

7 pratybos.

*Vektorių sistemos.*

1. Apskaičiuokite polinomų, kurių laipsniai ne didesni už 5, erdvės  $\mathbf{R}_5[x]$  vektorių sistemos rangą:

a)  $2; 2 + x; 3 + 2x + x^2$ .

b)  $3x^2 + 2x + 1; 4x^2 + 3x + 2; 3x^2 + 2x + 3; x^2 + x + 1; 4x^2 + 3x + 4$

2. Raskite antros eilės matricių su realiaisiais koeficientais erdvės  $\mathbf{R}_{2 \times 2}$  vektorių sistemos rangą:

a)  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

b)  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ .

*Uždaviniuose 8-9. nagrinėjama realiųjų funkcijų su vienu kintamuoju vektorinė erdvė  $F(\mathbf{R})$ .*

3. Įrodykite, kad funkcijos  $f_1, f_2, \dots, f_n \in F(\mathbf{R})$  yra tiesiškai nepriklausoma sistema tada ir tik tada, kai egzistuoja tokie skaičiai  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , kad  $\det(f_i(a_j)) \neq 0$ .

4. Vektorinėje erdvėje  $F(\mathbf{R})$  įrodykite funkcijų sistemos tiesinę nepriklausomybę.

1)  $\sin x, \cos x$ ;

2)  $1, \sin x, \cos x$ ;

3)  $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$ ;

4)  $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$ ;

5)  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx$ , čia  $n \geq 2$ ;

6)  $1, \sin x, \sin^2 x, \dots, \sin^n x$ , čia  $n \geq 2$ ;

7)  $1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x$ , čia  $n \geq 2$ ;

8)  $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}$ , čia  $a_i \neq a_j$ , kai  $i \neq j$  ir  $n \geq 2$ ;

9)  $x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_n}$ , čia  $a_i \neq a_j$ , kai  $i \neq j$  ir  $n \geq 2$ .

*Vektorinės erdvės bazė*

5. Ar vektorių sistema  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  sudaro antros eilės matricių su realiaisiais koeficientais erdvės  $\mathbf{R}_{2 \times 2}$  bazę?

6. Ne aukštesnio kaip 5-ojo laipsnio polinomų erdvėje  $\mathbf{R}_5[t]$  raskite polinomo  $f(t) = t^5 - 2t^4 + t^3 + 2t^2 - t + 1$  koordinatas bazėse

- 1)  $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5$ ;
- 2)  $1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, t^3 + t^4, t^4 + t^5$ .

7. Ar  $\sqrt[4]{3} \in [1, \sqrt{3}]_{\mathbf{Q}}$  ?

8. Ar begalinės sekos  $x = (a_1, a_2, \dots)$  sudaro vektorinę erdvę  $S$  ? Jeigu taip, kokia šios erdvės dimensija?

9.  $F \subset S$ ,  $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}, k = 3, 4, \dots$ . Raskite  $\dim F$ . Raskite  $F$  bazę.

10.  $V \subset R_n : (a_1, \dots, a_n) \in V \iff a_1 + \dots + a_n = 0$ . Raskite  $\dim V$  ir  $V$  bazę.

*Vektorių sistemos papildymas iki bazės.*

11. Vektorinėje erdvėje  $\mathbf{R}_4$  raskite dvi bazes, turinčias vektorius  $(1, 1, 0, 0)$  ir  $(0, 0, 1, 1)$ .

12. Papildykite sistemą iki bazės.

- 1)  $(0, 0, 1, 1), (1, 2, 1, 2, 0)$  aritmetinėje erdvėje virš  $GF(3)$ ;
- 2)  $(3, 1, -1, 1), (-1, 2, 3, -4), (7, 7, 3, -5)$  aritmetinėje erdvėje  $\mathbf{R}^4$ ;
- 3)  $(2, 1, 1), (3, -2, 2)$  aritmetinėje erdvėje virš  $\mathbf{R}^3$ ;
- 4)  $(3, 1, 0, 2), (2, 1, 1, 3)$  aritmetinėje erdvėje virš  $GF(5)$ .

13. Polinomų sistemas papildykite iki bazės erdvėje  $\mathbf{R}_5[x]$ :

- a)  $t^5 + t^4, t^5 - 3t^3, t^5 + 2t^2, t^5 - t$ .
- b)  $t^5 + t^4 + t^3, t^5 - t^3, t^5 + t^2, t^5 - 1$ .

14. Poerdviui  $L = \langle (1, 3, 0, -1), (2, 5, 1, 2), (1, 2, 2, 3) \rangle \in \mathbf{R}^4$  raskite du skirtingus papildinius  $L^c$ .

15. Erdvėje  $\mathbf{R}_n[x]$  raskite poerdvio  $\{f(x) \mid f(1) = 0\}$  papildinį.

16. Raskite homogeninės tiesinių lygčių sistemos fundamentaląją sprendinių sistemą:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0 \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 14x_1 + 34x_2 - 7x_3 + 63x_4 = 0 \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 0 \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0 \end{array} \right. \\ \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

17. Raskite tiesinę homogeninę lygčių sistemą, turinčią a) dvi, b) tris, c) keturias lygtis, kurios fundamentalioji sprendinių sistema yra:

$$\begin{aligned}
& 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 3) \begin{pmatrix} 15 \\ -34 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \\ -37 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 5) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$