DISKRETINĖS MATEMATIKOS EGZAMINAS

1999.12.22

ĮRODYKITE.

1. Teoremą apie paprastąjį algebrinį plėtinį.
2. Teorema apie pirminius ir maksimalius idealus.
3. Teorema apie neredukuojamo polinomo eilę.

ATSAKYKITE.

1. Kiek skirtingų faktoraibių turi aibė iš 4 elementų ?
Atsakymą pagrįskite.
2. Pateikite netrivialųjį ekvivalentumo sąryšį racionaliųjų skaičių aibėje.
3. Faktorizuokite funkciją $f : Z_{12} \to Z_{12}$, $f\left([x]_{12}\right) = [x]_{12}^2$.
4. Išvardinkite visas ciklines grupes izomorfizmo tikslumu.
Atsakymą pagrįskite.
5. Faktorizuokite 78 -osios eilės ciklinę grupę $\langle a \rangle$ pogrupio $\langle a^3 \rangle$ atžvilgiu. Nurodyti elementus.
6. Pateikite netrivialų kokio nors žiedo požiedžio , bet ne idealo, pavyzdį.
7. Pateikite kurį nors 9 elementų kūno reiškimą.
8. Išvardinkite visus pirminius kūnus izomorfizmo tikslumu.
Koks kūno $GF(343)$ pirminis pokūnis ?
9. Kiek skirtingų pokūnių , įskaitant trivialiuosius, yra kūne $GF(4^{10})$?
Išvardinkite juos.
10. Tegu $f(x)$ - 3-ojo laipsnio neredukuojamas polinomas virš kūno $GF(8)$. Nurodykite tris kūnus tarp kurių turėtų būti šio polinomo skaidymo kūnas. Atsakymą pagrįskite.
11. Kiek yra 12-ojo laipsnio neredukuojamų polinomų virš kūno $GF(2)$. Raskite jų sandaugą. Kokio laipsnio šis polinomas ?
12. Raskite skaičiaus 9 ciklotomines aibes moduliu 11.
Ką galite pasakyti parašę jas ?

ATSAKYMAI

1. 18.

3. $\{[0]_{12}, [6]_{12}\}, \{[\pm 1]_{12}, [\pm 5]_{12}\}, \{[\pm 2]_{12}, [\pm 4]_{12}\}, \{[\pm 3]_{12}\}$.

4. $\mathbf{Z}$ ir $\mathbf{Z}_n$.

5. $\langle a \rangle / \langle a^3 \rangle \cong \langle a^{26} \rangle$ - trečiosios eilės ciklinė grupė.

8. $\mathbf{Q}$ ir $GF(p)$, p - pirminins. $GF(7)$.

9. $2^{10} - 1 = 1023 = 3 \times 11 \times 31$. $GF(2^n)$, čia n = 1, 3, 11, 31, 33, 93, 341, 1023. Viso 8 pokūniai.

10. $8^3 - 1 = 511 = 7 \times 73$, todėl skaidymo kūnas yra vienas iš $GF(8^n), n = 7, 73, 511$.

11. $N_2(12) = \frac{1}{12}\left(\mu(1)\,2^{12} + \mu(2)\,2^6 + \mu(3)\,2^4 + \mu(4)\,2^3 + \mu(6)\,2^2 + \mu(12)\,2\right) = \frac{1}{12}\left(2^{12} - 2^6 - 2^4 + 2^2\right) = 335$.

$I(2,12,x) = \left(x^{2^{12}} - 1\right)\left(x^{2^6} - 1\right)^{-1}\left(x^{2^4} - 1\right)^{-1}\left(x^{2^2} - 1\right)$
$= \frac{x^{4096}-1}{(x^{64}-1)(x^{16}-1)}\left(x^4 - 1\right)$ .Tai 16-ojo laipsnio polinomas.

12. $\{0\}, \{1,9,4,3,5\}, \{2,7,8,6,10\}$. Polinomo $x^{11} - 1$ kanoniame skaidinyje virš kūno $GF(9)$ yra vienas pirmojo ir du penktojo laipsnio polinomai.