10 pratybos

Euklido erdvės. Metrinių erdvių geometrija.

Apibrėžimas. *Tegu L - Euklido erdvės E poerdvis. Su kiekvienu $x \in E$ egzistuoja $y \in L$ ir toks $z \perp L$, kad $x = y + z$. Čia y vadinamas ortogonaliąja projekcija, o z - statmeniu į L.*

Apibrėžimas. *Atstumas tarp vektoriaus v ir plokštumos $v_0 + L$ - tai statmens nuleisto iš vektoriaus $v - v_0$ į L ilgis.*

Apibrėžimas. *Atstumas tarp vektoriaus v ir poerdvio L - tai vektoriaus v statmens į L ilgis.*

Apibrėžimas. *Atstumas tarp plokštumų $P_1 = v_1 + L_1$ ir $P_2 = v_2 + L_2$ - tai vektoriaus $v_2 - v_1$ statmens į poerdvį $L = L_1 + L_2$ ilgis.*

Apibrėžimas. *Kampas tarp vektoriaus v ir poerdvio L yra kampas tarp v ir jo ortogoalios projekcijos į L.*

1. Jeigu $(u, v)_1$ ir $(u, v)_2$ yra Euklido erdvės skirtingos skaliarinės daugybos, tai skaliarine daugyba bus ir $a(u, v)_1 + b(u, v)_2$, kai $a, b-$ neneigiamieji, kartu nelygūs nuliui skaičiai. Įrodykite

.

2. Ortogonalizavimo procesu sudarykite aritmetinės erdvės R^n vektorių $u_1, u_2, ..., u_m$ tiesinio apvalkalo ortogonaliąją bazę:

$$u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-3, -4, -1), u_3 = (-4, -7, 0).$$
$$u_1 = (2, 3, -4), u_2 = (-3, -1, 5), u_3 = (8, -13, 16)$$
$$u_1 = (1, 0, 0, 0), u_2 = (0, 2, 0, 0), u_3 = (0, 0, 3, 0), u_4 = (0.0.0.4).$$
$$u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (0, 1, 2, 0), u_3 = (0, 0, 1, 0), u_4 = (0, 0, 3, 1).$$
$$u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1, 1), u_4 = (0, 0, 0, 1).$$
$$u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, 1, -1, -1), u_3 = (1, -1, 1, -1), u_4 = (1, -1, -1, 1)$$

3. Papildykite vektorių sistemą $u_1, u_2, ..., u_m$ iki aritmetinės erdvės R^n ortonormuotosios bazės:

$$u_1 = \frac{1}{3}(1, -2, 2), u_2 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$$

4. Raskite aritmetinės erdvės R^4 vektorių $u_1, u_2, ..., u_m$ tiesinio apvalkalo ortogonaliojo papildinio bazę;

$$u_1 = (4, 1, 2, -3), u_2 = (2, -2, 3, 5).$$

5. Apskaičiuokite aritmetinės erdvės R^4 vektoriaus u projekciją ir statmenį į vektorių sistemos $u_1, u_2, ..., u_m$ tiesinį apvalkalą $\langle u_1, u_2, ..., u_m \rangle$:

$$u = (2, -3, 3, -3)\,; u_1 = (1, -1, 2, 3)\,, u_2 = (-1, 3, 1, 5)\,.$$

6. Ar bus Euklido erdvės E poerdviu aibė
$\{U = u \in E : (v, u) = a$,čia v – fiksuotas vektorius,o a – fiksuotas skaičius$\}$?

7.-8. Raskite vektoriaus x ortogonaliąją projekciją ir statmenį į L.
7.a) $x = (14, -3, -6, -7)\,; L = \langle(-3, 0, 7, 6)\,; (1, 4, 3, 2)\,; (2, 2, -2, -2)\rangle\,.$
b) $x = (2, -5, 3, 4)\,; L = \langle(1, 3, 3, 5)\,, (1, 3, -5, -3)\,, (1, -5, -3, -3)\rangle\,.$

8. a) $x = (-3, 0, -5, 9)\,, L = \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4) : \begin{array}{r} 3a_1 + 2a_2 + a_3 - 2a_4 = 0 \\ 5a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 2a_4 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 10a_4 = 0 \end{array} \right\}.$

b) $x = (7, -4, -1, 2)\,, L = \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4) : \begin{array}{r} 2a_1 + a_2 + a_3 + 3a_4 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 2a_3 - 4a_4 = 0 \end{array} \right\}.$

9. Euklido erdvėje įrodyti : $x \perp y \Longleftrightarrow \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\,.$

10. Raskite lygtis, kurios apibrėžia poerdvio L ortogonalųjį papildinį.
a) $L = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}.$

b) $L = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{array}{c} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0 \end{array} \right\}.$

11. Raskite atstumą nuo vektoriaus x iki poerdvio, apibrėžto lygtimis.
(i) $x = (2, 4, 0, -1)$; $\left\{ \begin{array}{c} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{array} \right.$.
(ii) $x = (3, 3, -4, 2)$; $\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{array} \right.$.
(iii) $x = (3.3. - 1, 1, -1)$; $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$.
(iv) $x = (3, 3, -1, 1, -1)$; $x_1 - 3x_2 + 3x_4 - x_5 = 0$.

