *nes* $2^{\phi} = \{\phi\}$!

O5. Tegu B ir C – bet kokios aibės. Elementų $x \in B$ ir $y \in C$ „poros“ sąvoką suprasime intuityviai ir žymėsime žymeniu (x, y). Dvi poras (x_1, y_1) ir (x_2, y_2) vadinsime lygiomis, jeigu $x_1 = x_2$ ir $y_1 = y_2$. Visų porų aibė $\{(x, y) | x \in B, y \in C\}$ vadinama aibių B ir C dekartine sandauga ir žymima $B \times C$:

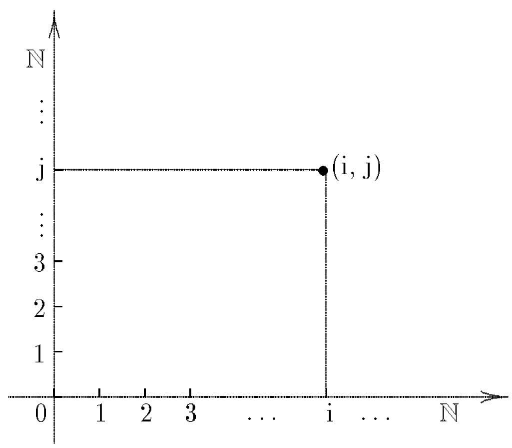
$$B \times C = \big\{(x, y) \mid x \in B,\ y \in C\big\}.$$

1.10 pavyzdys. Jei $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, tai

$$B \times C = \big\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\big\},$$
$$C \times B = \big\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\big\}.$$

1.11 pavyzdys. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ yra plokštumos, kurioje yra dekartinė koordinačių sistema, visų taškų koordinačių aibė.

1.12 pavyzdys. Aibės $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ elementus galima pavaizduoti taip:



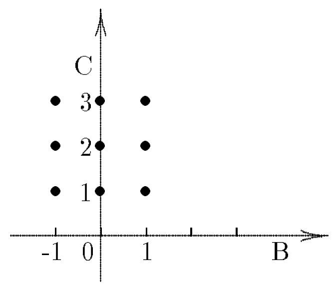
Dekartinė sandauga apibendrinama bet kuriai baigtinei aibių $A_1, A_2, ..., A_n$ sistemai. Elementų $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n$ „sekos“

sąvoką suprasime intuityviai ir žymėsime žymeniu $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Dvi sekos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ir $(y_1, y_2, ..., y_n)$ vadinamos lygiomis, jeigu $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$. Visų sekų aibė $\{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n\}$ vadinama aibių $A_1, A_2, ..., A_n$ dekartine sandauga ir žymima:

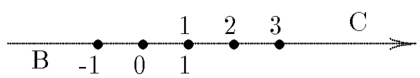
$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}.$$

Jeigu $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, tai rašoma $A^n = A \times A \times \ldots \times A$.

1.13 pavyzdys. Jei $B = \{-1, 0, 1\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, tai



aibės $B \times C$ elementai pavaizduoti plokštumoje su dekartine koordinačių sistema, o aibės $B \cup C$ elementai pavaizduoti skaičių tiesėje



2.1 apibrėžimas. *Binariniu sąryšiu R netuščioje aibėje A vadinamas dekartinės sandaugos $A \times A$ poaibis $R \subseteq A \times A$. Sakoma, kad aibės A elementai a, b yra sąryšyje R, jeigu $(a, b) \in R$. Žymima aRb.*

2.2 pavyzdys. Aibėje 2^A apibrėžiamas sąryšis $R =$„$\subseteq$“:

$$R = \{(B, C) \mid B, C \in 2^A \text{ ir } B \subseteq C\}.$$

2.3 pavyzdys. Sveikųjų skaičių aibėje $\mathbb{Z}$ apibrėžiamas sąryšis „mažiau“: $\{(n,m)\,|\,m-n$ yra teigiamas skaičius$\} \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Rašome $n<m$.

Dažnai sąryšis $R \subseteq A\times A$ reiškiamas matrica. Matricos eilutės ir stulpeliai žymimi aibės A elementais, o pačios matricos elementai – 0 arba 1 apibrėžiami taip: jeigu aRb, tai eilutės, kurioje yra a, ir stulpelio, kuriame yra b, susikirtime yra 1, o jeigu $(a,b)\notin R$, tai 0.

2.4 pavyzdys. $A=\{0,1,2\}$, $2^A=\{\,\emptyset;\{0\};\{1\};\{2\};\{0,1\};\{0,2\};\{1,2\};\{0,1,2\}\}$. Sąryšį „$\subseteq$“ reiškiame matrica, kurios stulpeliai ir eilutės pažymėti aibės 2^A elementais. Stulpelio, kurį žymi aibė B, ir eilutės, kurią žymi aibė C, susikirtimo vietoje rašomas 1, jeigu B yra C poaibis, ir 0, jeigu B nėra C poaibis.

