8 Pratybos.

Poerdviai.

1. Raskite poerdvių $\langle u_1, u_2, ..., u_k\rangle$ ir $\langle u_1, u_2, ..., u_m\rangle$ sumos ir sankirtos dimensijas ir bazes, kai:

$$\begin{array}{rll} & u_1 = (1,-1,0,2)\,, & u_1' = (2,8,2,4)\,, \\ \text{a)} & u_2 = (2,3,1,4)\,, & u_2' = (5,5,2,10)\,, \\ & u_3 = (0,5,1,0)\,, & u_3' = (3,-3,0,6)\,. \\ & u_1 = (2,1,3,1)\,, & u_1' = (1,-1,2,1)\,, \\ \text{b)} & u_2 = (-1,2,-4,2)\,, & u_2' = (2,0,1,-3)\,, \\ & u_3 = (2,3,-1,0)\,, & u_3' = (-1,0,2,-2)\,. \end{array}$$

2. Tegu poerdviai $U, V \subset R^n$ apibrėžti lygtimis $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ ir $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ atitinkamai. Įrodykite, kad $R^n = U \oplus V$ ir raskite vienetinių vektorių projekcijas poerdviuose U (V atžvilgiu) ir V (U atžvilgiu).

3. Tegu ervėje R^4 duoti poerdviai U ir V. Įrodykite, kad $R^4 = U \oplus V$ ir raskite vektoriaus u projekcijas poerdviuose U (V atžvilgiu) ir V (U atžvilgiu) :

a) $U = [(1,1,1,1)\,;(-1,-2,0,1)]$, $V = [(-1,-1,1,-1)\,;(2,2,0,1)]$ ir $u = (4,2,4,4)$.

b) $U = [(2,3,11,5)\,,(1,1,5,2)\,,(0,1,1,1)]\,, V = [(2,1,3,2)\,,(1,1,3,4)\,,(5,2,6,2)]$ ir $u = (2,0,0,3)$.

4. Tegu $f_1, f_2 \in K[x]$, BDD$(f_1, f_2) = 1$, o $\deg f_1 = m_1, \deg f_2 = m_2$. Įrodykite, kad

$$S = K_{m_1+m_2-1}[x] = S_1 \oplus S_2,$$

čia $S_i = \{f \in S \mid \text{ polinomas } f \text{ dalijasi iš } f_i\}$, $i = 1, 2$.

5. Įrodykite, kad tolydžių realiųjų funkcijų, apibrėžtų intervale $[0,1]$, vektorinė erdvė $C[0,1]$ yra tiersioginė poerdvių U ir W suma:

a) $U = \mathbf{R}$; $W = \{f(x) \in C[0,1] \mid f(x_0) = 0, \text{ čia } 0 \leq x_0 \leq 1 - \text{ fiksuotas skaičius}\}$.

b) $U = \mathbf{R}_{n-1}[x]$; $W = \{f(x) \in C[0,1] \mid f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0\}$,

čia $0 \leq x_1 < ..., < x_n \leq 1-$ fiksuoti skaičiai

6. Nurodykite kurią nors bazę faktorerdvėje R^4/V .

1) $V = \langle (1,1,1,1)\,;(1,2,3,4)\rangle$;

2) $V = \langle (1,-1,2,-1)\,;(1,0,0,1)\,;(1,1,1,1)\rangle$

Plokštumos vektorinėse erdvėse.

Apibrėžimas. Tegu L yra vektorinės erdvės V poerdvis, o $x_0 \in V$. Vektorių aibė $P = x_0 + L$ vadinama *plokštuma* vektorinėje erdvėje V. Jeigu $\dim L = \dim V - 1$, tai ši plokštuma vadinama *hiperplokštuma.* Jeigu $\dim L = 1$, tai plokštuma vadinama *tiese.* Dvi plokštumos $P_1 = x_1 + L_1$ ir $P_2 = x_2 + L_2$ vadinamos lygiagrečiomis, jeigu arba $L_1 \subseteq L_2$, arba $L_1 \subseteq L_2$.

Teiginys 1. Jeigu $L = [u_1, u_2, ..., u_k]$, tai
$x \in x_0 + L \Longleftrightarrow x = x_0 + t_1 u_1 + t_2 u_2 + \cdots + t_k u_k$.

Teiginys 2. Plokštumos $x_1 + U_1$ ir $x_2 + U_2$ sutampa tada ir tik tada, kada $U_1 = U_2$ ir $x_1 - x_2 \in U_1$.

Teiginys 3. Jeigu $V = U \oplus W$, tai plokštumų $x_0 + U$ ir $y_0 + W$ sankirtoje vienas vektorius $x_0 + u = y_0 + w$, čia $x_0 - y_0 = u + w, u \in U, w \in W$.

Teiginys 4. Plokštumos $x_0 + U$ ir $y_0 + W$ turi netuščią sankirtą tada ir tik tada, kai $x_0 - y_0 \in U + W$.

Teiginys 5. Mažiausios plokštumos, turinčios dvi iš anksto duotas tieses, dimensija yra *nedidesnė* už 3.