12. Raskite atstumą tarp tiesių:
a) $(5, 2, 0, 3) + t\,(1, 2, -4, 1)$ ir $(3, -1, 3, 1) + t\,(1, 0, -1, 0)\,.$

b) $(5,4,3,2)+t\,(1,1,-1,-1)$ ir $(2,1,4,3)+t\,(-3,-3,3,3)$.

13. Įrodykite, kad sistemos Gramo matrica G yra neišsigimusi tada ir tik tada, kada sistema yra bazė.

14. Įrodykite, kad det G Gramo-Šmidto ortogonalizacijos proceso metu nekinta.

15. Įrodykite, kad det $\mathrm{G}(x_1,...,x_k) \le \|x_1\|^2 \cdots \|x_k\|^2$. Lygybė galima tik tada, kai $(x_i,x_j)=0, i \ne j$; arba, kai $x_i=0$ su kuriuo nors i.

16. Įrodyti, kad n -mačio stačiojo gretasienio įstrižainės kvadratas lygus briaunų, išeinančių iš vienos viršūnės kvadratų sumai.

17. Raskite n - mačio kubo įstrižainių, ortogonalių duotai įstrižainei, skaičių.

18. Raskite n - mačio kubo, kurio kraštinė a, įstrižainės ilgį.

19. Raskite kampus tarp n -mačio kubo įstrižainių ir briaunų.

20. Raskite apibrėžto apie $n-$ matį kubą, kurio briauna a, rutulio spindulį R ir priklausomai nuo n išspręskite nelygybę$R< a$.

21. Apskaičiuokite gretasienio tūrį, kai kraštinės lygios:

$$\text{(i)}\ \begin{matrix}(1,-1,1,-1)\\(1,1,1,1)\\(1,0,-1,0)\\(0,1,0,-1)\end{matrix}\qquad \text{(ii)}\ \begin{matrix}(1,1,1,1)\\(1,-1,-1,1)\\(2,1,1,3)\\(0,1,-1,0)\end{matrix}$$

$$\text{(iii)}\ \begin{matrix}(1,1,1,2,1)\\(1,0,0,1,-2)\\(2,1,-1,0,2)\\(0,7,3,-4,-2)\\(39,-37,51,-29,5)\end{matrix}\qquad \text{(iv)}\ \begin{matrix}(1,0,0,2,5)\\(0,1,0,3,4)\\(0,0,1,4,7)\\(2,-3,4,11,12)\\(0,0,0,0,1)\end{matrix}\ .$$

22. Įrodykite, kad gretasienio tūriams galioja

$$V\,(a_1,...,a_k,b_1,...,b_l) \le V\,(a_1,...,a_k)\cdot V\,(b_1,...,b_l)\,.$$

Lygybė galioja tik tada, kai $(a_i,b_j)=0$ su visais i,j.

23. Apskaičiuokite kampą tarp vektoriaus x ir poerdvio L .
(i) $x=(2,2,1,1)$; $L=\langle(3,4,-4,-1),(0,1,-1,2)\rangle$.
(ii) $x=(1,0,3,0)$; $L=\langle(5,3,4,-3),(1,1,4,5),(2,-1,1,2)\rangle$.
(iii) $x=(-3,15,1,-5)$; $L=\langle(2,3,-4,-6),(1,8,-2,-16),(1,-5,-2,10)\rangle$.
(iv) $x=\left(3,1,\sqrt{2},-2\right)$; $L=\langle(2,-1,2,1),(-1,2,-2,1),(-1,1,-1,0)\rangle$.

24. Raskite kampą tarp poerdvių:
$\langle(1,0,0,0),(0,1,0,0)\rangle$ ir $\langle(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$.

Erdvėje M_n apibrėžta skaliarinė sandauga: $(f,g)=a_0b_0+a_1b_1+\cdots+a_nb_n$.

25. Tegu ervėje M_n duoti polinomai $f_1(t)=3t^2+2t+1$, $f_2(t)=-t^2+2t+1$, $f_3(t)=3t^2+2t+5$, $f_4(t)=3t^2+5t=2$. Rakite polinomą $f_0(t)$, $\deg f_0\leq 2$, kuris būų vienodai nutolę nuo f_1,f_2,f_3,f_4. Apskaičiuokite šį atstumą. Įrodykite, kad polinomas $f_0(t)+c_3t^3+\cdots+c_nt^n$ irgi vienodai nutolęs nuo f_1,f_2,f_3,f_4. Raskite šį atstumą.

26. Apskaičiuokite atstumą tarp t^n ir M_{n-1}.

27. Apskaičiuokite atstumą tarp $t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0$ ir M_{n-1}.

28. Apskaičiuokite atstumą tarp $at^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0$ ir M_{n-1}.

29. Tegu $L=\{f\in M_n, f(1)=0\}$. Įrodykite, kad atstumas tarp bet kurio $g\in M_n$ ir L yra $\dfrac{g(1)}{\sqrt{n+1}}$.

30. Tegu $v\in E$ fiksuotas vektorius, o $L=\langle v\rangle^{\perp}$. Įrodykite, kad atstumas tarp vektoriaus x ir L yra lygus $\dfrac{|(x,v)|}{\|v\|}$.

31. Įrodykite, kad kampų, kuriuos sudaro vektorius v su poerdviu L ir su $L^{\perp}$, suma lygi $\frac{\pi}{2}$.