	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,2\}$	$\{0,1,2\}$	B
$\emptyset$	1	0	0	0	0	0	0	0	
$\{0\}$	1	1	0	0	0	0	0	0	
$\{1\}$	1	0	1	0	0	0	0	0	
$\{2\}$	1	0	0	1	0	0	0	0	
$\{0,1\}$	1	1	1	0	1	0	0	0	
$\{0,2\}$	1	1	0	1	0	1	0	0	
$\{1,2\}$	1	0	1	1	0	0	1	0	
$\{0,1,2\}$	1	1	1	1	1	1	1	1	
C									

2.5 pavyzdys. Nagrinėkime aibės A tapatųjį sąryšį $I_A=\{(a,a)\,|\,a\in A\}\subseteq A\times A$. Šio sąryšio matricoje tik pagrindinėje įstrižainėje yra 1.

	1	0	0	0	...
	0	1	0	0	...
	0	0	1	0	...
	0	0	0		
	...	...	...		

Kiekvienam aibės A sąryšiui $R \subseteq A \times A$ apibrėžiamas atvirkštinis sąryšis $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$. Sąryšio R^{-1} matrica yra lygi transponuotai sąryšio R matricai. Aišku, kad $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.

2.6 pavyzdys. Sąryšiui „$\subseteq$“ aibėje 2^A atvirkštinis yra sąryšis „$\supseteq$“; o sąryšiui „$<$“ aibėje $\mathbb{Z}$ atvirkštinis yra sąryšis „$>$“.

2.7 apibrėžimas. *Binarusis sąryšis E aibėje A vadinamas ekvivalentumo sąryšiu, jeigu jam galioja:*

1) refleksyvumas – su visais $a \in A$ teisinga aEa, t.y. $(a,a) \in E$, $I_A \subseteq E$;

2) simetriškumas – jei aEb, tai bEa, t.y. $E = E^{-1}$;

3) tranzityvumas – jei aEb ir bEc, tai aEc.

2.8 pastaba. *Ekvivalentumo sąryšio matrica yra simetrinė matrica, kurios pagrindinėje įstrižainėje yra tik vienetai.*

2.9 pavyzdys. Lygybė yra ekvivalentumo sąryšis aibėje A:

1) $a = a$ su visais $a \in A$;

2) jei $a = b$, tai $b = a$ visiems $a, b \in A$;

3) jei $a = b$, $b = c$, tai $a = c$ visiems $a, b, c \in A$.

2.10 apibrėžimas. *Aibės A poaibių sistema $\pi = \pi(A) = \left\{A_i \in 2^A \mid i \in I\right\}$ vadinama aibės A skaidiniu, jei:*

1) $A_i \in \pi$, tai $A_i \neq \emptyset$;

2) $A_i \in \pi$ ir $A_j \in \pi$, tai $A_i \cap A_j = \emptyset$ su visais $i, j \in I$, $i \neq j$;

3) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$.

2.11 pavyzdžiai.

1. $\pi_1(A) = \left\{\{a\} \mid a \in A\right\}$.
2. $\pi_2(A) = \{A\}$.
3. $\pi\left(\{1,2,3,4,5,6\}\right) = \left\{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}\right\}$.

2.12 teiginys. *Tegu $\pi(A) = \{A_i \mid i \in I\}$ yra aibės A skaidinys, o sąryšis R_π aibėje A apibrėžiamas taip: $aR_\pi b$, $a \in A_i$ ir $b \in A_j$ tada ir tik tada, kai $i = j$. Tada R_π yra ekvivalentumo sąryšis.*

Įrodymas. Nagrinėkime elementų porą $a, b \in A$. Kadangi $\pi(A)$ yra nepersikertančių poaibių $\{A_i\}$ sistema, todėl egzistuoja tik vienas toks $i \in I$ ir vienas toks $j \in I$, kad $a \in A_i$, $b \in A_j$.

Sąryšio R_π refleksyvumas: jei $aR_\pi a$, $a \in A_i$ ir $a \in A_j$, tai $i = j$.

Sąryšio R_π simetriškumas: jei $aR_\pi b$, $a \in A_i$ ir $b \in A_j$, tai $i = j$ ir todėl $bR_\pi a$.

Sąryšio R_π tranzityvumas: jei $aR_\pi b$ ir $bR_\pi c$, ir $a \in A_i$, $b \in A_j$, $c \in A_k$, tai $i = j$, $j = k$, $i = k$ ir $aR_\pi c$.

$\triangle$

Tarp ekvivalentumo sąryšių ir skaidinių yra abipusiškai vienareikšmė atitiktis. Ne tik skaidinys apibrėžia ekvivalentumo sąryšį, bet ir ekvivalentumo sąryšis apibrėžia skaidinį.