Teiginys 6. Mažiausia plokštuma, turinti plokštumas $P_1 = x_0 + U$ ir $P_2 = y_0 + W$, tai plokštuma $P = x_0 + U + W + L$, čia $L = [y_0 - x_0]-$ tiesė.

$\dim P = \dim (U + W)$, jeigu $P_1 \cap P_2 \neq \oslash$ ir $\dim P = \dim (U + W) + 1$, jeigu $P_1 \cap P_2 = \oslash$.

Teiginys 7. Dviejų tiesių $T_1 = x_0 + U$ ir $T_2 = y_0 + W$ klasifikacija trimatėje erdvėje . Tegu $P-$ mažiausia plokštuma, kurioje yra tiesės T_1 ir T_2.

$\dim (U + W)$	$T_1 \cap T_2$	$\dim P$	*prasmė*
1	$\neq \oslash$	1	tiesės sutampa
1	$= \oslash$	2	tiesės lygiagrečios
2	$\neq \oslash$	2	tiesės kertasi taške
2	$= \oslash$	3	tiesės prasilenkiančios

1. Tegu $V = R_5$ - aritmetinė erdvė, o $P = x_0 + t_1u_1 + t_2u_2$ - plokštuma.
$x_0 = (2, 3, -1, 1, 1)\,, u_1 = (3, -1, 1, -1, 1)\,, u_2 = (-1, 1, 1, 1 - 1)\,.$
Ar vektoriai $v_1 = (1, 6, 4, 4, -2)$ ir $v_2 = (1, 6, 5, 4, -2)$ priklauso P ?

2. Kokia plokštumos $P = x_0 + L$ ir tiesės $x = x_1 + tq_1$ padėtis?
$x_0 = (1, 0, 0, 1)\,, L = [(5, 2, -3, 1)\,, (4, 1, -1, 0)\,, (-1, 2, -5, 3)]\,.$
a) $x_1 = (3, 1, -4, 1)\,, q_1 = (-1, 1, 2, 1)\,.$
b) $x_1 = (3, 0, -4, 1)\,, q_1 = (-1, 1, 2, 1)\,.$
c) $x_1 = (-2, 0, -1, 2)\,, q_1 = (1, 1, -2, 1)\,.$

3. Įrodykite, kad tiesės $x = x_1 + tq_1, x = x_2 + tq_2$ kertasi.
$x_1 = (9, 3, 6, 15, -3)\,, q_1 = (7, -4, 11, 13, -5)\,;$
$x_2 = (-7, 2, -6, -5, 3), q_2 = (2, 9, -10, -6, 4)\,.$
Raskite sankirtą. Raskite dvimatę plokštumą, kurioje yra šios tiesės.

4. Kokia plokštumų $P = x_0 + t_1u_1 + t_2u_2$, $P = y_0 + t_1v_1 + t_2v_2$ padėtis?

$x_0 =$	$(3, 1, 2, 0, 1)$	$(7, -4, 0, 3, 2)$	$(2, -3, 1, 5, 0)$	$(-3, -2, 1, -1, 2)$
$y_0 =$	$(1, 0, 1, 1, 0)$	$(6, -5, -1, 2, 3)$	$(0, -1, 0, 4, 1)$	$(-1, 0, 3, 3, 8)$
$u_1 =$	$(2, -6, 3, 1, -6)$	$(-1, 1, 1, 1, 1,)$	$(3, -2, 1, 0, 1)$	$(1, -1, 1, 1, 3)$
$u_2 =$	$(-1, 1, -1, 0, 1)$	$(1, 1, -1, 1, 1,)$	$(1, 2, 4, 0, -2)$	$(1, 1, -3, -3, 1)$
$v_1 =$	$(0, 5, -2, -1, 6)$	$(1, -1, 1, 1, 1,)$	$(-1, 5, -2, 0, 3)$	$(-1, 2, 1, 2, -2)$
$v_2 =$	$(-1, 3, -1, -1, 2)$	$(1, 1, 1, -1, 1)$	$(6, 3, 4, 0, 3)$	$(0, 1, 2, 3, 1).$

5. Atlikite tiesių $x_1 + P$ ir $x_2 + Q$ klasifikaciją erdvėje R^4.

6. Atlikite plokštumų $x_1 + P$ ir $x_2 + Q$ klasifikaciją erdvėje R^5.

7. Raskite nehomogeninę tiesinių lygčių sistemą, kurios sprendinių aibė yra plokštuma $x_0 + P$:
a) $x_0 = (1, 2, 0, 2, 1)\,, P = [(5, -2, 6, 1, -4)\,, (1, -4, 0, 1, -6)]\,;$
b) $x_0 = (1, 2, 1, 2, 1)\,, P = [(2, 1, 3, 0, 1)\,, (-3, 3, -3, -1, 5)]\,;$
c) $x_0 = (4, 1, 10, -3, 5)\,, P = [(2, 1, 3, 0, 1)\,, (3, -3, 3, 1, -5)]\,;$
d) $x_0 = (-3, 2, 1, -4, 8)\,, P = [(1, -4, 0, 1, -6)\,, (5, -2, 6, 1, -4)]\,.$