2.13 apibrėžimas. *Tegu $a \in A$ ir $E \subseteq A \times A$ yra ekvivalentumo sąryšis. Tada aibė $K_E(a) = \{b \mid aEb\}$ yra vadinama elemento a ekvivalentumo klase. Kai aišku, apie kokį ekvivalentumo sąryšį kalbama, ekvivalentumo klasė žymima $K(a)$. Jeigu $b, c \in K(a)$, tai b ir c vadinami ekvivalenčiaisiais elementais, arba ekvivalentumo klasės $K(a)$ atstovais. Visų ekvivalentumo klasių aibė $\{K_E(a) \mid a \in A\}$ vadinama aibės A faktoraibe ekvivalentumo sąryšio E atžvilgiu ir žymima $A/_E$.*

2.14 teiginys. *Tegu E yra ekvivalentumo sąryšis aibėje A. Tada faktoraibė $A/_E$ yra toks aibės A skaidinys π, kad $R_\pi = E$.*

Įrodymas. Iš pradžių įrodysime, kad $\{K_E(a) \mid a \in A\}$ yra aibės A skaidinys.

1) Su visais $a \in A$ $K(a) \neq \emptyset$, nes iš E refleksyvumo gauname, kad $a \in K(a)$.

2) Tegu $K(a) \cap K(b) \neq \emptyset$. Tada egzistuoja toks elementas c, $c \in K(a)$ ir $c \in K(b)$, t.y. cEa ir cEb. Iš E simetriškumo išplaukia aEc ir bEc, o iš E tranzityvumo – aEb. Jeigu $x \in K(a)$, t.y. xEa, tai iš aEb arba bEa gauname (E tranzityvumas) xEb, t.y. $x \in K(b)$. Taigi $K(a) \subseteq K(b)$. Analogiškai įrodome, kad $K(b) \subseteq K(a)$. Vadinasi, $K(a) = K(b)$.

Dabar įrodysime, kad $R_\pi = E$.

1) Tegu aEb. Iš E simetriškumo gauname bEa ir $a \in K(a) \cap K(b)$, t.y. $K(a) \cap K(b) \neq \emptyset$, todėl pagal 2) $K(a) = K(b)$ ir $aR_\pi b$. Atvirkščiai, jeigu $aR_\pi b$, t.y. $K(a) = K(b)$, tai $a \in K(b)$ ir aEb.

2) Jeigu $a \in K \in \pi$, tai $K(a) = K$.

Taigi $R_\pi = E$.

$\triangle$

2.15 pavyzdys. Aibėje $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ ekvivalentumo sąryšį $\sim$ apibrėšime taip: $(a, b) \sim (c, d)$ tada ir tik tada, kai $ad = bc$. Pavyzdžiui, $(-40, 25) \sim (8, -5)$, $(3, 6) \sim (-1, -2)$. Nesunku suprasti, kad šio ekvivalentumo sąryšio klasės gali būti sutapatintos su racionaliųjų skaičių aibe $\left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$. Iš tikrųjų $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ekvivalentu $ad = bc$.

2.16 pavyzdys. Tegu $n \in \mathbb{N}$. Sveikųjų skaičių aibėje $\mathbb{Z}$ apibrėšime sąryšį $\equiv (\mathrm{mod}\, n)$: $\{(a,b) \mid a-b=nk,\ a,b,k \in \mathbb{Z}\}$, t.y. $a \equiv b\,(\mathrm{mod}\, n)$ (sakoma, a lygsta b moduliu n). Šis sąryšis yra ekvivalentumo sąryšis. (Patikrinkite!) Elemento a ekvivalentumo klasė $K_n(a) = \{a+nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Kai yra aišku, kuriuo moduliu n nagrinėjamas lygstamumas, klasė $K_n(a)$ žymima trumpiau – $\overline{a}$. Faktoraibė šio ekvivalentumo sąryšio atžvilgiu žymima $\mathbb{Z}_n$. Pavyzdžiui, kai $n=3$, $\overline{0} = \{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$, $\overline{1} = \{\ldots,-5,-2,1,4,\ldots\}$, $\overline{2} = \{\ldots,-4,-1,2,5,\ldots\}$ ir $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$. Bendruoju atveju $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{\mathrm{n}-1}\}$:

$$
\begin{aligned}
&\overline{0} = \{\ldots,-2\mathrm{n},-\mathrm{n},0,\mathrm{n},2\mathrm{n},\ldots\},\\
&\overline{1} = \{\ldots,-2\mathrm{n}+1,-\mathrm{n}+1,1,\mathrm{n}+1,2\mathrm{n}+1,\ldots\},\\
&\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\overline{\mathrm{n}-1} = \{\ldots,-\mathrm{n}-1,-1,\mathrm{n}-1,2\mathrm{n}-1,3\mathrm{n}-1,\ldots\}.
\end{aligned}
$$

Aibė $\mathbb{Z}_n$ dar vadinama *likinių klasių moduliu n aibe.*